考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $(z-2i)i=3+i$，则 $z=$

A. $1-i$　　B. $3-i$　　C. $1-5i$　　D. $-1+3i$

2. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-5x-6\leqslant 0\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x(3-x)\geqslant 0\}$，$B=\{1,2,4\}$，则集合 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $\{-1\}$　　B. $\{3\}$　　C. $\{-1,3\}$　　D. $\{-1,5,6\}$

3. 在一些比赛中，对评委打分的处理方法一般是去掉一个最高分，去掉一个最低分，然后计算余下评分的均值作为参赛者的得分. 在一次有 9 位评委参加的赛事中，评委对一名参赛者所打的 9 个分数，去掉一个最高分，去掉一个最低分后，一定不变的数字特征为

A. 平均值　　B. 中位数　　C. 众数　　D. 方差

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,4)$，$\boldsymbol{c}=(1,m)(m\in\mathbf{R})$，若 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $m=$

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. $\frac{2}{3}$

5. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x>-1$；命题 q：$\exists x,y\in\mathbf{R}$，$\sin(x+y)=\sin x+\sin y$，则下列命题是真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge(\neg q)$　　C. $(\neg p)\wedge q$　　D. $p\vee(\neg q)$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n+a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\log_2(1-a_{2\,023})=$

A. $-2\,023$　　B. $-\frac{1}{2\,023}$　　C. $\frac{1}{2\,023}$　　D. $2\,023$

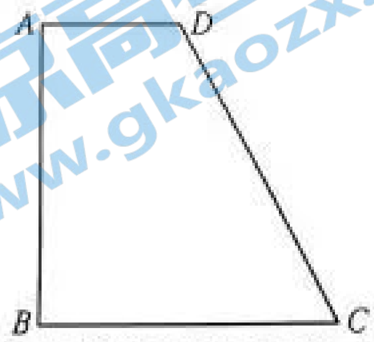
7. 昆虫信息素是昆虫用来表示聚集、觅食、交配、警戒等信息的化学物质，是昆虫之间起化学通讯作用的化合物，是昆虫交流的化学分子语言. 包括利它素、利己素、协同素、集合信息素、追踪信息素、告警信息素、疏散信息素、性信息素等. 人工合成的昆虫信息素在生产中有较多的应用，尤其在农业生产中的病虫害的预报和防治中较多使用. 研究发现，某昆虫释放信息素 t 秒后，在距释放处 x 米的地方测得的信息素浓度 y 满足 $\ln y=-\frac{1}{2}\ln t-\frac{k}{t}x^2+a$，其中 k,a 为非零常数. 已知释放信息素 1 秒后，在距释放处 2 米的地方测得信息素浓度为 m；若释放信息素 4 秒后，距释放处 b 米的位置，信息素浓度为 $\frac{m}{2}$，则 $b=$

A. [illegible]　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8. …的焦点为 F，其准线与坐标轴交于点 A，点 P 为 E 上一点，当 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 取最小值时，点 P 恰好在以 A，F 为焦点的双曲线 Γ 上，则双曲线 Γ 的实轴长等于

A. $2\sqrt{2}-2$　　B. $4\sqrt{2}-4$　　C. $2\sqrt{3}+2$　　D. $4\sqrt{3}-4$

9. 巴普士(约公元 3～4 世纪)，古希腊亚历山大学派著名几何学家. 生前有大量的著作，但大部分遗失在历史长河中，仅有《数学汇编》保存下来.《数学汇编》一共 8 卷，在《数学汇编》第 3 卷中记载着这样一个定理："如果在同一平面内的一个闭合图形的内部与一条直线不相交，那么该闭合图形围绕这条直线旋转一周所得到的旋转体的体积等于该闭合图形的面积与该闭合图形的重心旋转所得周长的积"，即 $V=Sl$(V 表示平面闭合图形绕旋转轴旋转所得几何体的体积，S 表示闭合图形的面积，l 表示重心绕旋转轴旋转一周的周长). 已知在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$AB=BC=2AD=4$，利用上述定理可求得梯形 $ABCD$ 的重心 G 到点 B 的距离为



