高三年级 2024 年 2 月考试
数学参考答案

1. B　$(3+i)(1+2i)=3+6i+i+2i^2=1+7i$.

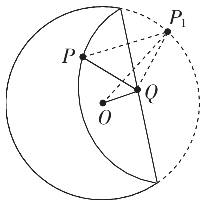
2. A　因为 $a^2+\frac{1}{a^2+1}=a^2+1+\frac{1}{a^2+1}-1\geqslant 1$，当且仅当 $a=0$ 时，等号成立，所以 $A=\{x|-4<x<4\}$，$B=\{x|x\geqslant 1\}$，$A\cap B=[1,4)$.

3. A　若 α 是第二象限角，则 $\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$，$\sin\alpha\tan\alpha<0$. 若 $\sin\alpha\tan\alpha<0$，则 α 是第二象限角或第三象限角. 故选 A.

4. C　若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l$，则 α 与 β 不一定垂直. A 不正确. 若 $l\perp m$，$m/\!/\alpha$，则 l 与 α 的关系不确定. B 不正确. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$l/\!/m$，则 $m/\!/\beta$. C 正确. 若 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则 $l/\!/m$ 或 l，m 异面. D 不正确.

5. C　由 $e_1^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}=3$，得 $e_2^2=\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{3}{2}$，则 $e_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. D　如图，设 P 关于 l 对称的点为 P_1，则 P_1 在圆 O 上，连接 P_1Q，OP_1，则有 $|PQ|=|QP_1|$，故 $|QP|+|QO|=|QP_1|+|QO|\geqslant|OP_1|=2$.



7. D　(法一)因为 $\overrightarrow{AB}=(3,5)$，$\overrightarrow{AC}=(1,7)$，所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-2,2)$. 又 AD 为 BC 边上的高，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}.\end{cases}$ 设 $\overrightarrow{AD}=(x,y)$，则

$\begin{cases}-2x+2y=0,\\ x=3\lambda+1-\lambda,\\ y=5\lambda+7(1-\lambda),\end{cases}$ 解得 $x=y=4$，所以 $\overrightarrow{AD}=(4,4)$.

(法二) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-2,2)$，设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{BC}^2=-6+10+8\lambda=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(4,4)$.

8. B　令 $f(x)=\sin x+2^x$，$g(x)=\sin x+3^x$，当 $x>0$ 时，$g(x)>f(x)>0$，当 $x<0$ 时，$g(x)<f(x)<2$. 易知 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，由 $\sin a+2^a=\sin b+3^b=2$，得 $0<b<a<1$，则 $a^b>b^b>b^a$，故 $\lg a^b>\lg b^b>\lg b^a$，即 $b\lg a>b\lg b>a\lg b$.

9. AD　$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}\cos x$，则 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 AD.

10. ABC　由 $(0.004+a+0.018+0.022+0.028+0.022)\times 10=1$，解得 $a=0.006$. A 正确. $m=\frac{8}{0.004\times 10}=200$. B 正确. 评分数的平均数为 $45\times 0.04+55\times 0.06+65\times 0.22+75\times 0.28+85\times 0.22+95\times 0.18=76.2$. C 正确. 因为 $0.04+0.06+0.22=0.32>0.25$，所以甲不会被邀请参与产品改进会议. D 不正确.

11. BC　若平面△ABC 是面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ 的等边三角形，则 $AB=BC=AC=R$，则 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$，$a$

$=b=c=\frac{\pi}{3}R$. A 不正确. 若 $a^2+b^2=c^2$,则 $(\alpha R)^2+(\beta R)^2=(\gamma R)^2$,则 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. B 正确. 若 $a=b=c=\frac{\pi}{3}R$,则 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$,$AB=BC=AC=R$,则平面△$ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$,则 O 到平面 ABC 的距离 $h=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}R$,则三棱锥 O-ABC 的体积 $V_{O\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$,则球面 O-ABC 的体积 $V>V_{O\text{-}ABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$. C 正确. 由余弦定理可知 $\begin{cases}BC^2=2R^2-2R^2\cos\alpha,\\AC^2=2R^2-2R^2\cos\beta,\\AB^2=2R^2-2R^2\cos\gamma,\end{cases}$ 因为 $C=\frac{\pi}{2}$,所以 $BC^2+AC^2=AB^2$,则 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=1$. 取 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$,$\gamma=\frac{\pi}{2}$,则 $a=b=\frac{\pi}{3}R$,$c=\frac{\pi}{2}R$,则 $a^2+b^2=\frac{2\pi^2}{9}R^2<\frac{\pi^2}{4}R^2=c^2$. D 不正确.

