人大附中 2019~2020 学年度高三 4 月质量检测试题

数　学

2020 年 4 月 13 日

说明：本试卷共三道大题、22 道小题，共 4 页，满分 150 分。考试时间 120 分钟。考生务必按要求将答案答在答题纸上，在试题纸上作答无效。

第一部分　（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．在每道小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的，请将答案涂在机读卡上的相应位置上。）

（1）集合 $A=\{x\,|\,x>2,x\in R\}$， $B=\{x\,|\,x^2-2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(3,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(2,3)$

（2）已知复数$z=a^2i-2a-i$是正实数，则实数a的值为

A.0　　B. 1　　C. -1　　D.±1

（3）下列函数中，值域为 R 且为奇函数的是（　　）

A. $y=x+2$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=x-x^3$　　D. $y=2^x$

（4）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$a_3=2,a_1+a_4=5$，则$S_6=$（　　）

A.10　　B.9　　C.8　　D.7

（5）在平面直角坐标系xOy中，将点$A(1,2)$绕原点O逆时针旋转$90°$到点B，设直线OB与x轴正半轴所成的最小正角为α，则$cos\alpha$等于

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{2}{5}$

（6）设a,b,c为非零实数，且$a>c,b>c$，则（　　）

A. $a+b>c$　　B. $ab>c^2$　　C. $\frac{a+b}{2}>c$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{c}$

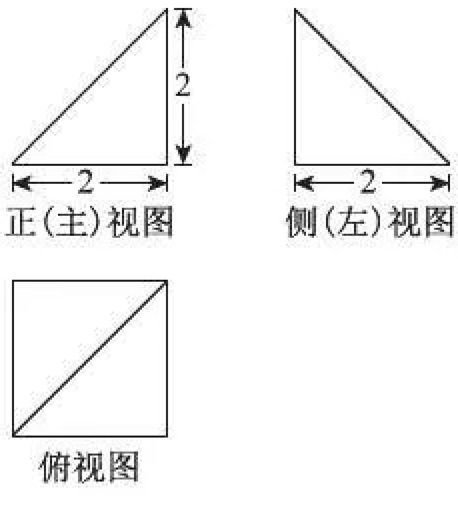
（7）某四棱锥的三视图如图所示，记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合，则

A. $2\sqrt{2}\notin S$，且$2\sqrt{3}\notin S$

B. $2\sqrt{2}\notin S$，且$2\sqrt{3}\in S$

C. $2\sqrt{2}\in S$，且$2\sqrt{3}\notin S$

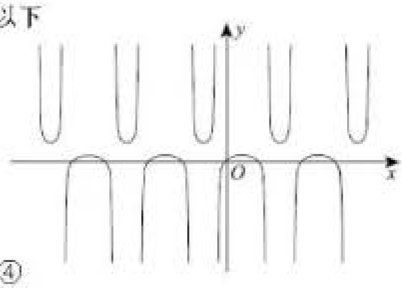
D. $2\sqrt{2}\in S$，且$2\sqrt{3}\in S$



（8）已知点$M(2,0)$，点P在曲线$y^2=4x$上运动，点F为抛物线的焦点，则$\dfrac{|PM|^2}{|PF|-1}$的最小值为

A. $\sqrt{3}$　　　B. $2(\sqrt{5}-1)$　　　C. $4\sqrt{5}$　　　D. 4

（9）已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+2\sin x}$的部分图象如图所示，将此图象分别作以下变换，那么变换后的图象可以与原图象重合的变换方程是（　）



①绕着x轴上一点旋转180°；

②沿x轴正方向平移；

③以x轴的某一条垂线为轴作轴对称.

