北京市第十三中学 2023～2024 学年第一学期

高二数学期中测试

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第 1 页至第 2 页；第Ⅱ卷第 2 页至第 4 页，答题纸第 1 页至第 3 页．共 150 分，考试时间 120 分钟.请在答题纸上侧密封线内书写班级、姓名、准考证号．考试结束后，将本试卷的答题纸交回.

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

1.直线 $x-\sqrt{3}y+3=0$ 的倾斜角为（　　）

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）135°

2.已知向量 $\vec{a}=(x,1,-2),\vec{b}=(0,2,1)$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的位置关系是（　　）

（A）垂直　　（B）平行　　（C）异面　　（D）不确定

3.已知直线 l 的一个方向向量为 $\vec{a}=(3,-2)$，则直线 l 的斜率为（　　）

（A）$-\dfrac{3}{2}$　　（B）$-\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　（D）$\dfrac{3}{2}$

4.圆 C_1：$x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2:(x-3)^2+y^2=1$ 的位置关系为（　　）

（A）外离　　（B）外切　　（C）相交　　（D）内切

5.已知直线 $l_1:ax+(a+2)y+1=0$，$l_2:x+ay+2=0$.若 $l_1\perp l_2$，则实数 a 的值是（　　）

（A）0　　（B）2 或 -1　　（C）0 或 -3　　（D）-3

6.已知点 P 是圆 $C:(x-3)^2+y^2=1$ 上一点，则点 P 到直线 $l:3x+4y+6=0$ 的距离的最小 -3

值为（　　）

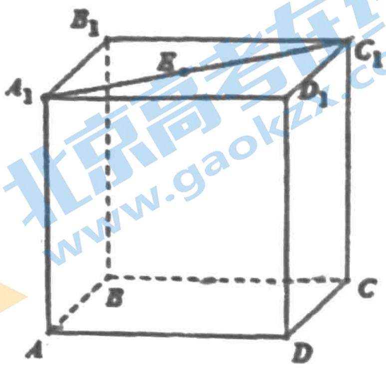
（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

7.已知直线 $x+y-a=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 A,B 两点，且 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$(其中 O 为坐标原点)，则实数 a 等于（　　）

（A）2　　（B）$\sqrt{6}$　　（C）2 或 -2　　（D）$\sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{6}$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是线段 A_1C_1 上任意一点，则 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值不可能是(　　)



(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　(D) 1

9.已知方程 $C: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，对于该方程所表示的曲线给出下列结论，结论正确的是(　　)

(A) 曲线 C 仅有两条对称轴

(B) 曲线 C 经过 5 个整点

(C) 曲线 C 上任意一点到原点距离不小于 $\sqrt{2}$

(D) 曲线 C 围成的封闭图形面积不超过 2

10.已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，若直线 $y=k(x-2)$ 上至少存在三个点 P，使得 ΔMNP 是直角三角形，则实数 k 的取值范围是(　　)

(A) $[-\frac{1}{3},0)\cup(0,\frac{1}{3}]$　(B) $[-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　(C) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$　(D) $[-5,5]$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（本大题共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分.）

11.已知 $M(1,2,-3)$，$N(3,-2,-1)$，则线段 MN 的中点坐标是________.

12.经过点 $M(1,2)$ 且与直线 $2x-y+8=0$ 垂直的直线方程为________.

13.在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 $A(1,2,3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是________.

14.在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，已知点 $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,2), D(0,0,1)$，则直线 AD 与 BC 所成角的大小是________.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

15.已知$A(-2,0)$，$B(2,0)$，以AB为斜边的直角ΔPAB，其顶点P的轨迹方程为________.

16.已知点$A(1,-1)$，点P在圆$C:x^2+y^2+2x=0$上，则$|AP|$的取值范围是__________；

若AP与圆C相切，则$|AP|=$________.