12. ABD　由 $f(x-1)-f(1-x)=2x-2$,可得 $f(x)-f(-x)=2x$,则 $f'(x)+f'(-x)=2$,令 $x=0$,得 $f'(0)=1$. A 正确. 令 $g(x)=f(x)-x$,则 $g(-x)=f(-x)+x=f(x)-x=g(x)$,故 $y=f(x)-x$ 为偶函数. B 正确. 假设 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,则 $f(x-1)+f(1-x)=0$,则 $f'(x-1)-f'(1-x)=0$,即 $f'(x)-f'(-x)=0$,则 $f'(x)=1$,这与 $f'(x)$的图象关于点$(1,0)$对称矛盾,假设不成立. C 不正确. 因为 $f'(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,所以 $f'(1+x)+f'(1-x)=0$,令 $h(x)=f(1+x)-f(1-x)$,则 $h'(x)=f'(1+x)+f'(1-x)=0$,则 $h(x)=f(1+x)-f(1-x)=C$(C 为常数),则 $f(x-1)-f(x+1)=2x-2-C$,从而 $f'(x-1)-f'(x+1)=2$,即 $f'(x+2)=f'(x)-2$,由 $f'(0)=1$,得 $f'(2024)=-2023$. D 正确.

13. 1　抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的准线方程为 $y=-1$,顶点到它准线的距离为 1.

14. $\frac{1}{e}$　因为 $f(x)=ax-\ln x$,所以 $f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$. 若 $a\leqslant 0$,则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,无最小值. 若 $a>0$,则 $f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递减,在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{a})=1+\ln a=0$,解得 $a=\frac{1}{e}$.

15. 31　$S_4-S_2=a_3+a_4=12$,$a_2a_5=a_3a_4=32$,因为$\{a_n\}$单调递增,所以 $a_3=4$,$a_4=8$,则 $S_5=31$.

16. 60480　第 3 行,$c=9$,可选的位置有 3 个,其余 2 个位置任取 2 个数,共有 $C_3^1A_8^2$ 种情况. 第 2 行,取剩下 6 个数中最大的数为 b,可选的位置有 3 个,其余 2 个位置任取 2 个数,共有 $C_3^1A_5^2$ 种情况,第 1 行,剩下 3 个数任意排列,则有 A_3^3 种情况,故共有 $C_3^1A_8^2C_3^1A_5^2A_3^3=60480$ 种填法.

17. 解:(1)因为 $a(\cos B-2)+b\cos A=0$,所以 $\sin A(\cos B-2)+\sin B\cos A=0$,……… 1 分

则 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin A$. ……………………………………………… 2 分

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,所以 $\sin C=2\sin A$,………………… 4 分

则 $c=2a$,即 $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，$\sin C=2\sin A=1$，则 $C=\frac{\pi}{2}$，则 $B=\pi-A-C=\frac{\pi}{3}$. ………………… 7 分

$c=2a=6$，所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. ………………… 10 分

18.(1)证明：连接 AC，因为 $AD\perp CD$，$AD=1$，$CD=\sqrt{3}$，所以 $AC=2$，$\angle ACD=30°$. …… 1 分

由 $AD/\!/BC$，得$\angle ACB=60°$，则 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos\angle ACB=12$，……… 2 分

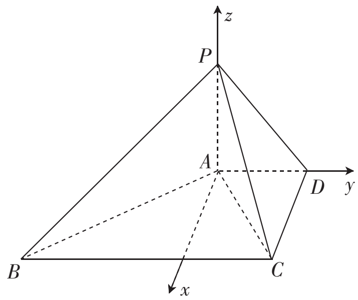
则 $AB^2+AC^2=BC^2$，从而 $AB\perp AC$. ………………………………………………………… 3 分