A.①③　　　B.③④　　　C.②③　　　D.②④

（10）设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+10x+1, x\le 0\\ |\lg x|, x>0\end{cases}$若关于$x$的方程$f(x)=a(a\in R)$有四个实数解$x_i(i=1,2,3,4)$，其中$x_1<x_2<x_3<x_4$，则$(x_1+x_2)(x_3-x_4)$的取值范围是（　）

A. $(0,101]$　　　B. $(0,99]$　　　C. $(0,100]$　　　D. $(0,+\infty)$

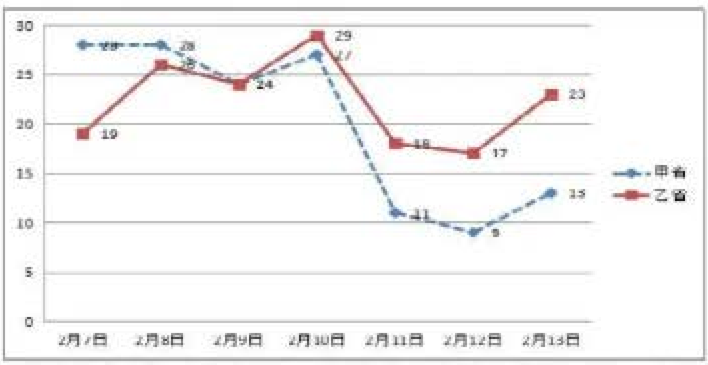
第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）在二项式$(x^2+2)^6$的展开式中，x^8的系数为________。

（12）若向量$\vec{a}=(x^2,2),\vec{b}=(1,x)$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}<3$，则实数$x$的取值范围是__________.

（13）在党中央的正确指导下，通过全国人民的齐心协力，特别是全体一线医护人员的奋力救治，二月份“新冠肺炎”疫情得到了控制。下图是国家卫健委给出的全国疫情通报，甲、乙两个省份从2月7日到2月13日一周的新增“新冠肺炎”确诊人数的折线图如下：



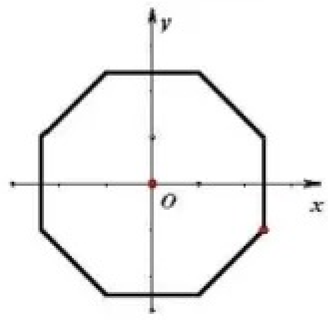
根据图中甲、乙两省的数字特征进行比对，通过比较把你得到最重要的两个结论写在答案纸指定的空白处。

①____。

②____。

（14）函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为__________；若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递增，则 α 的最大值为__________.

（15）集合 $A=\{(x,y)\big||x|+|y|=a,a>0\}, B=\{(x,y)\big||xy|+1=|x|+|y|\}$，若 $A\bigcap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，则下列说法正确的为 ____________________



① a 的值可以为 2；

② a 的值可以为 $\sqrt{2}$；

③ a 的值可以为 $2+\sqrt{2}$；

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

16.（本小题满分为 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 满足下列 3 个条件中的 2 个条件：

①函数 $f(x)$ 的周期为 π；

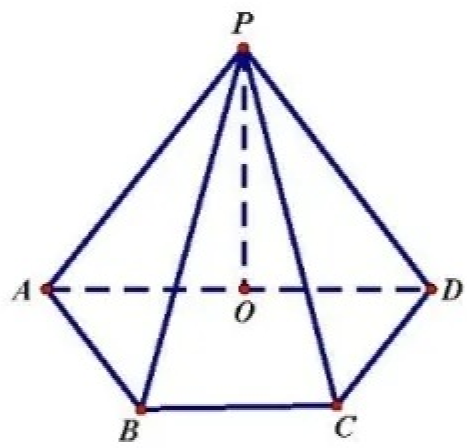
② $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴；

③ $f(\frac{\pi}{4})=0$ 且在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 上单调。

（I）请指出这二个条件，并求出函数 $f(x)$ 的解析式；

（II）若 $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$，求函数 $f(x)$ 的值域。

17.（本题满分 15 分）



在四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中，$BC//AD, CD\perp AD$，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，O 是 AD 的中点，且 $PO=AD=2BC=2CD=2$

（I）求证：$AB//$ 平面 POC；

（II）求二面角 $O-PC-D$ 的余弦值；

（III）线段 PC 上是否存在点 E，使得 $AB\perp DE$，若存在指出点 E 的位置，若不存在请说明理由。

18.（本题满分 14 分）

2019 年底，北京 2022 年冬奥组委会启动志愿者全球招募，仅一个月内报名人数便突破 60 万，其中青年学生约有 50 万人.现从这 50 万青年学生志愿者中，按男女分层抽样随机选取 20 人进行英语水平测试，所得成绩（单位:分）统计结果用茎叶图记录如下：

