2020 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（一）

四川 · 成都

考试时间：2020 年 8 月 24 日 8:00 — 9:20

一、填空题（本大题共 8 道小题，每小题 8 分）

1. 已知方程 $4x|x|-ax+1=0$ 恰有三个解，则 a 的取值范围是________.

解：显然 $0\notin S$，由 $4x|x|-ax=1 \Leftrightarrow a=\dfrac{4x|x|+1}{x}=\begin{cases}4x+\dfrac{1}{x},x>0\\ \dfrac{1}{x}-4x,x<0\end{cases}$，由数形结合得 $a>4$.

2. 函数 $y=\dfrac{1}{3}\cos 2x+\sin x-\cos x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 的最大值为_______.

解：由题 $y'=-\dfrac{2}{3}\sin 2x+\sin x+\cos x$，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\in[-1,\sqrt{2}]$

则 $y'=-\dfrac{2}{3}(t^2-1)+t$，令 $y'=0$ 得 $t=-\dfrac{1}{2}$；令 $y'<0$ 得 $-1\le t<-\dfrac{1}{2}$，$x\in[-\dfrac{\pi}{2},x_0)$；

令 $y'>0$ 得 $-\dfrac{1}{2}<t<\sqrt{2}$，则 $x\in(x_0,\dfrac{\pi}{2}]$，其中 $x_0=-arc\sin\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $x=x_0$ 当时 y 取得最小值. 由 $(\cos x_0-\sin x_0)^2+(\cos x_0+\sin x_0)^2=2$ 得 $\cos x_0-\sin x_0=$

所以 $y_{\min}=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}=-\dfrac{7\sqrt{7}}{12}$，最大值为 $\dfrac{2}{3}$，当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时取到.

所以值域为 $[-\dfrac{7\sqrt{7}}{12},\dfrac{2}{3}]$.

3. 在梯形 $ABCD$ 中，$BC//AD$，$AB=AD$，$\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle BCD=\dfrac{\pi}{2}$，将 ΔABD 沿 BD 翻折，A 在面 BCD 上的投影为点 P，已知 AB 与 CD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，则 BP 与 CD 所成角的余弦值为__▲__.

解：设 AB 与平面 BCD 所成角为 θ，BP 与 BD 所成角为 α，则由三余弦定理 $\cos 60°=\cos\theta\cos\alpha$

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\cos\theta\cos(30°+\alpha)$，解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，所以 BP 与 CD 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，其余弦为 $\dfrac{1}{2}$.

4. 设 H 为 ΔABC 的垂心，O 为 ΔABC 的外心，若 $|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|=2$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=$________.

解：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$，则 $|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OH}|=2|\overrightarrow{OH}|=2$，

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OH}|=1$

5. 定义运算 $a*b=a\times b-5\times[\frac{a\times b}{5}]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，双射 $f:A\to A$ 满足，$f(a*b)=f(a)*f(b)$，则满足条件的 f 共有______个.

解：$a*b$ 表示 mod 5 的余数.容易知道令 $a=0$，$b=2$ 可得 $f(0)=0$.考虑到 f 为双射，

可得 $f(1*2)=f(2)=f(1)*f(2)$ ，$f(1*3)=f(3)=f(1)*f(3)$，
从而 $f(1)f(2)\equiv f(2)(\bmod 5)$ 因为 $f(2)\neq 0$，所以 $f(1)=1$，同样可得 $f(4)=4$

而以 $f(2)=3,f(3)=2$ 和 $f(2)=2,f(3)=3$ 均符合题意．故只有 2 个 f 满足要求.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_{n-1}=a_n+a_{n-2}(n\geq 3)$，已知 $S_{2018}=2017,S_{2019}=2018$，则 $S_{2020}=$________.

解：因为 $a_{n-1}=a_n+a_{n-2}(n\geq 3)$，所以 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-3}-a_{n-2}=-a_{n-3}=-(-a_{n-6})=a_{n-6}$

故数列 $\{a_n\}$ 是周期数列，其周期为6.

