

## 2019 北京师范大学第二附属中学高二（上）期中

### 数 学

#### 一、选择题

1. 过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点  $F_1$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于点  $P$ ,  $F_2$  为右焦点, 若  $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ , 则椭圆的离心率为( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{3}$

2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_2 = 4$ ,  $a_4 = 2$ , 则  $a_6 =$  ( )

- A. -1      B. 0      C. 1      D. 6

3. 椭圆  $2x^2 + 3y^2 = 12$  的两焦点之间的距离为( )

- A.  $2\sqrt{10}$       B.  $\sqrt{10}$       C.  $2\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{2}$

4. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的一条渐近线方程为  $y = \sqrt{3}x$ , 它的一个焦点坐标为  $(2, 0)$ , 求双曲线的方程 ( )

- A.  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$       B.  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$       C.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$       D.  $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

5. “ $(x-1)(x+2) = 0$ ” 是 “ $x = 1$ ” ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

6. 若  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ , 则下列不等式: ①  $a + b < ab$ ; ②  $|a| > |b|$ ; ③  $a < b$ ; ④  $ab < b^2$  中, 正确的不等式有( )

- A. ①②      B. ②③      C. ①④      D. ③④

7. 已知  $x, y > 0$  且  $x + 4y = 1$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  的最小值为( )

- A. 8      B. 9      C. 10      D. 11

8. 几位大学生响应国家的创业号召, 开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣, 他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动这款软件的激活码为下面数学问题的答案: 已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, ... 其中第一项是  $2^0$ , 接下来的两项是  $2^0, 2^1$ , 再接下来的三项是  $2^0, 2^1, 2^2$ , 依此类推. 求满足如下条件的最小整数  $N: N > 100$  且该数列的前  $N$  项和为 2 的整数幂. 那么该款软件的激活码是 ( ) .

- A. 440      B. 330      C. 220      D. 110

#### 二、填空题

9. 在等比数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 + a_2 = 18$ ,  $a_2 + a_3 = 12$ , 则公比  $q$  为\_\_\_\_\_.

10. 若双曲线的一个顶点坐标为  $(3, 0)$ , 焦距为 10, 则它的标准方程为\_\_\_\_\_.

11. 椭圆  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦距为 2, 则  $m$  的值等于\_\_\_\_\_.

12. 若对任意正实数  $a$ , 不等式  $x^2 \leq 1+a$  恒成立, 则实数  $x$  的最小值为\_\_\_\_\_.

13. 若命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - mx - m \leq 0$ ” 是假命题, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 在一次调查中, 甲、乙、丙、丁四名同学阅读量有如下关系: 同学甲、丙阅读量之和与乙、丁阅读量之和相同, 同学甲、乙阅读量之和大于丙、丁阅读量之和, 丁的阅读量大于乙、丙阅读量之和. 那么这四名同学按阅读量从大到小的排序依次为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

15. 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_3 = 2$ , 前 3 项的和  $S_3 = \frac{9}{2}$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设等比数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = a_1, b_4 = a_{15}$ , 求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

16. 求过点  $(3, -\sqrt{2})$ , 离心率  $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$  的双曲线的标准方程.

17. 已知  $f(x) = ax^2 + x - a, x \in \mathbf{R}$ .

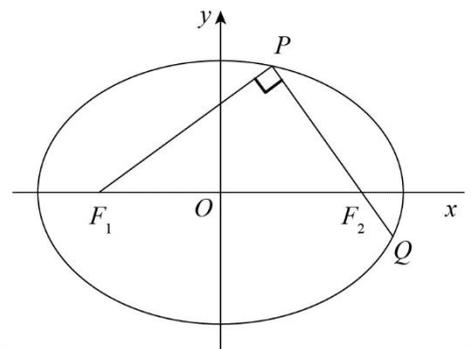
(1) 若  $a = 1$ , 解不等式  $f(x) \geq 1$ .

(2) 若  $a < 0$ , 解不等式  $f(x) > 1$ .

18. 如图, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $F_2$  的直线交椭圆于  $P, Q$  两点, 且  $PQ \perp PF_1$ .

(1) 若  $|PF_1| = 2 + \sqrt{2}, |PF_2| = 2 - \sqrt{2}$ , 求椭圆的标准方程;

(2) 若  $|PF_1| = |PQ|$ , 求椭圆的离心率  $e$ .



19. 设函数  $f(x) = x + \frac{a}{x+1}, x \in [0, +\infty)$ .

- (1) 当  $a = 2$  时, 求函数  $f(x)$  的最小值;  
 (2) 当  $0 < a < 1$  时, 求函数  $f(x)$  的最小值.

20. 有限数列  $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$  同时满足下列两个条件:

- ① 对于任意的  $i, j (1 \leq i < j \leq n)$ ,  $a_i < a_j$ ;  
 ② 对于任意的  $i, j, k (1 \leq i < j < k \leq n)$ ,  $a_i a_j, a_j a_k, a_i a_k$  三个数中至少有一个数是数列  $A_n$  中的项.
- (1) 若  $n = 4$ , 且  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = a, a_4 = 6$ , 求  $a$  的值.  
 (2) 证明: 2, 3, 5 不可能是数列  $A_n$  中的项.  
 (3) 求  $n$  的最大值.