男		女
6	4	7
3	5	7 9
0 3 8	6	5 6
1 4	7	1 3 5 6 8
5	8	1 8

（I）试估计在这 50 万青年学生志愿者中，英语测试成绩在 80 分以上的女生人数；

（II）从选出的 8 名男生中随机抽取 2 人，记其中测试成绩在 70 分以上的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（III）为便于联络，现将所有的青年学生志愿者随机分成若干组（每组人数不少于 5000），并在每组中随机选取 m 个人作为联络员，要求每组的联络员中至少有 1 人的英语测试成绩在 70 分以上的概率大于 90%.根据图表中数据，以频率作为概率，给出 m 的最小值.（结论不要求证明）

19.（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$，其中$a\in \boldsymbol{R}$

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在点（2，$f(2)$）处切线的倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$，求 a 的值；

（II）已知导函数$f'(x)$在区间（1，e）上存在零点，证明:当 x∈（1，e）时，$f(x)>-e^2$

20.（本小题满分 15 分）

设椭圆$E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，直线l_1经过点 M（m，0），直线l_2经过点 N（n，0），直线l_1∥直线l_2，且直线l_1、l_2分别与椭圆 E 相交于 A，B 两点和 C，D 两点。

（I）若 M，N 分别为椭圆 E 的左、右焦点，且直线$l_1\perp x$轴，求四边形 ABCD 的面积；

（II）若直线l_1的斜率存在且不为 0，四边形 ABCD 为平行四边形，求证:m+n=0;

（III）在（II）的条件下，判断四边形 ABCD 能否为矩形，说明理由。

21.（本小题满分 14 分）

对于正整数 n，如果$k(k\in N^*)$个整数 a_1，a_2，…，a_k满足 $1\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_k\le n$，且 $a_1+a_2+\ldots+a_k=n$，则称数组（a_1，a_2，…，a_k）为 n 的一个“正整数分拆”。记 a_1，a_2，…，a_k 均为偶数的“正整数分拆”的个数为 f_n；a_1，a_2，…，a_k均为奇数的“正整数分拆”的个数为 g_n。

（I）写出整数 4 的所有“正整数分拆”；

（II）对于给定的整数 n（n≥4），设（a_1，a_2，…，a_k）是 n 的一个“正整数分拆”，且 a_1=2，求 k 的最大值；

（III）对所有的正整数 n，证明：$fn\le gn$；并求出使得等号成立的 n 的值。

（注:对于 n 的两个“正整数分拆”（a_1，a_2，…，a_k）与（b_1，b_2，…，b_n），当且仅当 k=m 且 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，…，$a_k=b_m$ 时，称这两个“正整数分拆”是相同的.）

人大附中2019~2020 学年度高三4 月质量检测试题

数学参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	C	B	A	C	D	D	D	B

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分）

题号	11	12	13	14		15
答案	60	(-3,1)	甲省比乙省的新增人数的平均数低；甲省比乙省的方差要大等	π	$\frac{1}{8}\pi$	②③

注：①13 题其他合理答案也给分，如：从 2 月 10 日开始两个省的新增人数都在下降；2 月 10 日两个省的新增人数在一周内都达到了最大值；等等。要求至少有一个数据信息能涉及到平均数或方差，并且给出的两个数据信息都是正确，才给满分 5 分；若两个结论都没有涉及到平均数或方差，两个数据信息都正确也要扣 2 分。②14 题第一个空 2 分，第二个空 3 分

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明）

16.解：（Ⅰ）由①可得，$\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$………1 分

由②得：$\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{6},k\in Z$………2 分

由③得，$\begin{cases}\frac{\pi\omega}{4}+\varphi=m\pi\Rightarrow\varphi=m\pi-\frac{\pi\omega}{4},m\in Z\\ \frac{T}{2}\geq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{\omega}\geq\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 0<\omega\leq 3\end{cases}$ ………………4 分