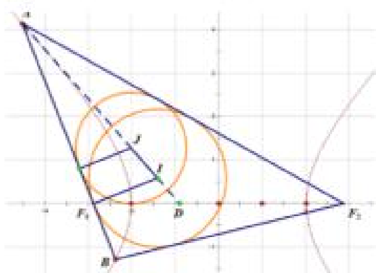
所以 $S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1=(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_2-a_1)+a_2+a_1=a_{n-1}+a_2$

因此 $S_{2018}=a_{2017}+a_2=a_1+a_2=2017;S_{2019}=a_{2018}+a_2=a_2+a_2=2018$

由以上两式得 $a_1=1008,a_2=1009$，所以 $S_{2020}=a_{2019}+a_2=a_3+a_2=a_2-a_1+a_2=1010$

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左右焦点为 F_1、F_2，过 F_1 的直线与左支交于 A、B 两点，且 $\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{1}{2}$，则 $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的内切圆面积比为________.

解：依题意 $|AF_1|=6$，$|AF_2|=12$，由 $|AF_2|=12=3-\frac{5}{3}x_A$



得 $A\left(-\frac{27}{5},\frac{8\sqrt{14}}{5}\right)$，又 $D\left(-\frac{5}{3},0\right)$，

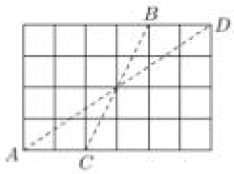
故 AD 直线方程为 $x=-\frac{\sqrt{14}}{6}y-\frac{5}{3}$，

由性质可知 $J\left(-3,\frac{8\sqrt{14}}{14}\right)$，则 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径 $r_1=\frac{8\sqrt{14}}{14}$，

设 $\angle F_1AF_2$ 为 θ，$\cos\theta=\frac{6^2+12^2-10^2}{2\times 6\times 12}=\frac{5}{9}$，$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2}{7}}$.

则$\triangle ABF_2$的内切圆半径$r_2=|AF_1|\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$，所求比值为$\dfrac{4}{9}$

8. 如图，甲乙两人同时出发，甲从 A 到 B，乙从 C 到 D，且两人每次都只能向上或者向右走一格，则甲、乙的行走路线没有公共点的概率是__________.



解：甲从 A 到 B，需要向右走 4 步，向上走 4 步，共需 8 步，所以从 A 到 B 共有C_8^4种走法，

乙从 C 到 D，需要向右走 4 步，向上走 4 步，共需 8 步，所以从 A 到 B 共有C_8^4种走法，

根据分步乘法计数原理可知，共有不同路径$C_8^4\cdot C_8^4=70\times70=4900$种情形，

甲从 A 到 D，需要向右走 6 步，向上走 4 步，共需 10 步，所以从 A 到 D 共有C_{10}^4种走法，

乙从 C 到 B，需要向右走 2 步，向上走 4 步，共需 6 步，所以从 C 到 B 共有C_6^2种走法，

所以相交共有$C_{10}^4\cdot C_6^2=210\times15=3150$种相交情形，因此所求概率为$\dfrac{4990-3150}{4900}=\dfrac{5}{14}$

二、解答题（本大题共 3 道小题，第 9 题 16 分，第 10 题 20 分，第 11 题 20 分）

9. 已知实数a,b,c满足$a+b+c=5,ab+bc+ca=7$，求abc的最大值.

解：因为$b(a+c)+ca=7$，$b(5-b)+ca=7$，$ca=b^2-5b+7\le(\dfrac{a+c}{2})^2=(\dfrac{5-b}{2})^2$，

所以$\dfrac{1}{3}\le b\le3$. 所以$abc=b(b^2-5b+7)=b^3-5b^2+7b=(b-1)^2(b-3)+3\le3$.

当$b=3$时，$abc=3$，此时$\begin{cases}a=1\\c=1\end{cases}$符合题意；当$b=1$时，$abc=3$，此时$\begin{cases}a=3\\c=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\c=3\end{cases}$符合题意.

所以abc的最大值是 3.

10. 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,(n+1)a_n^2-2na_{n+1}^2+\sqrt{n^2+n}a_na_{n+1}=0$，复数$z_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\dfrac{i}{a_k})$，其中 i 为虚数单位，求$|z_{2019}-z_{2020}|$的值.

