2020 北京丰台高二（上）期中

数　学

一、选择题（(本大题共 10 小题)）

1.直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的倾斜角为(　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2.以下现象是随机事件的是(　)

A. 标准大气压下，水加热到100℃，必会沸腾

B. 长和宽分别为 a，b 的矩形，其面积为$a\times b$

C. 走到十字路口，遇到红灯

D. 三角形内角和为180°

3.从甲乙丙三人中任选两名代表，甲被选中的概率为(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

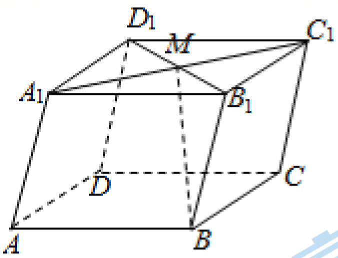
4.已知向量$\vec{a}=(1,2，3)$，$\vec{b}=(-1,0，1)$，则$\vec{a}+2\vec{b}=($　$)$

A. $(-1,2，5)$　　B. $(-1,4，5)$　　C. $(1,2，5)$　　D. $(1,4，5)$

5.已知直线 l 经过点$A(0,4)$，且与直线$2x-y-3=0$垂直，则直线 l 的方程是(　)

A. $x+2y-8=0$　　B. $x+2y+8=0$　　C. $2x-y-4=0$　　D. $2x-y+4=0$

6.如图，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M 为A_1C_1与B_1D_1的交点，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则下列向量中与$\overrightarrow{BM}$相等的向量是(　)



A. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

7.甲、乙两个气象站同时作气象预报，如果甲站、乙站预报的准确率分别为0.8和0.7，那么在一次预报中两站恰有一次准确预报的概率为(　)

A. 0.8　　B. 0.7　　C. 0.56　　D. 0.38

8.若平面α的一个法向量为$\vec{n}=(1,2,1)$，$A(1,0,-1)$，$B(0,-1,1)$，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，则点 A 到平面α的距离为( )

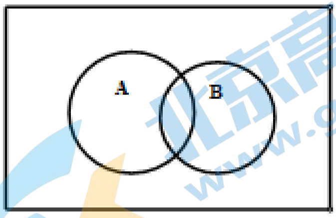
A. 1　　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

9.已知某运动员每次投篮命中的概率都为0.4.现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮中至多两次命中的概率：先由计算器算出 0 到 9 之间取整数值的随机数，指定 1，2，3，4 表示命中，5，6，7，8，9，0 表示不命中；再以每三个随机数为一组，代表三次投篮的结果．经随机模拟产生了 20 组随机数：

907 966 191 925 271 932 812 458 569 683 431 257 393 027 556 488 730 113 537 989.据此估计，该运动员三次投篮中至多两次命中的概率为( )

A. 0.25　　B. 0.35　　C. 0.60　　D. 0.90

10.已知一个古典概型的样本空间Ω和事件 A，B 如图所示．其中$n(\Omega)=12$，$n(A)=6$，$n(B)=4$，$n(A\cup B)=8$，则事件 A 与事件$\bar{B}$( )



A. 是互斥事件，不是独立事件

B. 不是互斥事件，是独立事件

C. 既是互斥事件，也是独立事件

D. 既不是互斥事件，也不是独立事件

二、填空题（(本大题共 6 小题)）

11.经统计，在银行一个营业窗口每天上午 9 点钟排队等候的人数及相应概率如下：

排队人数	0	1	2	3	4	≥ 5
概率	0.1	0.16	0.3	0.3	0.1	0.04

则该营业窗口上午 9 点钟时，至少有 2 人排队的概率是______ .

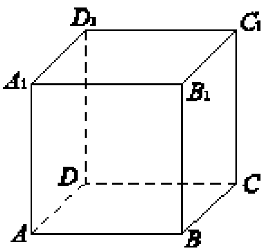
12.已知向量$\vec{a}=(-1,2,1)$，$\vec{b}=(3,x,y)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则$x+y=$______.