A. $\frac{\sqrt{113}}{9}$　　B. $\frac{20}{9}$　　C. $\frac{2\sqrt{113}}{9}$　　D. $\frac{19}{9}$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{6\sin x\cos x}{2\cos^2 x+1}$，则

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称　　B. $\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增

11. 已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 是圆 $x^2+y^2=c^2(c=\sqrt{a^2+b^2})$ 与 Γ 的一个交点，若△PF_1F_2 的内切圆的半径为 a，则 Γ 的离心率为

A. $\sqrt{3}+1$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

12. 已知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{9}{7}}$，$b=0.7e^{0.1}$，$c=\cos\frac{2}{3}$，则

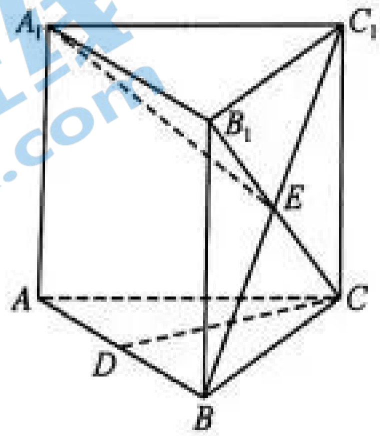
A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 x,y 满足 $\begin{cases}x+2y\geqslant 2,\\ 3x+y\leqslant 3,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\log_a x+x^2-1(a>0$，且 $a\neq 1)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x+3y-2=0$ 垂直，则 $a=$________.

15. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AB 的中点，BC_1 与 B_1C 交于点 E，若 $AB=AA_1$，则 CD 与 A_1E 所成角的余弦值为________.



16. 已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{x}\right|-\left|x+\frac{1}{x}\right|+2$，则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 6 个互不相等的实数解的充要条件为________.

答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17.(本小题满分 12 分)

随着科技的发展,手机的功能已经非常强大,各类 APP 让用户的生活质量得到极大的提升的同时,也带来了一些问题,如有不少青少年沉迷于手机游戏,对青少年健康成长带来不小的影响. 为了引导青少年抵制不良游戏,适度参与益智游戏,某游戏公司开发了一款益智游戏,在内测时收集了玩家对每一关的平均过关时间,如下表:

关卡 x	1	2	3	4	5	6
平均过关时间 y(秒)	51	79	121	130	237	353

(1)通过散点图分析,可用模型 $y=e^{a+bx}$ 拟合 y 与 x 的关系,试求 y 关于 x 的回归方程(系数 a,b 精确到 0.01);

(2)从表中 6 关过关时间中随机抽取 2 个,求这两个过关时间均低于 6 关的过关时间的平均数的概率.

参考公式:对于一组数据$(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$,其经验回归直线 $\hat{y}=bx+a$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据:

y	51	79	121	130	237	353
$\ln y$	3.932	4.369	4.796	4.868	5.468	5.866

$\sum\limits_{i=1}^{6}u_i=29.299$,$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iu_i=109.066$,其中 $u_i=\ln y_i$.

18.(本小题满分 12 分)

在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且$(a-b)(\sin A+\sin B)=c(\sqrt{3}\sin A-\sin C)$.

(1)求 B 的大小;

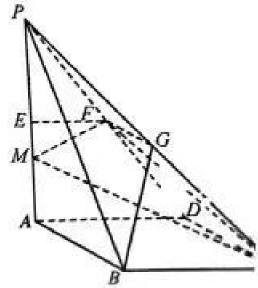
(2)若 $A=\dfrac{\pi}{4}$,$b=2$,求△ABC 的面积.

19.(本小题满分 12 分)

已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为边长为 4 的正方形,E 为 PA 的中点,过 E 与底面 $ABCD$ 平行的平面 α 与棱 PC,PD 分别交于点 G,F,点 M 在线段 AE 上,且 $AM=2ME$.

(1)求证:BG∥平面 CFM;

(2)若 $PA\perp$平面 $ABCD$,且 $PA=6$,求点 G 到平面 CFM 的距离.



20.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上焦点为 F，且 C 上的点到点 F 的距离的最大值与最小值的差为 $2\sqrt{3}$，过点 F 且垂直于 y 轴的直线被 C 截得的弦长为 1.