17.已知四棱锥$P-ABCD$的高为1，ΔPAB和ΔPCD均是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，给出下列四个结论：

①四棱锥$P-ABCD$可能为正四棱锥；

②空间中一定存在到P,A,B,C,D五个点距离都相等的点；

③可能有平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

④四棱锥$P-ABCD$的体积的取值范围是$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

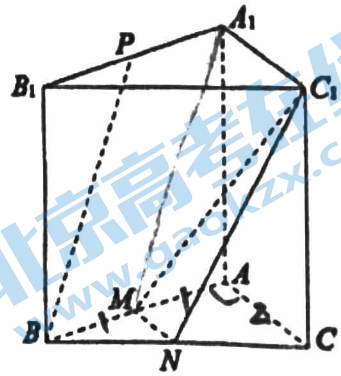
其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题：（本大题共5小题，共75分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

18.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，$AA_1=AB=AC=2$，M,N,P分别为AB,BC,A_1B_1的中点

（Ⅰ）求证：$BP//$平面C_1MN；

（Ⅱ）求二面角C_1-MN-C的余弦值.



19.已知圆C过原点O和点$A(1,3)$，圆心在x轴上.

（Ⅰ）求圆C的方程；

（Ⅱ）直线l经过点$(1,1)$，且l被圆C截得的弦长为6，求直线l的方程.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

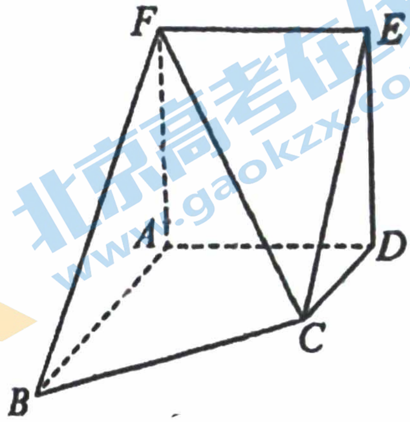
20.如图，四边形 $ABCD$ 为梯形，$AB//CD$，四边形 $ADEF$ 为平行四边形.

（Ⅰ）求证：CE // 平面 ABF；

（Ⅱ）若 $AB\perp$ 平面 $ADEF$，$AF\perp AD$，$AF=AD=CD=1$，$AB=2$，求：

（i）直线 AB 与平面 BCF 所成角的正弦值；

（ii）点 D 到平面 BCF 的距离.

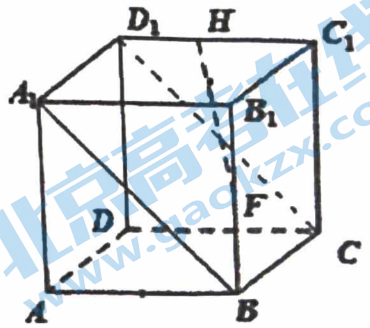


21.如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=1$，$AB=AA_1=2$，H，F 分别是棱 C_1D_1，BB_1 的中点.

（Ⅰ）请判断直线 HF 与平面 A_1BCD_1 的位置关系，并证明你的结论；

（Ⅱ）求直线 HF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在线段 HF 上是否存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$？若存在，求出 $\dfrac{HQ}{HF}$ 的值；若不存在，说明理由.



22.已知圆 $Q:(x-6)^2+y^2=4$，l 为过点 $P(0,2)$ 且斜率为 k 的直线.

（Ⅰ）若 l 与圆 Q 相切，求直线 l 的方程；

（Ⅱ）若 l 与圆 Q 相交于不同的两点 A,B，是否存在常数 k，使得向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 共线？若存在，求 k 的值；若不存在，请说明理由.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

北京市第十三中学 2023～2024 学年第一学期

高二年级数学期中测试答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	A	A	B	B	C	C	C	C	D	B

二、填空题（共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分）

（11）$(2,0,-2)$；　（12）$x+2y-5=0$；　（13）$(1,-2,-3)$；　（14）60°；

（15）$x^2+y^2=4(x\neq\pm2)$；　（16）$[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$，2　（17）①②④

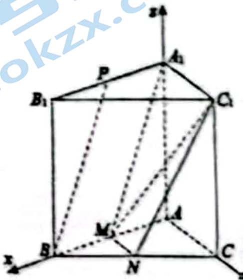
三、解答题（本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

18.（Ⅰ）连接 A_1M，因为 M,N 分别为 AB,BC 的中点，所以 $MN/\!/AC$

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC/\!/A_1C_1$．所以 $MN/\!/A_1C_1$，M,N,C_1,A_1 四点共面．