13.已知点 B 是点$A(3,4,5)$在坐标平面 Oxy 内的射影，则$|\overrightarrow{OB}|=$______.

14.已知过点$(0,2)$的直线 l 的方向向量为$(1,6)$，点$A(a,b)$在直线 l 上，则满足条件的一组 a，b 的值依次为______.

15.若直线 l 经过点$P(2,3)$且在两坐标轴上的截距相等，则直线 l 的方程为______ .

16.在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB=2$，$BC=1$，点 P 在侧面AA_1BB_1上，若点 P 到直线AA_1和 CD 的距离相等，则A_1P的最小值为______.



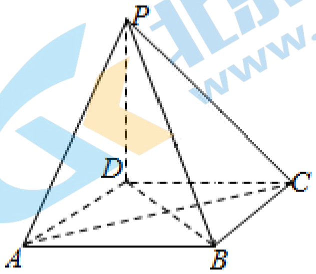
三、解答题（(本大题共 4 小题)）

17.从两名男生(记为B_1和B_2)和两名女生(记为G_1和G_2)这四人中依次选取两名学生.

(I)请分别写出有放回简单随机抽样、不放回简单随机抽样的样本空间；

(II)求利用有放回简单随机抽样选到一名男生和一名女生的概率.

18.如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱$PD\perp$底面 $ABCD$，$PD=DC=2$.



(I)求证：$PD\perp AC$；

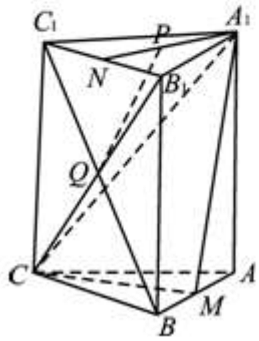
(II)求平面 PBC 与平面 PBD 的夹角.

19.甲、乙两人组成“明日之星队”参加“疫情防控与生命健康”趣味知识竞赛．每轮竞赛由甲、乙各答一道题目，已知甲每轮答对的概率为$\frac{3}{4}$，乙每轮答对的概率为$\frac{4}{5}$.在每轮答题中，甲和乙答对与否互不影响，各轮结果也互不影响.

(I)求甲在两轮答题中，答对一道题目的概率；

(II)求“明日之星队”在两轮答题中，答对三道题目的概率.

20.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=2$，$AA_1=3$.M是AB的中点，N是B_1C_1的中点，点P在线段A_1N上，且$\overrightarrow{A_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1N}$，$Q$是$BC_1$与$B_1C$的交点.



(I)求证：$PQ//$平面A_1CM；

(II)在线段AA_1上是否存在点S，使得直线CS与平面A_1CM所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{14}$？请说明理由.

2020 北京丰台高二（上）期中数学

参考答案

1.【答案】B

【解析】解：直线$\sqrt{3}x-y+1=0$即$y=\sqrt{3}x+1$，故直线的斜率等于$\sqrt{3}$，设直线的倾斜角等于α，

则$0\le\alpha<\pi$，且$tan\alpha=\sqrt{3}$，故$\alpha=60°$，

故选：B.

把直线的方程化为斜截式，求出斜率，根据斜率和倾斜角的关系，倾斜角的范围，求出倾斜角的大小.

本题考查直线的倾斜角和斜率的关系，以及倾斜角的取值范围，已知三角函数值求角的大小．求出直线的斜率是解题的关键.

2.【答案】C

【解析】解：在 A 中，标准大气压下，水加热到100℃，必会沸腾是必然事件，故 A 错误；

在 B 中，长和宽分别为 a，b 的矩形，其面积为$a\times b$是必然事件，故 B 错误；

在 C 中，走到十字路口，遇到红灯是随机事件，故 C 正确；

在 D 中，三角形内角和为$180°$是必然事件，故 D 正确.

故选：C.

利用必然事件、随机事件的定义直接求解.