(1)求 C 的方程；

(2)已知直线 $l:y=kx+m(m\neq 0)$ 与 C 交于 M,N 两点，与 y 轴交于点 P，若点 P 是线段 MN 靠近点 N 的四等分点，求实数 m 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2(a\in\mathbf{R})$，其极小值为 -4.

(1)求 a 的值；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=t$ 在 $(0,3)$ 上有两个不相等的实数根 x_1,x_2，求证：$3<x_1+x_2<4$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2$，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$.

(1)求曲线 C_1 的直角坐标方程和曲线 C_2 的一个参数方程；

(2)记 C_2 与 x 轴交于点 P，曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点为 A,B，求 $\frac{1}{|PA|+|PB|}$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|x-1|+|x|$.

(1)求不等式 $f(x)\leq 8$ 的解集；

(2)若 $y=f(x)-|x|-|x-2|$ 的最大值为 m，正数 a,b 满足 $a+2b=m$，求 $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}$ 的最小值.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $(z-2i)i=3+i$，所以 $z=\frac{3+i}{i}+2i=\frac{(3+i)(-i)}{i(-i)}+2i=1-3i+2i=1-i$. 故选 A.

2. D　由题意知 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x\leqslant 6\}=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{-1,5,6\}$. 故选 D.

3. B　去掉最高分和最低分后，中位数一定不变，其余数字特征不一定不变. 故选 B.

4. B　因为 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,4)$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,2)$，因为 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2+2m=0$，解得 $m=-1$，故选 B.

5. C　因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1>-1$ 不成立，所以 p 为假命题；因为当 $x=0$，$y\in\mathbf{R}$ 时，$\sin(0+y)=\sin 0+\sin y$ 成立，故 q 为真命题. 所以 $p\wedge q$，$p\wedge(\neg q)$，$p\vee(\neg q)$ 为假命题，$(\neg p)\wedge q$ 为真命题. 故选 C.

6. A　因为 $S_n+a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$，即 $S_n=n-a_n$，所以 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n-a_n-(n-1-a_{n-1})$，所以 $2a_n=1+a_{n-1}$，化为 $a_n-1=\frac{1}{2}(a_{n-1}-1)$，当 $n=1$ 时，$2a_1=1$，即 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_1-1=-\frac{1}{2}$. 所以数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列，首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$，所以 $a_n-1=-\frac{1}{2^n}$，所以 $a_n=1-\frac{1}{2^n}$，所以 $\log_2(1-a_{2\,023})=\log_2\frac{1}{2^{2\,023}}=-2\,023$. 故选 A.

7. B　因为释放信息素 1 秒后，在距释放处 2 米的地方测得信息素浓度为 m，所以 $\ln m=-\frac{1}{2}\ln 1-4k+a$，所以 $\ln m=-4k+a$，即 $\ln m-a=-4k$. 当 $y=\frac{m}{2}$，$t=4$ 时，$\ln\frac{m}{2}=-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{k}{4}b^2+a$，整理得 $\ln m-\ln 2=-\ln 2-\frac{k}{4}b^2+a$，即 $\ln m-a=-\frac{k}{4}b^2$，所以 $-4k=-\frac{k}{4}b^2$，又 $k\neq 0$，所以 $b^2=16$，因为 $b>0$，所以 $b=4$. 故选 B.

8. B　由题意得当 PA 与 E 相切时，$\frac{|PF|}{|PA|}$ 取得最小值，$A(0,-2)$，$F(0,2)$，设此时点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，因为 $y'=\frac{1}{4}x$，故切线 PA 的方程为 $y-\frac{1}{8}x_0^2=\frac{1}{4}x_0(x-x_0)$，将点 A 的坐标代入，得 $-2-\frac{1}{8}x_0^2=-\frac{1}{4}x_0^2$，解得 $x_0=\pm 4$，故 $P(\pm 4,2)$，设双曲线 Γ 的实轴长为 $2a$，则 $2a=||PA|-|PF||=4\sqrt{2}-4$. 故选 B.