因为 $AB/\!/A_1B_1$，$AB=A_1B_1$，M,P 分别为 AB,A_1B_1 的中点，所以 $BM/\!/A_1P$，$BM=A_1P$．

所以四边形 BMA_1P 为平行四边形．所以 $BP/\!/MA_1$．因为 $BP\not\subset$ 平面 C_1MN，$MA_1\subset$ 平面 C_1MN，所以 $BP/\!/$ 平面 C_1MN．



（Ⅱ）由题设 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$．因为 $AB\perp AC$，

所以 AB,AC,AA_1 两两垂直．如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$．

所以 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(0,2,0),M(1,0,0),N(1,1,0),B_1(2,0,2),C_1(0,2,2)$．

$\overrightarrow{MN}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{NC_1}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,2,0)$．平面 CMN 的一个法向量是 $\vec{n}=(0,0,1)$

设平面 MNC_1 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{NC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ -x+y+2z=0.\end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=0$，$z=1$．于是 $\vec{m}=(2,0,1)$，设二面角 C_1-MN-C 的平面角为 α，

则 $|\cos\alpha|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，由图可知 α 为锐角，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

19.（Ⅰ）设圆 C 的圆心坐标为 $(a,0)$．依题意，有 $\sqrt{a^2+0^2}=\sqrt{(a-1)^2+3^2}$，解得 $a=5$

从而圆 C 的半径为 $r=\sqrt{a^2+0^2}=5$，所以圆 C 的方程为 $(x-5)^2+y^2=25$．

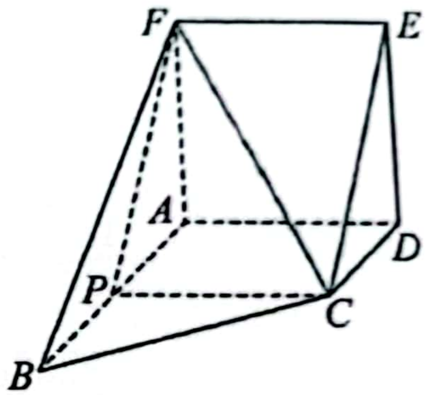
（Ⅱ）依题意，圆 C 的圆心到直线 l 的距离为4

显然直线 $x=1$ 符合题意．

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y-1=k(x-1)$，即 $kx-y-k+1=0$

所以 $\dfrac{|4k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=4$ 解得 $k=\dfrac{15}{8}$，所以直线 l 的方程为 $15x-8y-7=0$

综上，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $15x-8y-7=0$．



20.（Ⅰ）如图,在射线 AB 上取点 P,使 $AP=DC$,连接 PF．

由题设,得 $AP//DC$,所以四边形 $APCD$ 为平行四边形.

所以 $PC//AD$ 且 $PC=AD$．

又四边形 $ADEF$ 为平行四边形,所以 $AD//EF$ 且 $AD=EF$．

所以 $PC//EF$ 且 $PC=EF$.所以四边形 $PCEF$ 为平行四边形,

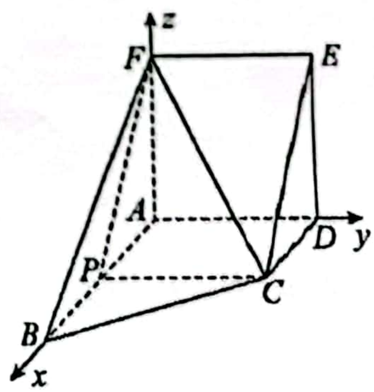
所以 $PF//CE$.因为 $CE\not\subset$ 平面 ABF，$PF\subset$ 平面 ABF，所以 $CE//$ 平面 ABF．

（Ⅱ）(i) 因为 $AB\perp$ 平面 $ADEF$，$AD,AF\subset$ 平面 $ADEF$，

所以 $AB\perp AD,AB\perp AF$.又 $AD\perp AF$，所以 AB，AD，AF 两两相互垂直.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(1,1,0),F(0,0,1)$．

所以 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0),\overrightarrow{BF}=(-2,0,1),\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$．



设平面 BCF 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -2x+z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=1,z=2$.于是 $\vec{m}=(1,1,2)$．