解：因为$a_1=1,(n+1)a_n^2-2na_{n+1}^2+\sqrt{n^2+na_na_{n+1}}=0$，等式两边同除$n(n+1)$得

$$\frac{a_n^{\ 2}}{n}-\frac{2a_{n+1}^2}{n+1}+\frac{a_{n+1}a_n}{\sqrt{n(n+1)}}=0\text{，即}\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}+\frac{2a_n}{\sqrt{n}}\right)=0$$

因为$\{a_n\}$为正项数列，所以$\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\frac{a_n}{\sqrt{n}}$，又因为$a_1=1$，所以$a_n=\sqrt{n}$.

所以$z_k=\prod\limits_{n=1}^{k}(1-\frac{\mathrm{i}}{a_n})=\prod\limits_{n=1}^{k}(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}})$

所以$z_{2020}=\prod\limits_{n=1}^{2020}(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}})=\prod\limits_{n=1}^{2019}(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}})(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2020}})=(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2020}})z_{2019}$

所以$z_{2020}-z_{2019}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2020}}z_{2019}$，及$|z_{2020}-z_{2019}|=\frac{1}{\sqrt{2020}}|z_{2019}|$

又因为$|z_{2019}|=|\prod\limits_{n=1}^{2019}(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}})|=\prod\limits_{n=1}^{2019}|(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}})|=\prod\limits_{n=1}^{2019}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\sqrt{2020}$

所以$|z_{2020}-z_{2019}|=\frac{1}{\sqrt{2020}}|z_{2019}|=1$.

11． 在平面直角坐标系xOy中，$Rt\Delta ABC$的三个顶点都在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，其中$A(0,b)$为直角顶点.

（1）若$b=1$，该三角形的面积的最大值为$\frac{27}{8}$，求实数a的值.

（2）求该三角形的面积的最大值.

11 题

为直角顶点.

（1）若$b=1$，该三角形的面积的最大值为$\frac{27}{8}$，求实数a的值.

（2）求该三角形的面积的最大值.

解：令直线AB方程为$y=kx+1$，则直线AC的方程为$y=-\frac{1}{k}x+1$，

代入椭圆方程，得$(1+a^2k^2)x^2+2a^2kx=0$，解得$x=0$或$x=\frac{-2a^2k}{1+a^2k^2}$，得$A(0，1)$，

$B\left(\frac{-2a^2k}{1+a^2k^2},\frac{1-a^2k^2}{1+a^2k^2}\right)$，因此$AB=\sqrt{1+k^2}\frac{|2a^2k|}{1+a^2k^2}$，同理$AC=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\frac{\left|\frac{2a^2}{k}\right|}{1+\frac{a^2}{k^2}}$，

$$\therefore S=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\frac{|2a^2k|}{1+a^2k^2}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\frac{\left|\frac{2a^2}{k}\right|}{1+\frac{a^2}{k^2}}=\frac{2a^4\left|k+\frac{1}{k}\right|}{1+a^4+a^2(k^2+\frac{1}{k^2})}\leqslant\frac{a^4}{a(a^2-1)}=\frac{27}{8},$$

$a=3$或$\frac{3+\sqrt{297}}{16}$（舍去，不符合等号成立条件），故$a=3$.

(2)设B为(x_1,y_1)，C为(x_2,y_2)，直线AB和AC斜率分别为k_1,k_2，直线BC为$y=kx+t$，联立椭圆方程得$(b^2+a^2k^2)x^2+2kta^2x+a^2t^2-a^2b^2=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{-2kta^2}{b^2+a^2k^2}, x_1x_2=\dfrac{a^2t^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$，$k_1k_2=\dfrac{(kx_1+t-b)(kx_2+t-b)}{x_1x_2}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{t-b}{t+b}$，

若 $k_1k_2=-1$，$\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{t-b}{t+b}=-1$，$t=-b\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 为定值.

而 $S=\dfrac{1}{2}|t-b||x_1-x_2|=\dfrac{2a^3b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\dfrac{b^2+a^2k^2-t^2}{(b^2+a^2k^2)^2}}$

令 $u=b^2+a^2k^2, u\geqslant b^2>t^2$，则需求 $\sqrt{\dfrac{u-t^2}{u^2}}$ 的最大值，即求 $\dfrac{u^2}{u-t^2}$ 最小值.