本题考查命题真假的判断，考查必然事件、随机事件的定义等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

3.【答案】C

【解析】解：从 3 个人中选出 2 个人当代表，则所有的选法共有 3 种，即：甲乙、甲丙、乙丙，

其中含有甲的选法有两种，故甲被选中的概率是$\frac{2}{3}$，

故选：C.

从 3 个人中选出 2 个人，则每个人被选中的概率都是$\frac{2}{3}$.

本题考查等可能事件的概率的求法，得到所有的选法共有 3 种，其中含有甲的选法有两种，是解题的关键.

4.【答案】A

【解析】解：向量$\vec{a}=(1,2，3)$，$\vec{b}=(-1,0，1)$，则$\vec{a}+2\vec{b}=(1,2，3)+2(-1，0，1)=(-1，2，5)$.

故选：A.

直接利用空间向量的坐标运算法则求解即可.

本题考查空间向量的坐标运算，是基础题.

5.【答案】A

【解析】解：∵直线 l 与直线$2x-y-3=0$垂直，

∴直线 l 的斜率为$-\frac{1}{2}$，

则$y-4=-\frac{1}{2}x$，

即$x+2y-8=0$.

故选：A.

由题意可求出直线 l 的斜率，由点斜式写出直线方程化简即可.

本题考查了直线方程的求法，属于基础题.

6.【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了空间向量的加法，三角形法则，属较易题.

利用空间向量的三角形法则，结合平行六面体的性质分析解答.

【解答】

解：由题意，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1M}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

故选 A.

7.【答案】D

【解析】解：甲、乙两个气象站同时作气象预报，

甲站、乙站预报的准确率分别为0.8和0.7，

则在一次预报中两站恰有一次准确预报的概率为：

$P=0.8\times(1-0.7)+(1-0.8)\times0.7=0.38$.

故选：D.

利用相互独立事件概率乘法公式和互斥事件概率加法公式能求出在一次预报中两站恰有一次准确预报的概率.

本题考查概率的求法，考查相互独立事件概率乘法公式和互斥事件概率加法公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

8.【答案】B

【解析】解：$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,2)$故点 A 到平面α的距离为$\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

故选：B.

直接由点面距离的向量公式就可求出.

本题考查了利用空间向量解立体几何的基本公式，属于基础题.

9.【答案】D

【解析】解：由题意知模拟三次投篮的结果，经随机模拟产生了如下 20 组随机数，

在 20 组随机数中表示三次投篮有三次全命中的有：431 113 共 2 组随机数，

则运动员三次投篮中至多两次命中的概率为$1-\frac{2}{20}=0.9$，

故选：D.

由题意知模拟三次投篮的结果，经随机模拟产生了如下 20 组随机数，在 20 组随机数中表示三次投篮有三次全命中的有：431 113 共 2 组随机数，根据概率公式，得到结果.

本题考查模拟方法估计概率，是一个基础题，解这种题目的主要依据是等可能事件的概率，注意列举法在本题的应用.

10.【答案】D

【解析】解：∵一个古典概型的样本空间Ω和事件A，B如图所示．

其中$n(\Omega)=12$，$n(A)=6$，$n(B)=4$，$n(A\cup B)=8$，

$\therefore A\cap B\neq\varnothing$，且$A\cap\overline{B}\neq\varnothing$，

∴事件A与事件$\overline{B}$既不是互斥事件，也不是独立事件．

故选：D．

推导出$A\cap B\neq\varnothing$，且$A\cap\overline{B}\neq\varnothing$，由此得到事件$A$与事件$\overline{B}$既不是互斥事件，也不是独立事件．

本题考查事件A与事件$\overline{B}$的关系的判断，考查集合的交集、并集、韦恩图的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

11.【答案】0.74

【解析】解：由表格可得至少有2人排队的概率

$P=0.3+0.3+0.1+0.04=0.74$

故答案为：0.74

由互斥事件的概率公式可得．

本题考查互斥事件的概率公式，属基础题．

12.【答案】-9

【解析】解：因为向量$\vec{a}=(-1,2,1)$，$\vec{b}=(3,x,y)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，