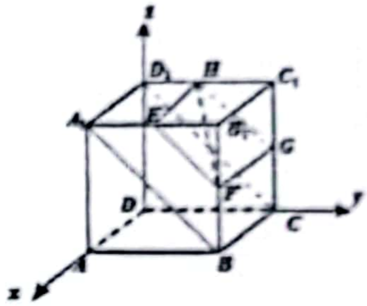
关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

设直线 AB 与平面 BCF 所成角为 α，则 $\sin\alpha=\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{AB}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{m}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以直线 AB 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

（ii）$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$，所以点 D 到平面 BCF 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

21.（Ⅰ）证明：取 A_1B_1,CC_1 的中点 E,G，连接 EF,FG,GH，



因为 E,F,G,H 分别为中点，所以 $EF//A_1B$，$FG//BC$

$EF\cap FG=F$，$EF,FG\subset$ 平面 $EFGH$，$A_1B,BC\subset$ 平面 A_1BCD_1，

所以平面 $EFGH//$ 平面 A_1BCD_1，因为 $EF\subset$ 平面 $EFGH$，所以 $EF//$ 平面 A_1BCD_1

（Ⅱ）因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，所以 $DA\perp DD_1,DD_1\perp DC,DC\perp DA$

如图建系，$\overrightarrow{HF}=(1,1,-1)$，平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，

$\left|\cos\langle\overrightarrow{HF},\vec{m}\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则直线 HF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）线段 HF 上不存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$，

思路一： 由（Ⅰ）知 HF // 平面 A_1BCD_1，点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离即为点 F 到平面 A_1BCD_1 的距离. $\overrightarrow{FB}=(0,0,-1)$，易求得平面 A_1BCD_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,1)$

点 F 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{FB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\neq\sqrt{2}$，

所以线段 HF 上不存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$.

思路二： 假设线段 HF 上存在一点 Q，使得点 Q 到平面 A_1BCD_1 的距离是 $\sqrt{2}$，设 $\dfrac{HQ}{HF}=\lambda$，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

则$Q(\lambda,\lambda+1,2-\lambda)$，且$\overrightarrow{QB}=(1-\lambda,1-\lambda,\lambda-2)$，平面$A_1BCD_1$的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,1)$，

点Q到平面A_1BCD_1的距离为$\dfrac{|\overrightarrow{QB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|1-\lambda+\lambda-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\neq\sqrt{2}$，

所以线段HF上不存在一点Q，使得点Q到平面A_1BCD_1的距离是$\sqrt{2}$。

22.（Ⅰ）圆$Q:(x-6)^2+y^2=4$，所以圆心为$Q(6,0)$

过$P(0,2)$且斜率为k的直线方程为$y=kx+2$，即$kx-y+2=0$

l与圆Q相切，则圆心Q到直线l的距离$d=\dfrac{|6k-0+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|6k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

解得：$k=0$或$k=-\dfrac{3}{4}$，所以，切线$l:y-2=0$或$3x+4y-8=0$

（Ⅱ）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立直线l与圆Q：$\begin{cases}(x-6)^2+y^2=4\\ y=kx+2\end{cases}$得$(1+k^2)x^2+4(k-3)x+36=0$

直线与圆交于两个不同的点A,B等价于$\Delta=16(k-3)^2-4(1+k^2)\cdot 36>0$

解不等式，得$-\dfrac{3}{4}<k<0$，由韦达定理：$x_1+x_2=-\dfrac{4(k-3)}{1+k^2}$，

$y_1+y_2=kx_1+2+kx_2+2=k(x_1+x_2)+4=\dfrac{4(3k+1)}{1+k^2}$

则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(-\dfrac{4(k-3)}{1+k^2},\dfrac{4(3k+1)}{1+k^2})$

而$P(0,2)$，$Q(6,0)$，$\overrightarrow{PQ}=(6,-2)$，

所以$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{PQ}$共线等价于$x_1+x_2=6\lambda,y_1+y_2=-2\lambda$

$\begin{cases}-\dfrac{4(k-3)}{1+k^2}=6\lambda\\ \dfrac{4(3k+1)}{1+k^2}=-2\lambda\end{cases}$，解得$k=-\dfrac{3}{4}$，因为$-\dfrac{3}{4}<k<0$，故没有符合题意的常数$k$.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！