北京市第一六一中学2022—2023学年第二学期期中阶段测试

高一 数学

2023.4

班级____________姓名____________学号________

本试卷共2页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。

一、选择题：本大题共10道小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置。

1. 向量$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. -2　　D. 4

2. 化简$\sqrt{1-2\sin10°\cos10°}$等于

A. $\sin10°+\cos10°$　　B. $\sin10°-\cos10°$

C. $\cos10°-\sin10°$　　D. $-\sin10°-\cos10°$

3. 在三角形ABC中，三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$c=3$，$a=2$，$\sin A=\frac{1}{3}$，则角$\sin C$的值为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. 函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象

A. 关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称　　B. 关于直线$x=-\frac{\pi}{3}$对称

C. 关于点$(\frac{\pi}{6},0)$对称　　D. 关于点$(\frac{\pi}{3},0)$对称

5. 函数$f(x)=|\sin x|$的一个单调递减区间是

A. $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$　　C. $(\pi,\frac{3\pi}{2})$　　D. $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

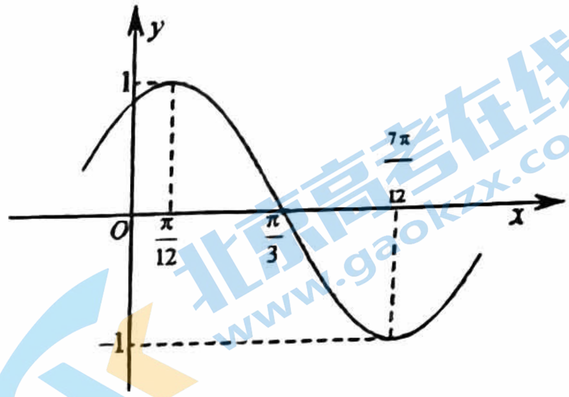
6. 如图，函数$f(x)$的图象是由正弦曲线或余弦曲线经过变换得到的，则$f(x)$的解析式可以是

A. $f(x)=\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$

B. $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

C. $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

D. $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$



7 已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，给出下列四个结论：

① 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π；

② 函数 $f(x)$ 为偶函数

③ 方程 $f(x)=\frac{3}{2}$ 有无穷多个实根；

④ 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后，所得图象与 $g(x)=\sin 2x$ 图象重合.

其中，所有正确结论的序号是

A. ①③　　B. ②③　　C. ②④　　D. ①④

8. 已知函数 $f(x)=\sin 2x, x\in[m,n]$，则"$n-m\geq\frac{\pi}{2}$"是"$f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，P 为正方形所在平面上的动点，且 $|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{2}$，则

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值是

A. 0　　B. 4　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

10. 如果函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x$ 的两个相邻零点间的距离为 2，那么

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$ 的值为

A. 1　　B. -1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

二、填空题：本大题共 6 小题，共 30 分。把答案填在答题纸中相应的横线上。

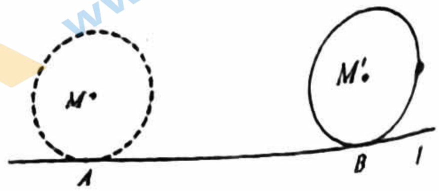
11. 若 $\tan x=1$，$x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 则 $x=$______.

12. 已知$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，且$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，则$\sin2\alpha=$______；$\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=$______.

13. 已知向量$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则$|2\vec{a}+\vec{b}|=$______.

14. 函数$y=-\sin^2x+\sin x+1$的最大值为______.

15. 如图，半径为1的圆M与直线l相切于点A，圆M沿着直线l滚动. 当圆M滚动到圆M'时，此时点A相应运动到点A'，圆M'与直线l相切于点B，线段AB的长度为$\frac{3\pi}{2}$，则点M'到直线BA'的距离为______.



16. 已知矩形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=1$，$\lambda_i\in\{-1,1\},(i=1,2,3,4,5,6)$，则$|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|$的最小值是______，最大值是______.

三、解答题：本大题共6小题，共80分.