$\dfrac{u^2}{u-t^2}=2t^2+u-t^2+\dfrac{t^4}{u-t^2}\geqslant 4t^2$（当且仅当 $u=2t^2$ 时取等号，要求 $b^2\leqslant 2t^2$，即 $a\geqslant(\sqrt{2}+1)b$），

此时 $S=\dfrac{2a^3b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\dfrac{u-t^2}{u^2}}\leqslant\dfrac{2a^3b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{-2t}=\dfrac{a^3b}{a^2-b^2}=\dfrac{ab}{e^2}$. 故该三角形的面积的最大值为 $\dfrac{ab}{e^2}$.

若 $a<(\sqrt{2}+1)b$，则 $u-t^2$ 取值范围为 $[b^2-t^2,+\infty)$，而 $b^2-t^2>t^2$，则 $k=0$ 时，$u-t^2=b^2-t^2$，

$\dfrac{u^2}{u-t^2}=2t^2+u-t^2+\dfrac{t^4}{u-t^2}$ 取最小值. 此时 $S=\dfrac{2a^3b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\dfrac{u-t^2}{u^2}}\leqslant\dfrac{2a^3b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{\sqrt{b^2-t^2}}{b^2}=\dfrac{4a^4b^2}{(a^2+b^2)^2}$.

综上所述，$S_{\max}=\begin{cases}\dfrac{ab}{e^2}, & a\geqslant(\sqrt{2}+1)b\\ \dfrac{4a^4b^2}{(a^2+b^2)^2}, & b<a<(\sqrt{2}+1)b\end{cases}$.

2020 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（一）

四川•成都

考试时间：2020 年 8 月 24 日 9:40—12:30

一、（本题满分 40 分） 已知 $a_i>0,i=1,2,\cdots,2020$，且 $\sum_{i=1}^{2020}a_i=2020$，求 $\sum_{k=1}^{2020}a_k^{\frac{1}{k^2}}$ 的最大值.

解： 由均值不等式：$a_k+\underbrace{t+t+\cdots t}_{k^2-1个}\ge k^2\cdot a_k^{\frac{1}{k^2}}\cdot t^{\frac{k^2-1}{k^2}},(k\ge 2)$，取 $t=\frac{1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}(k\ge 2)$，

则：$a_k^{\frac{1}{k^2}}\le a_k+\frac{k^2-1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}$，所以：$\sum_{k=1}^{2020}a_k^{\frac{1}{k^2}}\le\sum_{k=1}^{2020}a_k+\sum_{k=1}^{2020}\frac{k^2-1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}=2020+\sum_{k=1}^{2020}\frac{k^2-1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}$；

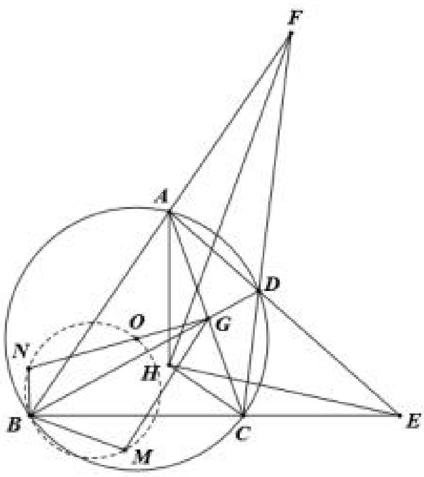
由于 $\frac{1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}<1$，所以 $2020-\sum_{k=2}^{2020}\frac{1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}>0$，

取 $a_k=\frac{1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}(k\ge 2)$，$a_1=2020-a_2-a_3-\cdots-a_{2020}$，

此时取等，故原式的最大值为 $2020+\sum_{k=1}^{2020}\frac{k^2-1}{k^{\frac{2k^2}{k^2-1}}}$.

二、（本题满分 40 分） 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，E,F 是两组对边的交点，G 是对角线的交点，H 是 ΔABC 的垂心. 作 $\Delta BMG\backsim\Delta AHE$，$\Delta BNG\backsim\Delta CHF$.