又 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$. ………………………………… 4 分

因为 $AC\cap PA=A$，所以 $AB\perp$平面 PAC. ………………………………………………… 5 分

又 $PC\subset$平面 PAC，所以 $AB\perp PC$. …………………………………………………………… 6 分

(2)解：以 A 为坐标原点，AD，AP 所在的直线分别为 y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $P(0,0,1)$，$B(\sqrt{3},-3,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},-3,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},1,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$. ………………………… 8 分



设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$得

$\begin{cases}\sqrt{3}x-3y-z=0,\\ \sqrt{3}x+y-z=0,\end{cases}$令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,0,\sqrt{3})$. ……………………………………… 9 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{PD}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{PD}|}=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，…………………………………………………… 10 分

故直线 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………………… 12 分

19.解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=4a_2$，则 $a_2=\frac{1}{4}$. ………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，由 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=2^{n+1}a_{n+1}$，得 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=2^na_n$，则 $2^{n-1}a_n=2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n$，则 $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n$. ………………………………… 3 分

因为$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{4}\neq\frac{3}{4}$，所以$\{a_n\}$从第 2 项起成等比数列，……………………………… 4 分

则 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ \frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$ ……………………………………………………… 5 分

(2)$b_1=\log_3a_1=0$，当 n 为大于 1 的奇数时，$b_n=\log_3[4^{n-1}\times\frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}]=n-2$，…… 6 分

当 n 为偶数时，$b_n=\frac{n\times3^n}{a_{n+1}}=3n\times4^n$. …………………………………………………… 7 分

$W=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}=0+1+3+\cdots+2n-3=\frac{(1+2n-3)(n-1)}{2}=(n-1)^2$. ………………………………………………………………………………………………… 8 分

$T=b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n}=6\times4^2+12\times4^4+18\times4^6+\cdots+6n\times4^{2n}$，

则 $16T=6\times4^4+12\times4^6+18\times4^8+\cdots+6n\times4^{2n+2}$，………………………… 9 分

则 $-15T=6\times(4^2+4^4+4^6+\cdots+4^{2n})-6n\times4^{2n+2}=6\times\dfrac{4^2-4^{2n+2}}{1-4^2}-6n\times4^{2n+2}=$

$\dfrac{(2-30n)\times4^{2n+2}-32}{5}$，………………………… 10 分

则 $T=\dfrac{(30n-2)\times4^{2n+2}+32}{75}$，………………………… 11 分

则 $S_{2n}=W+T=\dfrac{(30n-2)\times4^{2n+2}+32}{75}+(n-1)^2$．………………………… 12 分

20．解：(1)若学生甲第 1 题选择 B 种试题作答并且答对，则第 2 题选择 B 种试题作答的概率 $P_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$，………………………… 2 分

若学生甲第 1 题选择 B 种试题作答并且答错，则第 2 题选择 B 种试题作答的概率 $P_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}$，………………………… 4 分

故学生甲 2 题均选择 B 种试题作答的概率 $P=\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{19}{72}$．………………………… 5 分

(2)由题可知，X 的取值可能为 0，1，2，………………………… 6 分

且 $P(X=0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{16}$，………………………… 7 分

$P(X=1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{77}{144}$，………………………… 8 分

$P(X=2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{18}$，………………………… 9 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{77}{144}$	$\dfrac{5}{18}$

………………………… 10 分

则 $E(X)=0\times\dfrac{3}{16}+1\times\dfrac{77}{144}+2\times\dfrac{5}{18}=\dfrac{157}{144}$．………………………… 12 分

21．解：(1)因为 $\angle PA_1A_2=30^\circ$，所以 $\dfrac{|A_1O|}{|PA_1|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $|PA_1|=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$．………………………… 1 分

又 $\triangle PA_1A_2$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$，所以 $2(a+\dfrac{2\sqrt{3}a}{3})=4+2\sqrt{3}$，解得 $a=\sqrt{3}$，………………………… 3 分