所以：$\frac{-1}{3}=\frac{2}{x}=\frac{1}{y}$，解得$x=-6$，$y=-3$．

故$x+y=-9$．

故答案为：-9．

根据向量共线的充要条件，即可列出关于x，y的方程，问题可解．

本题考查空间向量共线的充要条件以及学生的运算能力，属于基础题．

13.【答案】5

【解析】解：∵点B是点$A(3,4,5)$在坐标平面Oxy内的射影，

$\therefore B(3,4,0)$，

则$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^3+4^2+0^2}=5$.

故答案为：5.

先求出$B(3,4，0)$，由此能求出$|\overrightarrow{OB}|$.

本题考查点到原点的距离的求法，考查射影、空间中两点间距离公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

14.【答案】1，8

【解析】解：∵过点$(0,2)$的直线l的方向向量为$(1,6)$，

故直线l的斜率为6，方程为$y-2=6(x-0)$，即$y=6x+2$.

∵点$A(a,b)$在直线l上，$\therefore b=6a+2$，

则满足条件的一组a，b的值依次为1，8.

由题意根据查直线的方向向量，求出直线的斜率，用点斜式求直线的方程，把点$A(a,b)$代入直线l的方程，可得一组a，b的值.

本题主要考查直线的方向向量，用点斜式求直线的方程，属于基础题.

15.【答案】$y=\frac{3}{2}x$或$x+y-5=0$

【解析】解：当直线l经过原点时，直线l的方程为$y=\frac{3}{2}x$.

当直线l不经过原点时，设直线l的方程为$x+y=a$，把点$P(2,3)$代入可得$2+3=a$，

∴直线l的方程为$x+y-5=0$.

综上可得直线l的方程为：$y=\frac{3}{2}x$或$x+y-5=0$.

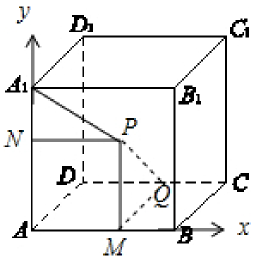
故答案为：$y=\frac{3}{2}x$或$x+y-5=0$.

分类讨论：当直线l经过原点时，直线l的方程直接求出；当直线l不经过原点时，设直线l的方程为$x+y=a$，把点$P(2,3)$代入即可得出.

本题考查了直线的截距式方程、分类讨论的思想方法，属于基础题.

16.【答案】$\sqrt{3}$

【解析】解：过P分别作AB，AA_1的垂线，垂足分别为M，N，过M作$MQ\perp CD$于Q，连接PQ，A_1P，



$\because PM \perp AB$，平面$ABB_1A_1 \perp$平面 $ABCD$，平面$ABB_1A_1 \cap$平面$ABCD = AB$，$PM \subset$平面ABB_1A_1，

$\therefore PM \perp$平面 $ABCD$，$\therefore PM \perp CD$，

又$CD \perp MQ$，$PM \cap MQ = M$，

$\therefore CD \perp$平面 PMQ，$\therefore PQ \perp CQ$，

在平面ABB_1A_1上，以 AB，AA_1为坐标轴建立平面直角坐标系$A - xy$，

设$P(x,y)(0 \le x \le 2,0 \le y \le 2)$，则$PN = x$，$PM = y$，$\therefore PQ = \sqrt{PM^2 + MQ^2} = \sqrt{y^2 + 1}$，

若点 P 到直线AA_1和 CD 的距离相等，则$x = \sqrt{y^2 + 1}$，即$x^2 = y^2 + 1$，

$\therefore A_1P = \sqrt{A_1N^2 + PN^2} = \sqrt{x^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{2y^2 - 4y + 5} = \sqrt{2(y - 1)^2 + 3}$，

$\therefore$当$y = 1$，$x = \sqrt{2}$时，A_1P取得最小值$\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

以 A 为原点，在平面ABB_1A_1上建立平面坐标系，设$P(x,y)$，根据条件列方程得出 x，y 满足的关系，代入距离公式得出A_1P关于y(或x)的函数，根据y(或x)的范围得出最小值.