若①②成立，则 $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6},f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ ……………5 分

若①③成立，则 $\varphi=m\pi-\frac{\pi\omega}{4}=m\pi-\frac{\pi}{2},m\in Z$，不合题意…………6 分

若②③成立，则 $k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{6}=m\pi-\frac{\pi\omega}{4}\Rightarrow\omega=12(m-k)-6\geq 6,m,k\in Z$

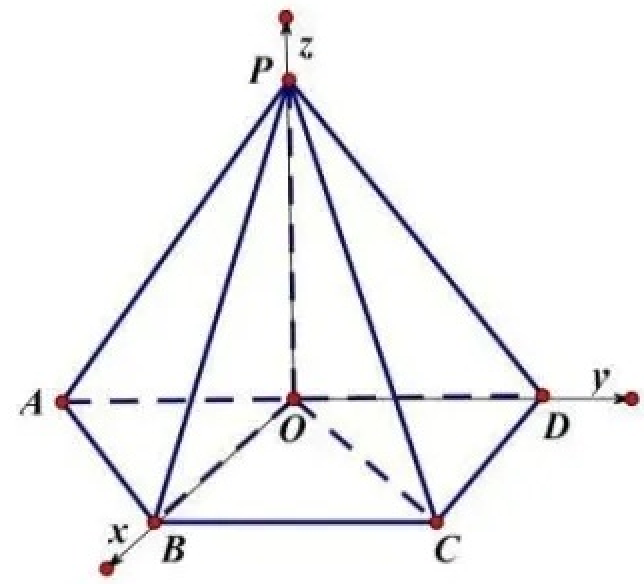
与③中的$0<\omega\le 3$矛盾，所以②③不成立……………………………8 分

所以，只有①②成立，$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ ………………………………9 分

（Ⅱ）由题意得，$0\le x\le\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5\pi}{6}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$……12 分

所以，函数$f(x)$的值域为$[\dfrac{1}{2},1]$………………………………………13 分

17. 解：（Ⅰ）连结OC，$BC=AO, BC//AD$



则四边形$ABCO$为平行四边形………1 分

$\begin{cases} AB//OC \\ AB\not\subset 平面POC \\ OC\subset 平面POC \end{cases}\Rightarrow AB//平面POC$ …4 分

（Ⅱ）$PO\perp 平面ABCD$，

$\begin{cases} CD\perp AD \\ OD=BC=CD \end{cases}\Rightarrow$四边形$OBCD$为正方形

所以，OB,OD,OP两两垂直，建立如图所示坐标系，………………6 分

则$C(1,1,0),P(0,0,2),D(0,1,0),B(1,0,0)$，设平面$PCD$法向量

为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(0,2,1)$，……………………8 分

连结BD，可得$BD\perp OC$，又$BD\perp PO$ 所以，$BD\perp 平面POC$，

平面POC的法向量$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$（其它方法求法向量也可）……10 分

设二面角$O-PC-D$的平面角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\bullet|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$……11 分

（Ⅲ）线段PC上存在点E使得$AB\perp DE$……………………12 分

方法一：设$E(x,y,z),\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}\Rightarrow(x,y,z-2)=\lambda(1,1,-2)\Rightarrow E(\lambda,\lambda,2-2\lambda)$

$\overrightarrow{DE}=(\lambda,\lambda-1,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$AB\perp DE\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}$…14 分