求证：（1）$BH=BM+BN$；　　（2）B,M,O,N 四点共圆.



解析：设 $\angle CBD=\delta$，则

$$BM=\frac{BK}{AE}\cdot AH=\frac{BK}{AB}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot AH=\frac{\sin A}{\sin(C+\delta)}\cdot\frac{\sin(C-\delta)}{\sin B}\cdot 2R\cos A;$$

$$BN=\frac{BK}{CF}\cdot BH=\frac{BK}{CB}\cdot\frac{CB}{CF}\cdot BH=\frac{\sin C}{\sin(C+\delta)}\cdot\frac{\sin(A-B+\delta)}{\sin B}\cdot 2R\cos C;\ldots\ldots\ 10\text{ 分}$$

故 $BM+BN=BH \Leftrightarrow \sin 2A\sin(C-\delta)+\sin 2C(A-B+\delta)=\sin 2B\sin(C+\delta)$

$\Leftrightarrow [\sin 2A\sin C+\sin 2C(A-B)-\sin 2B\sin C]\cdot\cos\delta$
$=[\sin 2B\cos C+\sin 2A\cos C-\sin 2C\cos(A-B)]\sin\delta$

其中 $\sin 2A\sin C+\sin 2C(A-B)-\sin 2B\sin C$
$=2\cos(A+B)\sin(A-B)\sin C+\sin 2C\sin(A-B)=0$
$\sin 2B\cos C+\sin 2A\cos C-\sin 2C\cos(A-B)$
$=2\sin(A+B)\cos(A-B)\cos C-\sin 2C\cos(A-B)=0$

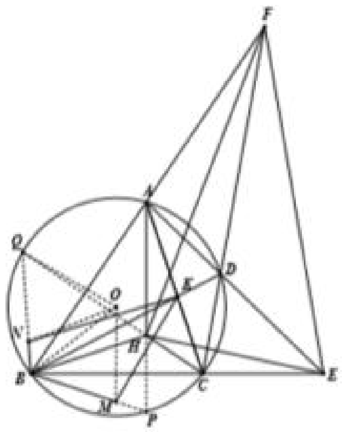
于是：$BM+BN=BH$.......20 分

（2）易知 BM,AH 的交点 P、BN,CH 的交点 Q 在 $\odot O$ 上.

于是 $BP=BH=BQ$........................30 分

由（1）知 $QN=BM$，进而 $\Delta ONQ\cong\Delta OMB$.

故 $\angle ONQ=\angle OMB$，即 O,M,B,N 四点共圆...............40 分



三、（本题满分 50 分）设 $f(x)=a_{2020}x^{2020}+a_{2019}x^{2019}+\cdots a_{2018}x^{2018}+a_1x+a_0$，其中 $a_i\in Z,i=0,1,2,\cdots 2019,2020$. 求有序数对 (n,p) 的个数，其中 p 为素数，满足 $p^2<n<2020$, 且对 $\forall i=0,1,2,\cdots n$，$C_n^i+f(i)$ 模 p 同余.

解：引理 1：C_n^0，C_n^1，$C_n^2,\cdots C_n^{n-1},C_n^n$ 均为奇数当且仅当 $n=2^r-1$

引理的证明：由熟知的结论，C_n^i 为偶数当且仅当 $i+(n-i)=n$ 在二进制下发生进位.

由题意，当 $i=0,1,2\cdots n$ 时 $i+(n-i)=n$ 在二进制下都不发生进位，因此 $n=(11\cdots1)_2$

引理 2：若 $C_n^i+C_n^j\equiv i+j(\bmod 2),\forall 0\le i<j\le n.$ 当且仅当 $n=2^r-2$

引理的证明：由熟知的结论，C_n^i 为偶数当且仅当 $i+(n-i)=n$ 在二进制下发生进位.

