

人大附中 2020 届高三上学期数学统练三

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.函数: $y = x - \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ 的值域为 【 】

A. $[2, +\infty)$

B. $\mathbb{R}$

C. $[0, +\infty)$

D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

2.下列函数中，在区间 $(-1, 1)$ 上为减函数的是 【 】

A. $y = \frac{1}{1-x}$

B. $y = \cos x$

C. $y = \ln(x+1)$

D. $y = 2^{-x}$

3.设 $a = \sin 42^\circ, b = \cos 46^\circ, c = 2^{\frac{1}{2}}$ ，则 【 】

A. $c < a < b$

B. $b < c < a$

C. $a < b < c$

D. $b < a < c$

4. $\cos \alpha \neq \frac{1}{2}$ 是 $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$ 的 【 】

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5.已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}, \theta \in (0, \pi)$ ，则 $\cot \theta$ 的值为 【 】

A. $\frac{3}{4}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $-\frac{4}{3}$

6.设函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$ ， $x_0 (x_0 \neq 0)$ 是 $f(x)$ 极大值点，以下结论一定正确的是 【 】

A. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x_0)$

B. $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

C. $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点

D. $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

7.如图,点 O 为坐标原点,点 $A(1,1)$.若函数 $y=a^x$ ($a>0$,且 $a\neq 1$) 及 $y=\log_b x$ ($b>0$,且 $b\neq 1$) 的图像与线段 OA 分别交于点 M, N , 且 M, N 恰好是线段 OA 的两个三等分点, 则 a, b 满足 【 】

A. $a < b < 1$

B. $b < a < 1$

C. $b > a > 1$

D. $a > b > 1$

8.已知函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+1}$. 下列命题:

①函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称;

②函数 $f(x)$ 是周期函数

③当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取最大值; ④函数 $f(x)$ 的图像与函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像没有公共点.

其中正确命题的个数是

【 】

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. $\lg^2 2 + \lg 2 \lg 5 + \lg 5 =$ _____.

10. 已知命题 $p: \exists x \in R, ax^2 + 2ax + 1 \leq 0$, 若命题 $\neg p$ 是真命题, 则实数的取值范围是 _____.

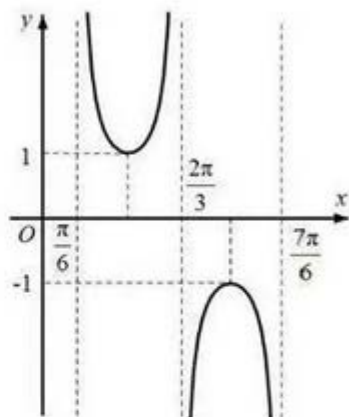
11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知角 α 的终边经过点 $P(4, -3)$, 则:

(1) $\tan 2\alpha =$ _____; (2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ (其中 φ 为实数). 若 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x \in R$ 恒成立, 则满足条件的 φ 的值为 _____ (写出满足条件的一个 φ 值即可).

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x+1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 则方程 $f(x) = ax$ 恰有两个不同的实数根时, 实数 a 的取值范围是 _____.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sin(\omega x + \varphi)}$ (其中 $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示, 则 $\omega =$ _____, $\varphi =$ _____.



三、解答题共 3 小题, 共 30 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$, 求 m 的最小值.

16. 已知函数 $f(x) = (x^2 - a)e^x, a \in \mathbb{R}$.

(I) 当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若在区间 $[1, 2]$ 上存在不相等的实数 m, n , 使 $f(m) = f(n)$ 成立, 求 a 的取值范围;

(III) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 求证: $f(x_1)f(x_2) < 4e^{-2}$.

17. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 记集合 $E_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $P_n = \left\{ x \mid x = \frac{a}{\sqrt{b}}, a \in E_n, b \in E_n \right\}$

若集合 A 满足下列条件:

① $A \subseteq P_n$; ② $\forall x_1, x_2 \in A$, 且 $x_1 \neq x_2$, 不存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使 $x_1 + x_2 = k^2$, 则称 A 具有性质 Ω .

如当 $n=2$ 时, $E_2 = \{1, 2\}$, $P_2 = \left\{ 1, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right\}$

$\forall x_1, x_2 \in P_2$, 且 $x_1 \neq x_2$, 不存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使 $x_1 + x_2 = k^2$, 所以 P_2 具有性质 Ω .

(I) 写出集合 P_3, P_3 中的元素个数, 并判断 P_3 是否具有性质 Ω

(II) 证明: 不存在 A, B 具有性质 Ω , 且 $A \cap B = \emptyset$, 使 $E_{15} = A \cup B$

(III) 若存在 A, B 具有性质 Ω , 且 $A \cap B = \emptyset$, 使 $P_n = A \cup B$, 求 n 的最大值