本题考查了线面垂直的判定，空间距离的计算，属于基础题.

17.【答案】解：(I)从两名男生(记为B_1和B_2)和两名女生(记为G_1和G_2)这四人中依次选取两名学生，

有放回简单随机抽样时，样本空间为：

$\Omega_1 = \{(B_1,B_1)$，(B_1,B_2)，(B_1,G_1)，(B_1,G_2)，(B_2,B_1)，(B_2,B_2)，(B_2,G_1)，(B_2,G_2)，

(G_1,B_1)，(G_1,B_2)，(G_1,G_1)，(G_1,G_2)，(G_2,B_1)，(G_2,B_2)，(G_2,G_1)，$(G_2,G_2)\}$.

不放回简单随机抽样的样本空间为：

$\Omega_2 = \{(B_1,B_2)$，(B_1,G_1)，(B_1,G_2)，(B_2,B_1)，(B_2,G_1)，(B_2,G_2)，

(G_1,B_1)，(G_1,B_2)，(G_1,G_2)，(G_2,B_1)，(G_2,B_2)，$(G_2,G_1)\}$.

(II)利用有放回简单随机抽样，样本空间为：

$\Omega_1=\{(B_1,B_1)$，(B_1,B_2)，(B_1,G_1)，(B_1,G_2)，(B_2,B_1)，(B_2,B_2)，(B_2,G_1)，(B_2,G_2)，

(G_1,B_1)，(G_1,B_2)，(G_1,G_1)，(G_1,G_2)，(G_2,B_1)，(G_2,B_2)，(G_2,G_1)，$(G_2,G_2)\}$.

共包含 16 个基本事件，

其中，选到一名男生和一名女生包含的基本事件有 8 个，分别为：

(B_1,G_1)，(B_1,G_2)，(B_2,G_1)，(B_2,G_2)，(G_1,B_1)，(G_1,B_2)，(G_2,B_1)，(G_2,B_2)，

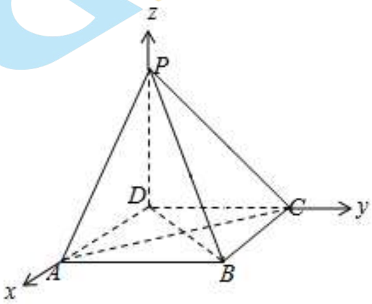
∴选到一名男生和一名女生的概率$P=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

【解析】(I)利用列举法能求出有放回简单随机抽样时，样本空间和不放回简单随机抽样的样本空间.

(II)利用有放回简单随机抽样，利用列举法求出样本空间共包含 16 个基本事件，其中，选到一名男生和一名女生包含的基本事件有 8 个，由此能求出选到一名男生和一名女生的概率.

本题考查样本空间、概率的求法，考查古典概型、列举法等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

18.【答案】证明：(I) ∵侧棱$PD\perp$底面 $ABCD$，且$AC\subset$底面 $ABCD$，



$\therefore PD\perp AC$；

解：(II) ∵侧棱$PD\perp$底面 $ABCD$，$\therefore PD\perp DA$，$PD\perp DC$，

又 $ABCD$ 为正方形，$\therefore DA\perp DC$，可得 DA，DC，DP 两两互相垂直，

以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DP 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，$\because PD=DC=2$，

$\therefore D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，

$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-2,-2,2)$，

设平面 PBD 的一个法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=2x_1+2y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=2z_1=0\end{cases}$，取$y_1=-1$，得$\vec{m}=(1,-1,0)$；

设平面 PBC 的一个法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x_2=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-2x_2-2y_2+2z_2=0\end{cases}$，取$y_2=1$，得$\vec{n}=(0,1,1)$.