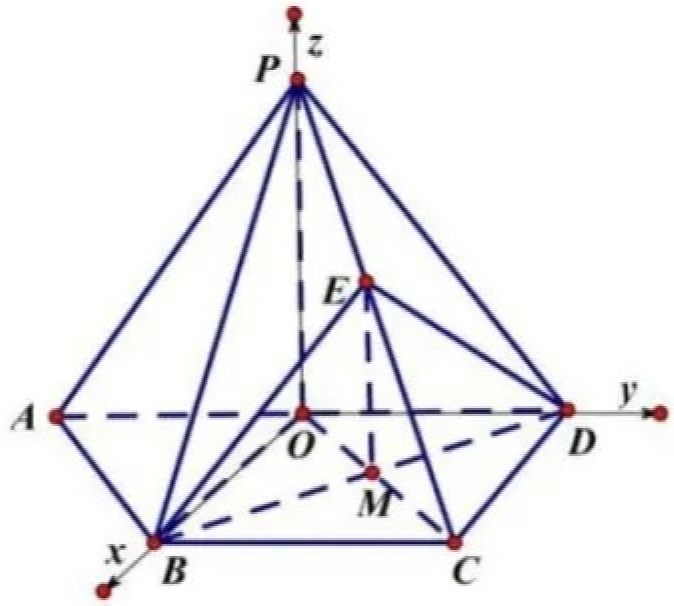
所以，点 E 为线段 PC 的中点……………15 分

方法二：设 E 是线段 PC 的中点，$BD\bigcap OC=M$，

$EM//PO\Rightarrow EM\perp$ 平面$ABCD$

$$\begin{cases}OC\perp BD\\OC\perp EM\end{cases}\Rightarrow OC\perp \text{平面}BED\Rightarrow OC\perp ED$$

$AB//OC$，所以 $AB\perp ED$ …………15 分



18.(本小题满分 14 分)

解：(1) 在茎叶图中，女生一共有 12 人，其中英语成绩在 80 分以上者共有 2 人，所以在这个抽样的 12 人中，英语成绩在 80 分以上者比例为 $\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$。因为 20 人中女生的占比为 $\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$，由此得到 50 万青年志愿者中女生的人数为 $50\times\dfrac{3}{5}=30$ 万，如果以抽取的 20 人中的女生中成绩在 80 分以上的比例作为 30 万女青年志愿者的英语成绩在 80 分以上的比例估计，则有 30 万女青年志愿者中英语成绩在 80 分以上的人数为 $30\times\dfrac{1}{6}=5$ 万人。

(2) 因为从 8 名男生中抽取 2 人，其中英语成绩在 70 分以上者共有 3 人，所以 X 的取值范围为 0，1，2。所以有 $P(X=0)=\dfrac{C_5^2}{C_8^2},P(X=1)\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2},P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_8^2}$。于是可得随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\dfrac{C_5^2}{C_8^2}$	$\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}$	$\dfrac{C_3^2}{C_8^2}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\dfrac{C_5^2}{C_8^2}+1\times\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}+2\times\dfrac{C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{2\times3}{8}=\dfrac{3}{4}$。

(3) m 的最小值为 4

解析：在抽取的 20 人中，英语成绩在 70 分以上者共计 10 人，所以在这 20 人中随机抽取一人，其英语成绩在 70 分以上的概率为 $\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$。在超过 5000 人的青年志愿者中抽取 m 人，其英语成绩在 70 分以上至少一人为事件 A，则 $P(\overline{A})=C_m^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m<0.1=\dfrac{1}{10}$，由此得到 $m>3$，所以 m 的最小值为 4.

19. (本小题满分 14 分)

解（1）$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)$，由题可知 $f'(2)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，

即 $f'(2)=\frac{a}{2}+4-a-2=1$，得 $a=2$。

（2）$\because f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}$

$\because x>0,$ 可设 $h(x)=2x^2-(a+2)x+a=(x-1)(2x-a)$

令 $h(x)=0$ 得 $x=1$或$x=\frac{a}{2}$，

$\because f'(x)$在$(1,e)$上存在零点，$\therefore 1<\frac{a}{2}<e,$即$2<a<2e$

由此可知

x	$(1,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},e)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	减	极小	增

$\therefore f(x)$在$(1,\frac{a}{2})$ 单调递减；$(\frac{a}{2},e)$ 单调递增。

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{a}{2})=a\ln\frac{a}{2}+(\frac{a}{2})^2-(a+2)\frac{a}{2}$

$=a\ln\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}-a$

设 $g(a)=a\ln\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}-a\ (2<a<2e)$

$g'(a)=\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$，$\because 1<\frac{a}{2}<e,\therefore \ln\frac{a}{2}<1,\therefore g'(a)<0$