17. （本题13分）已知$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

（Ⅰ）求$\dfrac{\cos(\pi+\alpha)\tan(2\pi-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$的值；

（Ⅱ）求$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$的值；

（Ⅲ）求$\cos2\alpha-\sin2\alpha$的值.

18. （本题13分）已知$\overrightarrow{OA}=(-2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(0,4)$，$\overrightarrow{OC}=(x,3)$.

（Ⅰ）求向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$所成角的余弦值；

（Ⅱ）若$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$，求实数$x$的值；

（Ⅲ）若向量$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OC}$方向上的投影的数量为1，求实数x的值.

19. （本题 13 分）已知函数 $f(x)=4\sin(2x+\varphi)\ (-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$，且图象经过点 $(\frac{\pi}{4},2\sqrt{3})$.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 图象的对称中心坐标；

（Ⅲ）若 $x\in[\frac{5\pi}{12},\pi]$，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

20. （本题 13 分）已知函数 $f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{4})$

（Ⅰ）求 $f(-\frac{\pi}{4})$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若对 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 都有解，求实数 a 的取值范围.

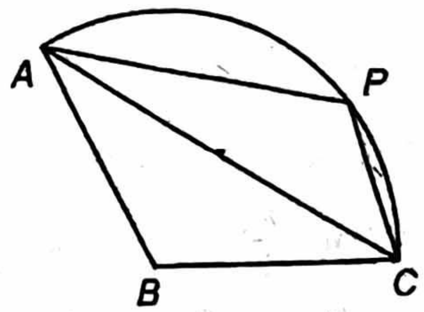
21. （本题 14 分）已知函数 $f(x)=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-2\cos^2(x+\frac{\pi}{6})(a>0)$，且满足______.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式及最小正周期；

（Ⅱ）若关于 x 的方程 $f(x)-1=0$ 在区间 $[0,m]$ 上有两个不同解，求实数 m 的取值范围.

从① $f(x)$ 的最大值为1，　② $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{6},0)$，这两个条件中选择一个，补充在上面问题中并作答.（注：如果两个条件都选分别解答，按第一个解答计分.）

22. （本题 14 分）在 ΔABC 中，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$AB=BC=4$.



（Ⅰ）求 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$ 的值；

（Ⅱ）如图，动点 P 在以 B 为圆心，BC 为半径的劣弧 AC 上运动，求 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最小值.

北京市第一六一中学 2022—2023 学年第二学期期中阶段练习

高一 数学参考答案

2023.4

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	B	D	B	C	B	D	A

二、填空题：本大题共 6 小题，共 30 分。

11. $\frac{5\pi}{4}$ 12. $-\frac{24}{25}$ ，$\frac{7\sqrt{2}}{10}$ 13. $\sqrt{31}$

14. $\frac{5}{4}$ 15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 16. 0；$2\sqrt{17}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分

17. 解：（Ⅰ）因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

所以 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$

$$\frac{\cos(\pi+\alpha)\tan(2\pi-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha(-\tan\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\frac{3}{4}$$

（Ⅱ）$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=7$

（Ⅲ）因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

所以 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$

所以 $\cos2\alpha-\sin2\alpha=2\cos^2\alpha-1-2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{17}{25}$

18. （Ⅰ）$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{-2\times0+1\times4}{\sqrt{5}\times4}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

（Ⅱ）$\overrightarrow{AC}=(x+2,2)$ ， $\overrightarrow{AB}=(2,3)$

为$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

所以$2(x+2)+6=0$

所以$x=-5$

（Ⅲ）向量$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OC}$方向上的投影为$\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}=1$

所以$x=0$或 $x=4$（舍）

19. （Ⅰ）因为图象经过点$(\dfrac{\pi}{4},2\sqrt{3})$

所以$f(\dfrac{\pi}{4})=4\sin(\dfrac{\pi}{2}+\varphi)=2\sqrt{3}$

所以$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 。又$-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0$

