学校＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 考号＿＿＿＿

密封线内不要答题

2023～2024学年高三核心模拟卷(中)

数学(一)

注意事项：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟。答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(1+i)=-1+3i$（i 为虚数单位），则在复平面内复数 z 所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设集合 $A=\{x|y=\ln(x-1)\}$，$B=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$，则

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$

C. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(1,2)$　　D. $\complement_{\mathbf{R}}B\subseteq A$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列选项中是“$a<b$”的一个充分不必要条件的是

A. $\frac{|c|}{a}>\frac{|c|}{b}$　　B. $ac^2<bc^2$

C. $a^3<b^3$　　D. $3^a<3^b$

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(0)=9$，当 $x>0$ 时，$f(x)=2^{x+1}-\frac{2}{x}$，则不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集是

A. $[-2,2]$　　B. $[-3,3]$

C. $[-2,0)\cup(0,2]$　　D. $(-\infty,-2]\cup(0,2]$

6. 已知圆 C：$x^2+y^2-4x+2ay+a^2=0$（$a\in\mathbf{R}$）关于直线 l：$2x-y-1=0$ 对称，过点 $P(5,-1)$ 作圆 C 的两条切线 PA 和 PB，切点分别为 A,B，则 $|AB|=$

A. $\frac{4\sqrt{21}}{5}$　　B. $\frac{4\sqrt{11}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{11}}{3}$　　D. $\frac{8}{5}$

7. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=3$，A_1 是棱 PA 上一点，且 $AA_1=\sqrt{2}$，过点 A_1 作平面 $A_1B_1C_1D_1$∥底面 $ABCD$，分别交 BP,CP,DP 于点 B_1,C_1,D_1，若 $A_1B_1=2$，则多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为

A. $\frac{19\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{9\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 作直线 l_1 与 C 的渐近线在第一象限内交于点 A，记点 A 关于 x 轴的对称点为点 B，若 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，$\angle AF_1B=60°$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知一组数据：12，31，24，33，22，35，45，25，16，若去掉 12 和 45，则剩下的数据与原数据相比，下列结论正确的是

A. 中位数不变　　B. 平均数不变

C. 方差不变　　D. 第 40 百分位数不变

10. 设函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+d(A>0,\omega>0)$的最大值为 1，最小值为 -3，若 $f(x)$的图象相邻的两条对称轴间的距离为 2π，将 $f(x)$的图象向上平移 1 个单位长度，再向右平移 π 个单位长度，得到函数 $g(x)$的图象，则

A. $A=\omega=2$

B. $f(x)$在$[0,5\pi]$内恰有 3 个零点

C. $g(x)$的图象关于点$\left(-\frac{4\pi}{3},0\right)$对称

D. $g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right]$上单调递增

11. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，$Q(1,y_0)$为抛物线 C 上一点，且 $|QF|=2$，$A(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点，O 是坐标原点，则

A. 抛物线 C 的准线方程为 $x=1$

B. $\frac{|MA|^2}{|MF|-1}$的最小值为 4

C. 若 $M(p,\sqrt{2}p)$，则$\triangle OMN$ 的面积为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 若$\frac{|NF|}{|MF|}=\frac{1}{2}$，则 MN 的方程为 $y=2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$

12. 在四面体 $ABCD$ 中，$AD=BC=\frac{1}{2}AC=1$，$AB=CD=\sqrt{3}$，四面体 $ABCD$ 的顶点均在球 O 的表面上，则

A. 当平面 $DAC\perp$平面 ABC 时，$BD=\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. 球 O 的表面积随二面角 $D-AC-B$ 的大小变化而变化

C. 异面直线 AB 与 CD 不可能垂直

D. AD 与平面 ABC 所成角的最大值为 $60°$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^n(n\in\mathbf{N})$的二项展开式的第 7 项为常数项，则 $n=$__________.

14. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$，则 $\cos(2\alpha-2\beta)=$__________.

15. 图 1 是第七届国际数学教育大会的会徽图案,会徽的主体图案是由如图 2 所示的一连串直角三角形演化而成的,其中 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$,如果把图 2 中的直角三角形继续作下去,记 $OA_1,OA_2,\cdots,OA_n$ 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$,则 $a_n=$__________;若 $b_n=\dfrac{1}{(n+1)a_n+na_{n+1}}$,则数列 $\{b_n\}$ 的前 2 024 项和 $S_{2\,024}=$__________.

图 1

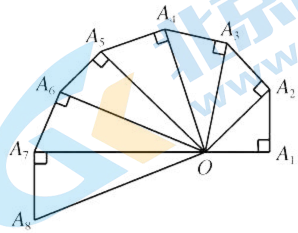


图 2

16. 已知关于 x 的不等式 $2e^x-2x\ln x-m>0$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立,则实数 m 的取值范围是__________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

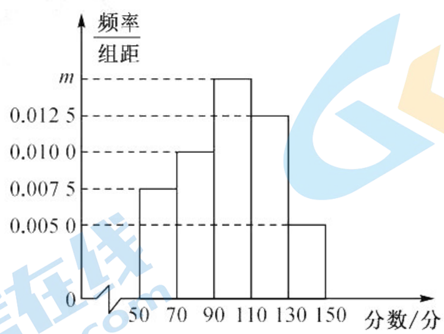
在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $c=2b$,$\sin 2C=2\sin B$.

(1)求角 C 的大小;

(2)若 $b=4$,求△ABC 的面积.

18.(本小题满分 12 分)

某中学为研究本校高三学生在县联考中的数学成绩,随机抽取了 100 位学生的数学成绩(满分 150 分)作为样本,并整理成[50,70),[70,90),[90,110),[110,130),[130,150]五组,制成如图所示的频率分布直方图.



(1)若参与测试的学生共 12 000 人,试估计成绩不低于 110 分的学生有多少人?

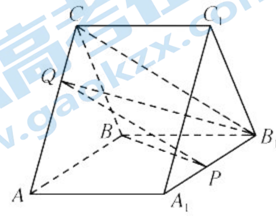
(2)用分层随机抽样的方法从样本中的[90,110)和[130,150]两组抽取 8 人,再从这 8 人中随机抽取 3 人,记这 3 人得分在[90,110)范围内的人数为 X,求 X 的分布列与数学期望.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，P 是棱 A_1B_1 的中点，Q 是棱 AC 上一点，且 $\frac{AQ}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AB=2BB_1=2$.

(1)求证：$BP\perp B_1C$；

(2)求平面 PQB_1 与平面 BPB_1 的夹角的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 $b_n=\begin{cases}a_n, & n\text{ 为奇数},\\ n\cdot 2^{a_n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，左、右顶点分别为 A_1，A_2，过点 F_1 作直线 $l_1\perp x$ 轴，与 C 交于 P，Q 两点（P 在 Q 上方），且四边形 PA_1QA_2 的面积为 10，$\triangle PQF_2$ 的面积为$\frac{20}{3}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)已知 $A(0,1)$，是否存在过点 A 的直线 l_2 与曲线 C 交于 M，N（N 在 M 上方）两点，使得$\triangle ANP$ 与$\triangle AMA_2$ 的面积比为$\frac{1}{2}$？若存在，请求出直线 l_2 的方程；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$.

(1)求函数 $f(x)$的最小值；

(2)若 $g(x)=x^2[f(x)+1-a]-x+a$，求函数 $g(x)$的零点个数.