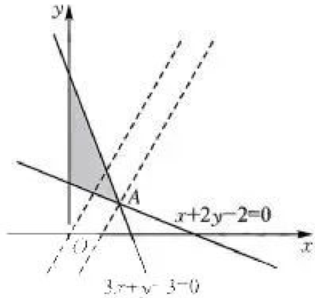
9. C　直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 旋转一周所得几何体的体积 $V_1=\frac{1}{3}(4\pi+16\pi+\sqrt{4\pi\times 16\pi})\times 4=\frac{112\pi}{3}$，设重心 G 到 AB 的距离为 d_1，则 $\frac{112\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times 4\times 2\pi d_1$，解得 $d_1=\frac{14}{9}$；直角梯形绕 BC 旋转一周所得几何体的体积 $V_2=32\pi+\frac{32\pi}{3}=\frac{128\pi}{3}$，设重心 G 到 BC 的距离为 d_2，则 $\frac{128\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times 4\times 2\pi d_2$，所以 $d_2=\frac{16}{9}$，所以 $BG=\sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{113}}{9}$. 故选 C.

10. C　由题意得 $f(x)=\frac{6\sin x\cos x}{2\cos^2 x+1}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x+2}$，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{3\sin(\pi-2x)}{\cos(\pi-2x)+2}=\frac{3\sin 2x}{-\cos 2x+2}=-\frac{3\sin 2x}{\cos 2x-2}\neq f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称；$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\sin(2x+\pi)}{\cos(2x+\pi)+2}=\frac{-3\sin 2x}{-\cos 2x+2}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x-2}\neq f(x)$，故 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $f(x)$ 的周期；设 $k=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+2}$，则 k 的大小等于点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 与点 $(-2,0)$ 连线的斜率，又点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上，利用数形结合的方法易求得 $k\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$；$f'(x)=\frac{12\cos 2x+6}{(\cos 2x+2)^2}$，令 $f'(x)\leqslant 0$，得 $\cos 2x\leqslant-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，综上，ABD 错误 C 正确. 故选 C.

11. A　由题意知 $PF_1 \perp PF_2$，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，又因为 $||PF_1|-|PF_2||=2a$，与 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$ 联立，得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2b^2$，$(|PF_1|+|PF_2|)^2=4c^2+4b^2$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{c^2+b^2}$，又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot a$，所以 $2b^2=a(2\sqrt{b^2+c^2}+2c)$，即 $b^2-ac=a\sqrt{b^2+c^2}$，所以 $b^2-2ac=a^2$，即 $c^2-2ac-2a^2=0$，所以 $e^2-2e-2=0$，所以 $e=\sqrt{3}+1$. 故选 A.

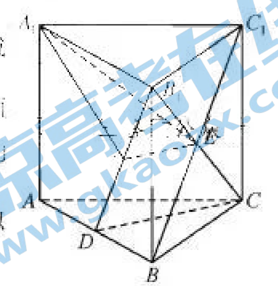
12. D　由题意知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{9}{7}}=3^{\log_3\frac{7}{9}}=\frac{7}{9}$，$\ln b-\ln a=0.1+\ln 0.7-\ln\frac{7}{9}=\frac{1}{10}+\ln\frac{9}{10}$，令 $f(x)=1-x+\ln x$，则 $f'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f\left(\frac{9}{10}\right)<f(1)=0$，所以 $\ln b-\ln a<0$，所以 $a>b$；因为 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}$，易知 $0<\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，所以 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}>1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$，所以 $c>a$，所以 $c>a>b$. 故选 D.

13. 1　画出可行域(如图阴影部分)，当直线 $z=2x-y$ 过点 A 时，z 取得最大值，易求得 A 的坐标为 $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$，所以 $z_{max}=1$.

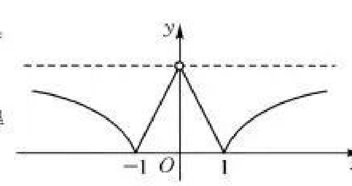


14. e　由题意知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率等于 3，又 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+2x$，所以 $f'(1)=\frac{1}{\ln a}+2=3$，所以 $a=e$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　连接 B_1D，取 B_1D 中点 F，连接 A_1F，EF，则 $EF /\!/ CD$，所以 $\angle A_1EF$ 为 CD 与 A_1E 所成的角(或其补角). 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AB 的中点，易证 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1，从而可得 $EF\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $A_1F\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $EF\perp A_1F$，不妨设 $AB=2$，则 $CD=\sqrt{3}$，$B_1D=\sqrt{5}$，所以 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B_1F=\frac{\sqrt{5}}{2}$，又 $\cos\angle A_1B_1F=\cos\angle B_1DB=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $A_1F=\sqrt{A_1B_1^2+B_1F^2-2A_1B_1\cdot B_1F\cos\angle A_1B_1F}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，所以 $A_1E=\sqrt{A_1F^2+EF^2}=2$，所以 $\cos\angle A_1EF=\frac{EF}{A_1E}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