$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$，

由图可知，平面 *PBC* 与平面 *PBD* 的夹角为锐角，

∴平面 *PBC* 与平面 *PBD* 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

【解析】(I)直接由直线与平面垂直的性质证明；

(II)由已知可得 *DA*，*DC*，*DP* 两两互相垂直，以 *D* 为坐标原点，分别以 *DA*，*DC*，*DP* 所在直线为 *x*，*y*，*z* 轴建立空间直角坐标系，分别求出平面 *PBD* 与平面 *PBC* 的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值可得平面 *PBC* 与平面 *PBD* 的夹角.

本题考查直线与平面垂直的性质，训练了利用空间向量求解空间角，考查运算求解能力，是中档题.

19.【答案】解：(I)每轮竞赛由甲、乙各答一道题目，已知甲每轮答对的概率为$\frac{3}{4}$，乙每轮答对的概率为$\frac{4}{5}$.

在每轮答题中，甲和乙答对与否互不影响，各轮结果也互不影响.

∴甲在两轮答题中，答对一道题目的概率为：

$P_1=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

(II)“明日之星队”在两轮答题中，答对三道题目的概率为：

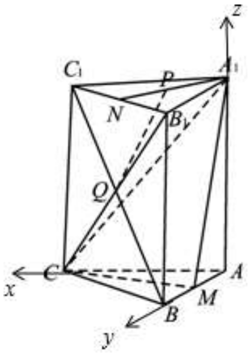
$P_2=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{21}{50}$.

【解析】(I)利用相互独立事件概率乘法公式和互斥事件概率加法公式，能求出甲在两轮答题中，答对一道题目的概率.

(II)利用相互独立事件概率乘法公式和互斥事件概率加法公式，能求出“明日之星队”在两轮答题中，答对三道题目的概率.

本题考查概率的求法，考查相互独立事件概率乘法公式和互斥事件概率加法公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

20.【答案】(I)证明：以 *A* 为原点，以 *AC*，*AB*，AA_1为坐标轴建立空间直角坐标系$A-xyz$，



则$A_1(0,0,3)$，$C(2,0,0)$，$M(0,1,0)$，$N(1,1,3)$，$Q(1,1,\frac{3}{2})$，

$\therefore \overrightarrow{A_1N}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{A_1Q}=(1,1,-\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{CM}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{CA_1}=(-2,0,3)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1N}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},0)$，$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{A_1Q}-\overrightarrow{A_1P}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{3}{2})$，

设平面A_1CM的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CM}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x+3z=0\\ -2x+y=0\end{cases}$，

令$z=2$可得$\vec{n}=(3,6,2)$，

$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}-2\times\frac{3}{2}=0$，$\therefore \overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}$，

又$PQ\not\subset$平面A_1CM，

$\therefore PQ//$平面A_1CM.

(II)假设线段AA_1存在点S，使得直线CS与平面A_1CM所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{14}$，

不妨设$AS=h(0\leq h\leq 3)$，则$S(0,0,h)$，$\therefore \overrightarrow{CS}=(-2,0,h)$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{CS},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{CS}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CS}||\vec{n}|}=\frac{-6+2h}{\sqrt{4+h^2}\times 7}$，

$\therefore \frac{6-2h}{7\sqrt{4+h^2}}=\frac{\sqrt{2}}{14}$，解得$h=2$，

$\therefore S$为线段AA_1靠近A_1的三等分点时，直线CS与平面A_1CM所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{14}$.

【解析】(I)建立空间坐标系，求出平面A_1CM的法向量$\vec{n}$，证明$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}$即可得出$PQ//$平面$A_1CM$；

(II)假设存在符合条件的点S，设$AS=h$，令$|\cos<\overrightarrow{CS},\vec{n}>|=\frac{\sqrt{2}}{14}$，根据方程解的情况作出判断.

本题考查了线面平行的判定，考查空间向量在线面位置关系的证明和线面角计算中的应用，属于中档题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。