$\therefore g(a)$在$(2,2e)$ 单调递减，$\therefore g(a)>g(2e)=2e\ln e-\frac{4e^2}{4}-2e=-e^2$

$\therefore$当$x\in(1,e)$时，$f(x)>-e^2$。

20. (本小题满分 15 分)

（I）由题意可得：$|AB|=\sqrt{2},|MN|=2c=2,$

所以$S_{四边形ABCD}=|AB|\times|CD|=2\sqrt{2}$；

（II）由题意可设$l_1: x=ty+m(t\in R)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x=ty+m\\x^2+2y^2=2\end{cases}$得$(t^2+2)y^2+2mty+m^2-2=0$

所以$y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{t^2+2}, y_1\cdot y_2=\dfrac{m^2-2}{t^2+2}$

且$\Delta=4m^2t^2-4(m^2-2)(t^2+2)>0$，即$t^2-m^2+2>0$

$$|AB|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2mt}{t^2+2}\right)^2-4\frac{m^2-2}{t^2+2}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2+2}\cdot\sqrt{t^2-m^2+2}$$

同理可得$|\mathrm{CD}|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t^2+2}\cdot\sqrt{t^2-n^2+2}$

因为四边形 ABCD 为平行四边形，所以$|AB|=|CD|$

即$m^2=n^2$，因为$m\neq n$，所以$m=-n$,即$m+n=0$

（III）不能为矩形。理由如下：

点 0 到直线l_1，直线l_2的距离分别为$\dfrac{|m|}{\sqrt{1+t^2}},\dfrac{|n|}{\sqrt{1+t^2}}$，由（II）知$m=-n$

所以点 0 到直线l_1，直线l_2的距离相等。根据椭圆的对称性，故而原点 0 是平行四边形 ABCD 的对称中心。

假设平行四边形是矩形，则$|OA|=|OB|$，

那么$\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}$，则${x_1}^2+1-\dfrac{{x_1}^2}{2}={x_2}^2+1-\dfrac{{x_2}^2}{2}$

所以$x_1=x_2$。这时直线$l_1\perp x$轴。

这与直线l_1的斜率存在相矛盾。所以假设不成立。

即平行四边形 ABCD 不能为矩形。

21. (本小题满分 14 分)

解:

（1）（4），（1，3），（2，2），（1，1，2），（1，1，1，1）

（2）欲使 k 最大，只须 a_i 最小

当 n 为偶数时 $a_1 = a_2 = ... = a_k = 2, k = \frac{n}{2}$

当 n 为奇数时 $a_1 = a_2 = ... = a_{k-1} = 2, a_k = 3, k = \frac{n-1}{2}$

（3）①当 n 为奇数时，不存在 $a_1, a_2, ..., a_k$ 均为偶数的正整数分拆，即 $f_n = 0$，满足 $f_n \le g_n$

②当 n 为偶数时，设 $(a_1, a_2, ..., a_k)$ 为满足 $a_1, a_2, ..., a_k$ 均为偶数的一个确定的“正整数分拆”则他至少对应了（1，1，……，1）和 $(1,1,...,1, a_1 - 1, a_2 - 1, ..., a_k - 1)$ 这两种各数均为奇数的分拆，所以 $f_n \le g_n$

③当 $n = 2$ 时，a_i 均为偶数的“正整数分拆”只有：(2)

a_i 均为奇数的“正整数分拆”只有：$(1,1)$ $f_2 = g_2$

当 $n = 4$ 时，a_i 均为偶数的“正整数分拆”只有：$(4),(2,2)$

a_i 均为奇数的“正整数分拆”只有：$(1,1,1,1),(1,3)$ $f_4 = g_4$

当 $n \ge 6$ 时，对于每一种 a_i 均为偶数的“正整数分拆”，除了各项不全为 1 的奇数分拆之外至少多出一个各项均为 1 的“正整数分拆” $(1,1,\cdots 1)$，故 $f_n < g_n$，

综上，使得 $f_n \le g_n$ 中等号成立的 n 为 $2, 4$