16. $-2<b<0$ 且 $c=0$　显然 $f(x)$ 为偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-2x+2, 0<x<1,\\ 2-\frac{2}{x}, x\geq 1,\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象，利用偶函数的对称性，易得 $f(x)$ 在其定义域上的图象(如图所示)；设 $f(x)=t$，则原方程变为 $t^2+bt+c=0$，所以原方程有 6 个不同的实数解的充要条件是方程 $t^2+bt+c=0$ 的两根 t_1,t_2 满足 $t_1=0$ 且 $0<t_2<2$；又 $t_1=0$ 时 $c=0$ 且 $t_2=-b$，而 $\Delta=b^2-4c$，则问题等价于 $\begin{cases}b^2-4c>0,\\0<-b<2,\\c=0,\end{cases}$ 所以 $-2<b<0$ 且 $c=0$.



17. 解：(1)令 $\ln y=u$，由 $y=e^{a+bx}$，得 $\ln y=a+bx$，即 $u=a+bx$，……………………………………

$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$，$\bar{u}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}u_i}{6}=\frac{29.299}{6}\approx 4.883$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$，………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iu_i-6\bar{x}\bar{u}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}\approx\frac{109.066-6\times\frac{7}{2}\times 4.883}{91-6\times\frac{49}{4}}\approx 0.373$，………………………… 4 分

所以 $\hat{a}=\bar{u}-\hat{b}\bar{x}\approx 4.883-0.373\times\frac{7}{2}=3.5775$，故 $\hat{b}\approx 0.37$，$\hat{a}\approx 3.58$，………………………… 5 分

所以 $\ln\hat{y}=3.58+0.37x$，所以 $\hat{y}=e^{3.58+0.37x}$ ………………………… 6 分

（注：如果学生在求 $\hat{b}$ 时已按题目要求精确到 0.01，此时求出 $\hat{a}\approx 3.59$，可酌情给分）

(2) $\bar{y}=\frac{51+79+121+130+237+353}{6}\approx 161.8$，………………………… 7 分

由题意知，过关时间低于 161.8 秒的为第 1，2，3，4 关，记作 a,b,c,d，超过 161.8 秒的为第 5，6 关，记作 A,B，

从中任取两个的基本事件有 $ab,ac,ad,aA,aB,bc,bd,bA,bB,cd,cA,cB,dA,dB,AB$，共 15 个；………………………… 8 分

其中均低于 161.8 秒的有 ab,ac,ad,bc,bd,cd，共 6 个，………………………… 10 分

故所求概率 $P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. ………………………… 12 分

18. 解：(1) 因为 $(a-b)(\sin A+\sin B)=c(\sqrt{3}\sin A-\sin C)$，

由正弦定理，得 $(a-b)(a+b)=c(\sqrt{3}a-c)$，即 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，………………………… 2 分

所以由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，………………………… 4 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. ………………………… 6 分

(2) 因为 $A=\frac{\pi}{4}$，$b=2$，$B=\frac{\pi}{6}$，

所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}$，………………………… 8 分

则 $C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$，$\sin C=\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，………………………… 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{3}+1$. ………………………… 12 分

19. (1) 证明：延长 FM 与 DA 的延长线交于点 N，连接 CN 交 AB 于点 H，连接 FH，因为平面 α // 平面 $ABCD$，且 E 为 PA 的中点，所以 $EF//AD$，$FG//CD$，$AD=2EF$，$CD=2FG$，………………………… 2 分