取 $i=0, j=n$ 可知，n 为偶数，取 $i=0, 0<j=2k\le n,$ 则 C_n^{2k} 总为奇数，分析二进制加法式可知

$n=(11\cdots10)_2$

断言：满足题意的素数 p 必为 2，若 $p>2,$ 设 $n=(n_k\cdots n_1n_0),$ 由于 $n>p^2$，故 $k\ge 2$，

取 $i_1=n_0, i_2=p+n_0, i_3=2p+n_0,$ 则 $f(i_1)\equiv f(i_2)\equiv f(i_3)(\bmod p),$

由卢卡斯定理，$C_n^{i_1}\equiv C_{n_0}^{n_0}(\bmod p), C_n^{i_2}\equiv C_{n_1}^{1}C_{n_0}^{n_0}(\bmod p), C_n^{i_3}\equiv C_{n_1}^{2}C_{n_0}^{n_0}(\bmod p),$

从而 $1\equiv n_1\equiv \dfrac{n_1(n_1-1)}{2}(\bmod p)$，这显然不成立.故 $p=2$.

回到原题，$C_n^i+f(i)$ 的奇偶性固定不变，即 $C_n^i+f(i)\equiv C_n^j+f(j)(\bmod 2), \forall 0\le i<j\le n.$

$f(x)=a_{2020}x^{2020}+a_{2019}x^{2019}+\cdots a_1x+a_0\equiv(a_1+a_2+\cdots a_{2020})x+a_0(\bmod 2)$

记 $M=a_1+a_2+\cdots a_{2020}$，因此 $C_n^i+C_n^j\equiv f(i)+f(j)\equiv M(i+j)(\bmod 2), \forall 0\le i<j\le n.$

若 $2|M,$ 则 $2|C_n^i+C_n^j\ \forall 0\le i<j\le n$，由引理 1，$n=2^r-1,$ 又 $n>p^2,$ 可知，$5\le n<2020,$ 共 8 种选择；

若 M 不被 2 整除，则 $C_n^i+C_n^j\equiv i+j(\bmod 2), \forall 0\le i<j\le n.$，由引理 2，$n=2^r-2,$ 又 $n>p^2,$ 可知，$5\le n<2020,$ 共 8 种选择

综上所述，无论哪种情况，符合要求的 (n,p) 共有 8 组.

四、（本题满分 50 分）某城镇有 n（$n\geqslant 3$）座村庄，某些村庄之间有道路相连，且每条道路仅连接两座村庄，任两座村庄之间至多有一条路。同时，路交叉处没有十字路口，但有桥或者隧道。已知任意两村庄之间可通过道路到达，但由于某项自行车赛事关闭任意环路之后，前述结论不再成立。求道路条数的最大值。

解：　最大值为 $2n-3$。

先给出构造：取出 2 个村庄与其余村庄均有道路相连，这 2 个村庄之间也相连，其余 $n-2$ 村庄之间没有道路，可知此时满足要求且共有 $2n-3$ 条道路.

下证道路不能更多．以每个村庄为顶点，道路为边得到 n 阶图 G，　即证连通图边数不小于 $2n-2$ 时，一定可以去掉一个圈使得剩下的图形仍为连通图．显然此时只需证明恰有 $2n-2$ 条边的情况（ 如果边数大于 $2n-2$，则可每次去掉某个圈中的一条边，直至得到 $2n-2$

条边).

当$n=3$时，显然成立.

假设$n=k$时命题成立,

考虑$n=k+1$时. 此时共有$2k$条边，由抽屉原理，存在一个点A，其度数不超过$[\frac{2\times 2k}{k+1}]=3$。

（1）若A的度数为1，则在G中去掉A和该边，得到k个顶点，$2k-1$条边的连通图. 由归纳假设，可以去掉一个圈后仍然连通，从而图G也连通，命题成立.

（2）若A的度数为2，设A与B、C相连，则在G中去掉A和AB,AC，若原来连结则不变，否则连上BC. 此时剩下的图是连通图且不少于$2k-2$条边，则由归纳假设，可在剩下的图中去掉一个圈后保持连通，对应到图G也能满足要求，命题成立,

（3）若A的度数为3，设A与B、C、D相连，若BC,CD,DB均连结，则去掉这三条边后图仍然连通，命题成立,

若这三点之间连结2条边，则添加第三条边并去掉A和AB,AC，AD. 同样类似前面可得命题成立.

若这三点之间只连结1条边或没连，则将它们之间的边数增加至2条并去掉A和AB,AC，AD. 同样类以前面可得命题成立,

综上，命题得证,