所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

（Ⅱ） 所以$f(x)=4\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

所以对称中心：$(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12},0),k\in Z$

（Ⅲ）因为$x\in[\dfrac{5\pi}{12},\pi]$，所以$2x-\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{11\pi}{6}]$

当$x=\dfrac{5\pi}{12}$时， $f(x)$的最大值为$2\sqrt{3}$

当$x=\dfrac{5\pi}{6}$时， $f(x)$的最小值为-4

20. 解：（1）$f(-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$

（Ⅱ）$f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{4})=2\sin x(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4})$

$$=\sqrt{2}\sin x\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{2}$

增区间为 $(k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}),k\in Z$

减区间为 $(k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}),k\in Z$

（Ⅲ）

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 1$

$f(x)\in[-\sqrt{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}]$

因为 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，方程 $f(x)-a=0$ 都有解

即 $f(x)=a$ 有解

所以 a 的取值范围是 $[-\sqrt{2},1-\frac{\sqrt{2}}{2}]$

21. 解：（Ⅰ）因为 $f(x)=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\cos 2(x+\frac{\pi}{6})-1$

$$=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\cos(2x+\frac{\pi}{3})-1$$

$$=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\cos[(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{2}]-1$$

$$=(a+1)\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$$

所以 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$.

因为 $a>0$，所以函数 $f(x)$ 的最大值为 a.

若选①， 则 $a=1$ ，函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$；

若选②，则 $(a+1)\sin(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})-1=1$，从而 $a=1$ ，

函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$

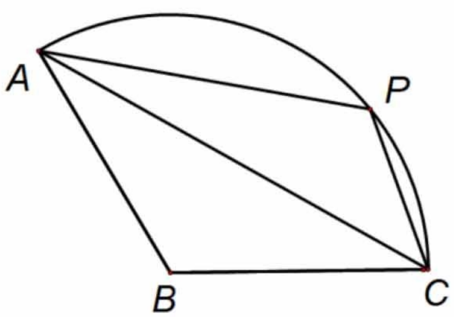
（Ⅱ）由 $f(x)=1$ 得 $sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 在区间 $[0,m]$ 上有两个不同解，

当 $x\in[0,m]$ 时， $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}]$.

所以 $\frac{5\pi}{2}\leqslant 2m-\frac{\pi}{6}<\frac{9\pi}{2}$，

解得 $\frac{4\pi}{3}\leqslant m<\frac{7\pi}{3}$.

22. 解：（Ⅰ）$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=4\times4\times\cos\frac{2\pi}{3}=-8$

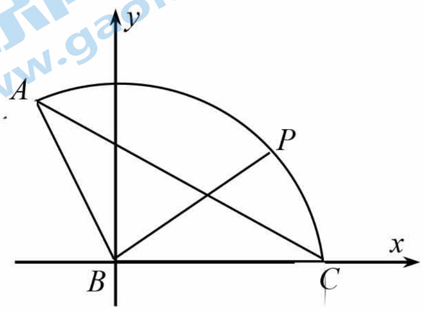


$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$

$$=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$=8+16=24$$

（II）建立如图所示的直角坐标系，则 $B(0,0)$，



$C(4,0)$，因为 $\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AB=4$，根据三角函数定义，$A(-2,2\sqrt{3})$，

点 P 在以 B 为圆心，BC 为半径的劣弧 AC 上运动，可设 $P(4\cos\alpha,4\sin\alpha)$，其中 $\alpha\in[0,\dfrac{2\pi}{3}]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}&=(4\cos\alpha-4,4\sin\alpha)\cdot(4\cos\alpha+2,4\sin\alpha-2\sqrt{3})\\&=16\cos^2\alpha-8\cos\alpha-8+16\sin^2\alpha-8\sqrt{3}\sin\alpha\\&=-8\cos\alpha-8\sqrt{3}\sin\alpha+8\\&=-16\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+8.\end{aligned}$$

因为 $\alpha\in[0,\dfrac{2\pi}{3}]$，所以 $\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$，$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\in[\dfrac{1}{2},1]$，

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}$ 取得最小值 -8，

所以 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最小值为 -8.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。