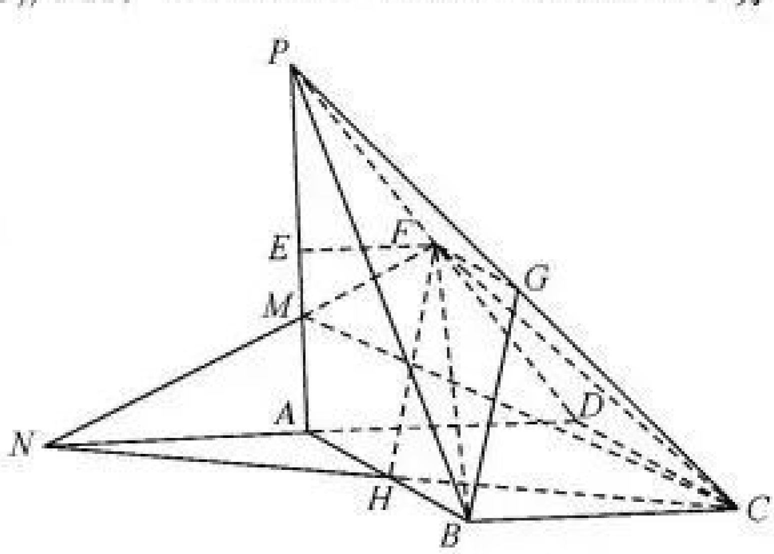
又 $AM=2ME$，所以 $AN=2EF=AD$，………………………… 3 分

又 $AB//CD$，所以 H 为 AB 的中点，所以 $BH//CD$，且 $CD=2BH$，………………………… 4 分

所以 $FG//BH$，且 $FG=BH$，所以四边形 $BHFG$ 为平行四边形，所以 $BG//FH$，………………………… 5 分

又 $FH\subset$ 平面 CFM，$BG\not\subset$ 平面 CFM，来源：高三答案公众号

所以 $BG//$ 平面 CFM. ………………………… 6 分



(2) 解法 1：由 (1) 知 G 到平面 CFM 的距离，即为 B 到平面 CHF 的距离，

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=6$，F 为 PD 的中点，

所以点 F 到平面 BCH 的距离为 3，………………………… 7 分

所以 $V_{三棱锥F-BCH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 2\times 3=4$，………………………… 8 分

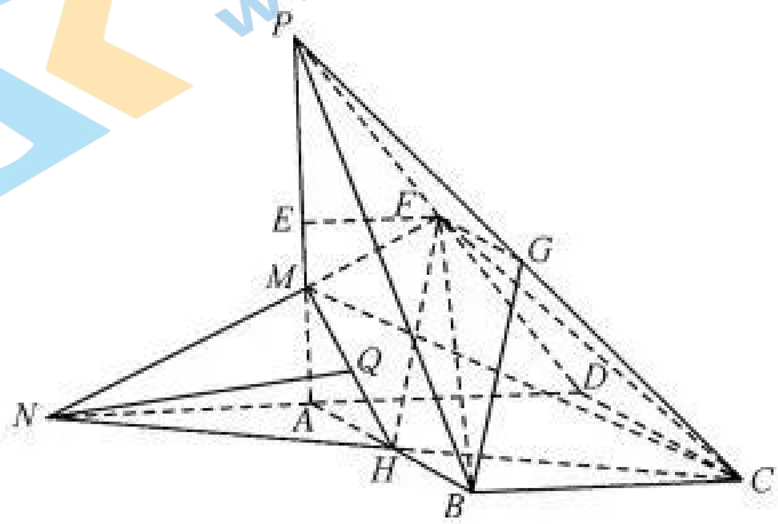
连接 FA，易求 $FH=\sqrt{17}$，$CH=2\sqrt{5}$，$CF=\sqrt{29}$，所以 $\cos\angle FHC=\frac{17+20-29}{2\sqrt{17}\times 2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{85}}$，………………………… 9 分

所以 $\sin\angle FHC=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right)^2}=\frac{9}{\sqrt{85}}$， ……………………………………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle FHC}=\frac{1}{2}FH\cdot CH\sin\angle FHC=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times 2\sqrt{5}\times\frac{9}{\sqrt{85}}=9$，……………………………………………… 11 分

设 B 到平面 FHC 的距离为 h，则 $V_{三棱锥B\text{-}FHC}=\frac{1}{3}\times 9h=4$，所以 $h=\frac{4}{3}$，