则 $b^2=|PA_1|^2-a^2=1$，故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$．………………………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1,\\ y=\dfrac{1}{2}x+m,\end{cases}$整理得 $7x^2+12mx+12m^2-12=0$，…………………………… 5分

$\Delta=144m^2-336m^2+336=336-192m^2>0$，$x_1+x_2=-\dfrac{12m}{7}$，$x_1x_2=\dfrac{12m^2-12}{7}$. ……… 6分

$\dfrac{k_1+k_2}{1-\lambda k_1k_2}=\dfrac{\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}}{1-\dfrac{\lambda y_1y_2}{x_1x_2}}=\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{x_1x_2-\lambda y_1y_2}=\dfrac{4x_1x_2+4m(x_1+x_2)}{(4-\lambda)x_1x_2-2\lambda m(x_1+x_2)-4\lambda m^2}$ …………… 8分

$=\dfrac{-48}{(4-\lambda)(12m^2-12)+24\lambda m^2-28\lambda m^2}=\dfrac{-48}{(48-16\lambda)m^2+12\lambda-48}$. …………………… 10分

令 $48-16\lambda=0$，即 $\lambda=3$，则$\dfrac{k_1+k_2}{1-\lambda k_1k_2}=4$，为定值. ………………………………… 11分

故存在 $\lambda=3$，使得$\dfrac{k_1+k_2}{1-\lambda k_1k_2}$为定值. ……………………………………………… 12分

22.(1)解：由 $a=2$，得 $f(x)=(x+2)\ln x-x^2-x$，则 $f'(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}-2x$，…………… 1分

则 $f(1)=-2$，$f'(1)=0$，……………………………………………………………………… 2分

故曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+2=0$. ……………………………………… 4分

(2)证明：$f'(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-ax$，令 $g(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-ax$，则 $g'(x)=\dfrac{-ax^2+x-a}{x^2}$. ……

……………………………………………………………………………………………… 5分

因为 $0<a<\dfrac{1}{2}$，所以 $1-4a^2>0$，则方程$-ax^2+x-a=0$ 存在两个不同的实数根 m,n(设 $m<n$)，则 $m+n=\dfrac{1}{a}>0$，$mn=1$，则 $0<m<1<n$. ………………………………………… 6分

当 $x\in(0,m)\cup(n,+\infty)$时，$g'(x)<0$，当 $x\in(m,n)$时，$g'(x)>0$，则 $f'(x)=g(x)$在$(0,m)$和$(n,+\infty)$上单调递减，在(m,n)上单调递增. …………………………………………… 7分

$f'(1)=0$，$f'(a^2)=2\ln a+\dfrac{1}{a}-a^3$，$f'(\dfrac{1}{a^2})=-2\ln a+a^3-\dfrac{1}{a}=-f'(a^2)$，…………… 8分

令 $h(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-x^3(0<x<\dfrac{1}{2})$，则 $h'(x)=\dfrac{-3x^4+2x-1}{x^2}<0$ 在$(0,\dfrac{1}{2})$上恒成立，故 $h(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递减，故 $h(x)>h(\dfrac{1}{2})=\dfrac{15}{8}-2\ln 2>0$，则 $f'(a^2)>0$，$f'(\dfrac{1}{a^2})<0$，…

……………………………………………………………………………………………… 9分

不妨令 $x_1<x_2<x_3$，则 $x_1\in(a^2,m)$，$x_2=1$，$x_3\in(n,\dfrac{1}{a^2})$，$f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$，当 $x\in(0,x_1)\cup(x_2,x_3)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_1,x_2)\cup(x_3,+\infty)$时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在$(0,x_1)$和(x_2,x_3)上单调递增，在(x_1,x_2)和$(x_3,+\infty)$上单调递减，从而 $f(x)$恰有三个极值点 x_1,x_2,x_3. ………………………………………………………………………………… 10分

由 $f'(\dfrac{1}{x})+f'(x)=0$，$f'(x_1)+f'(x_3)=0$，得 $x_1x_3=1$，所以 $x_1x_2x_3=x_1x_3=1$. …… 12分