2024 年新高考改革适应性练习（4）（九省联考题型）

数学试题卷

（2024.2.8）

考生须知

1. 本卷共 4 页，四大题 19 小题，满分 150 分，答题时间 120 分钟；
2. 答题时须在答题卡上填涂所选答案（选择题），或用黑色字迹的签字笔规范书写答案与步骤（非选择题），答在本试题卷上或草稿纸上的答案均属无效；
3. 考试结束时，考生须一并上交本试题卷，答题卡与草稿纸.

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1. 已知 2024 个互不相同的实数，记其上四分位数为 a，中位数为 b，第 75 分位数为 c，则

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<a=c$　　D．$a=c<b$

2. 已知两条直线 l_1 和 l_2，其斜率分别是一元二次方程 $k^2+2024k=1$ 的两不等实数根，则其位置关系是

A．平行　　B．垂直　　C．重合　　D．异面

3. 已知复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$，$z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，则 $|z_1z_2|=$

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

4. 在三棱锥 $V-ABC$ 中，若顶点 V 到底面三边距离相等，则顶点 V 在平面 ABC 上的射影为 $\triangle ABC$ 的

A．内心　　B．外心　　C．垂心　　D．重心

5. 已知 $a,b\in R$，$ab<0$，函数 $f(x)=ax^2+b\ (x\in R)$．若 $f(s-t)$，$f(s)$，$f(s+t)$ 依次成等比数列，则平面 Oxy 上的点 (s,t) 的轨迹是

A．直线和焦点在 x 轴的双曲线　　B．直线和焦点在 x 轴的椭圆

C．直线和焦点在 y 轴的双曲线　　D．直线和焦点在 y 轴的椭圆

6. 若 $\sin\frac{\pi}{10}$ 是函数 $f(x)=ax^3-bx+1\ (a,b\in N^*)$ 的一个零点，则 $f(1)=$

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7. 已知 O 为坐标原点，点 $A(2,0)$，设动点 C 满足 $|OC| \le 2$，动点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$，则 $|OP|$ 的最大值是

A. $\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

8. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的横纵坐标均在集合 $\{1,2,3,4\}$ 内，则这样的三角形共有

A. 64 个　　B. 125 个

C. 432 个　　D. 516 个

二、多项选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，若只有 2 个正确选项，每选对一个得 3 分；若只有 3 个正确选项，每选对一个得 2 分．）

9. 以下函数 $f(x)$ 满足对任意其定义域上的 x,y，都有 $(x-y)[f(x)-f(y)] \ge 0$ 的有

A. $f(x)=x$　　B. $f(x)=\sin x$

C. $f(x)=x|x|$　　D. $f(x)=x\sin x$

10. 已知抛物线 Γ 的焦点为 F，点 P 在其准线上运动，过 P 作 Γ 的两条切线与 Γ 相切于 A,B 两点，则以下说法正确的有

A. A,B,F 三点共线　　B. $\triangle ABP$ 可能是直角三角形

C. $|AF|,|PF|,|BF|$ 构成等比数列　　D. $\triangle APF$ 一定不是等腰三角形

11. 若三角形的面积为有理数，三条边的长度都是整数，则其一条边的长度可以是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．）

12. 数学中有很多公式都是数学家欧拉发现的，它们都叫欧拉公式，分散在各个数学分支之中．任意一个凸多面体的顶点数 V、棱数 E、面数 F 之间，都满足关系式 $V-E+F=2$，这个等式就是立体几何中的“欧拉公式”．若一个凸二十面体的每个面均为三角形，则由欧拉公式可得该多面体的顶点数是_________．

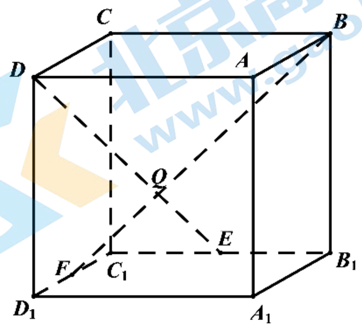
13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2+kn+k\ (k\in Z)$，且 $\{a_n\}$ 恰好有一项是负项，则 k 的值是_________．

14. 已知椭圆 E 的一个焦点为 $(\sqrt{7},0)$，且过点 $(4,0)$，过原点 O 作两条互相垂直的射线交椭圆于 A、B 两点，则弦长 $|AB|$ 的取值范围为_________．

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

15.（13 分）

如右图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 E,F 分别为 B_1C_1,C_1D_1 的中点，点 Q 为 BF 与 DE 的交点．



（1）求三棱锥 $Q-ABC$ 的体积；

（2）求直线 AQ 与平面 CEF 夹角的余弦值．

16.（15 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=5$，前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}=3S_n+2n+5(n\in N^*)$．

（1）证明：数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列；

（2）令 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$．

17.（15 分）

公元 1651 年，一个问题引发了数学家德梅赫、帕斯卡、费马和惠更斯等人的讨论，这三位当时全欧洲乃至全世界最优秀的科学家都给出了正确的解答．该问题如下：设两名赌徒约定谁先赢 $k(k\geq 1,k\in N^*)$ 局，谁便赢得全部赌注 a 元．每局甲赢的概率为 $p(0<p<1)$，乙赢的概率为 $1-p$，且每局赌博相互独立．在甲赢了 $m(m<k)$ 局，乙赢了 $n(n<k)$ 局时，赌博意外终止．赌注该怎么分才合理？这三位数学家给出的答案是：如果出现无人先赢 k 局则赌博意外终止的情况，甲、乙便按照赌博再继续进行下去各自赢得全部赌注的概率之比 $P_{甲}:P_{乙}$ 分配赌注．

（1）甲、乙赌博意外终止，若 $a=243$，$k=4$，$m=2$，$n=1$，$p=\frac{2}{3}$，求甲应分得的赌注；

（2）记事件 A 为"赌博继续进行下去乙赢得全部赌注"，试求当 $k=4$，$m=2$，$n=1$ 时赌博继续进行下去甲赢得全部赌注的概率 $f(p)$；当 $p\geq\frac{4}{5}$ 时，求事件 A 发生的概率的最大值．

18.（17 分）

已知以原点 O 为中心的椭圆 Ω 过点 $(2,0)$，且与抛物线 $\omega: y^2=4x$ 有相同的焦点.

（1）求 Ω 的标准方程;

（2）点 P 在 ω 上，ω 过点 P 的切线 l 交 Ω 于 M,N 两点，求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

19.（17 分）

“让式子丢掉次数”：伯努利不等式

伯努利不等式（Bernoulli’s Inequality），又称贝努利不等式，是高等数学的分析不等式中最常见的一种不等式，由瑞士数学家雅各布•伯努利提出：

对实数 $x\in(-1,+\infty)$，在 $n\in[1,+\infty)$ 时，有不等式 $(1+x)^n\geq 1+nx$ 成立；在 $n\in(0,1)$ 时，有不等式 $(1+x)^n\leq 1+nx$ 成立.

（1）猜想伯努利不等式等号成立的条件；

（2）当 $n\geq 1$ 时，对伯努利不等式进行证明；

（3）考虑对多个变量的不等式问题. 已知 $a_1,a_2,\dots,a_n\ (n\in N^*)$ 是大于-1 的实数（全部同号），证明：

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$