即点 G 到平面 CFM 的距离为 $\frac{4}{3}$． ……………………………………………………………………………… 12 分



解法 2：由(1)知 G 到平面 CFM 的距离，即为 B 到平面 CFM 的距离，

又因为 H 为 AB 的中点，所以 A 到平面 CFM 的距离等于 B 到平面 CFM 的距离，来源：高三答案公众号

即 A 到平面 MNH 的距离等于 G 到平面 CFM 的距离． ………… 7 分

连接 MH，取 MH 的中点 Q，连接 NQ．

因为 $MH=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$NM=NH=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

所以 $NQ\perp MH$，所以 $NQ=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$．

所以 $S_{\triangle MNH}=\frac{1}{2}MH\cdot NQ=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$． ……………………………………………… 9 分

设 A 到平面 MNH 的距离为 h，则 $V_{三棱锥A\text{-}MNH}=V_{三棱锥M\text{-}ANH}$， ……………………………………… 10 分

即 $\frac{1}{3}\times 6h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 4\right)\times 2$，所以 $h=\frac{4}{3}$，

即点 G 到平面 CFM 的距离为 $\frac{4}{3}$． ……………………………………………………………………………… 12 分

20．解：(1)设 C 的焦距为 $2c$，由题意知 $\begin{cases}(a+c)-(a-c)=2\sqrt{3},\\ \frac{2b^2}{a}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ……………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ ………………………………………………………………………………………… 4 分

故 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$． ………………………………………………………………………………… 5 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y 整理得 $(k^2+4)x^2+2mkx+m^2-4=0$， ……………………………………………………………… 6 分

所以 $\Delta=4m^2k^2-4(k^2+4)(m^2-4)>0$，即 $k^2-m^2+4>0$，

且 $x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{m^2-4}{k^2+4}$． ……………………………………………………………… 7 分

因为点 P 是线段 MN 靠近点 N 的四等分点，

所以 $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{PN}$，所以 $x_1=-3x_2$，

所以 $3(x_1+x_2)^2=3\times(-2x_2)^2=-4x_2\times(-3x_2)=-4x_1x_2$，

所以 $3(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=0$， ……………………………………………………………………………… 8 分

所以 $\frac{12k^2m^2}{(k^2+4)^2}+\frac{4(m^2-4)}{k^2+4}=0$，

整理得 $m^2k^2+m^2-k^2-4=0$， ……………………………………………………………………………… 分

显然 $m^2=1$ 不成立，所以 $k^2=\dfrac{4-m^2}{m^2-1}$，

因为 $k^2-m^2+4>0$，所以$\dfrac{4-m^2}{m^2-1}-m^2+4>0$，即$\dfrac{(4-m^2)m^2}{m^2-1}>0$. ………………………………………………… 10 分

解得 $-2<m<-1$，或 $1<m<2$，

所以实数 m 的取值范围为 $(-2,-1)\cup(1,2)$. ………………………………………………………………………… 12 分

21.(1)解：法一：因为 $f(x)=x^3-ax^2$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geq 0$，所以 $f(x)$ 单调递增，没有极值，不合题意. ………………………………………… 1 分

当 $a<0$ 时，在区间 $\left(-\infty,\dfrac{2a}{3}\right)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在区间 $\left(\dfrac{2a}{3},0\right)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f(0)=0$，不合题意. ……………………………………………………………… 3 分

当 $a>0$ 时，在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，在区间 $\left(0,\dfrac{2a}{3}\right)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在区间 $\left(\dfrac{2a}{3},+\infty\right)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以当 $x=\dfrac{2a}{3}$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f\left(\dfrac{2a}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}a^3=-4$.

所以 $a=3$. …… 5 分

法二：因为 $f(x)=x^3-ax^2$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2}{3}a$. 而 $f(x_1)=f(0)=0\neq -4$，所以 $f(x)$ 的极小值只可能在 $x_2=\dfrac{2}{3}a$ 处取到.

令 $f\left(\dfrac{2a}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}a^3=-4$，得 $a=3$.

当 $a=3$ 时，$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，所以在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $x=\dfrac{2}{3}a=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

且 $f(x)$ 的极小值为 -4，

所以 $a=3$. …… 5 分

(2)证明：由(1)知，在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以不妨设 $0<x_1<2<x_2<3$. …… 6 分

下面先证 $x_1+x_2<4$.

即证 $x_1<4-x_2$，因为 $0<x_1<2<x_2<3$，所以 $1<4-x_2<2$，

又因为在区间 $(0,2)$ 上，$f(x)$ 单调递减，

只要证 $f(x_1)>f(4-x_2)$， ………………………………………………………………………………………… 7 分

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，

只要证 $f(x_2)>f(4-x_2)$，只要证 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$. ………………………………………………………… 8 分

设 $g(x)=f(x)-f(4-x)=2x^3-12x^2+24x-16$，

则当 $x\in(2,3)$ 时，$g'(x)=6x^2-24x+24=6(x-2)^2>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(2)=0$，所以 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$. ………………………………………………………………… 9 分

下面证 $3<x_1+x_2$.

设 $h(x)=2x^2-6x$，因为 $f(x)-h(x)=x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$，

在区间 $(0,2)$ 上，$f(x)>h(x)$；在区间 $(2,3)$ 上，$f(x)<h(x)$.

设 $x_3\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，$f(x_1)=h(x_3)=t$，因为 $f(x_1)>h(x_1)$，

所以 $h(x_3)>h(x_1)$，所以 $x_3<x_1$. ………………………………………………………………………… 10 分

设 $x_4\in(2,3)$，$f(x_2)=h(x_4)=t$，因为 $f(x_2)<h(x_2)$，

所以 $h(x_2)>h(x_4)$，所以 $x_4<x_2$.

因为 $h(x_3)=h(x_4)=t$，所以 $x_3+x_4=3$，

所以 $3=x_3+x_4<x_1+x_2$. 综上，$3<x_1+x_2<4$. ………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)因为曲线 C_1 的极坐标方程 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2$，

又 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，可得 $x^2+y^2=2x+2$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=3$. ………………………………………………… 2 分

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$，即 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=3$，……………………………… 3 分

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-3=0$，C_2 是过点 $(3,0)$，斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，即倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线. ……… 4 分

直线 C_2 的一个参数方程为 $\begin{cases}x=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). ………………………………………… 5 分

(2)设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，

把直线 C_2 的参数方程代入 $(x-1)^2+y^2=3$，可得 $t^2+2\sqrt{3}t+1=0$，…………………………………… 6 分

$\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times1\times1=8>0$，

所以 $t_1+t_2=-2\sqrt{3}$，$t_1t_2=1>0$. ………………………………………………………………………… 8 分

故 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=$ [illegible] ………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=\begin{cases}1-2x,x<0,\\ 1,0\leqslant x\leqslant1,\\ 2x-1,x>1,\end{cases}$ ………………………………………………………… 1 分

不等式 $f(x)<8$ 等价于 $\begin{cases}1-2x<8,\\ x<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<8,\\ 0\leqslant x\leqslant1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1<8,\\ x>1,\end{cases}$ ………………………………………… 4 分

解得 $-\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$，故不等式 $f(x)<8$ 的解集为 $\left(-\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$. ………………………………………… 5 分

(2)因为 $y=f(x)-|x|-|x-2|=|x-1|-|x-2|\leqslant|(x-1)-(x-2)|=1$，当且仅当 $x\geqslant2$ 时等号成立，故 $m=1$，……………………………………………………………………………………………… 6 分

所以 $a+2b=1$，………………………………………………………………………………………… 7 分

所以 $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}=\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}\right)\cdot\frac{(2a+b)+(a+5b)}{3}=\frac{1}{3}\left[1+4+\frac{a+5b}{2a+b}+\frac{4(2a+b)}{a+5b}\right]$

$\geqslant\frac{1}{3}\left[5+2\sqrt{\frac{a+5b}{2a+b}\cdot\frac{4(2a+b)}{a+5b}}\right]=\frac{1}{3}\times(5+4)=3$，……………………………… 9 分

当且仅当 $\frac{a+5b}{2a+b}=\frac{4(2a+b)}{a+5b}$，即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时等号成立，

故 $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}$ 的最小值为 3. ……………………………………………………………… 10 分