天一大联考
2023—2024 学年(上)高二年级期末考试
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查抛物线的准线.

解析 因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$,故选 A.

2. 答案 B

命题意图 本题考查等比数列的性质.

解析 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q,则 $q=2$,$a_1+a_3=a_1(1+q^2)=5a_1=25$,所以 $a_1=5$,所以 $a_5=a_1q^4=5\times16=80$.

3. 答案 B

命题意图 本题考查直线与直线垂直.

解析 若 $l_1\perp l_2$,则有 $a(3a-2)+3a=0$,解得 $a=0$ 或 $a=-\frac{1}{3}$.

4. 答案 C

命题意图 本题考查导数的概念和计算.

解析 由题意知 $s=100t-5t^2$,则 $s'=100-10t$,当 $t=10$ 时,$s'=0$,即瞬时速度为 0 m/s.

5. 答案 C

命题意图 本题考查数列的求和.

解析 因为 $a_n+a_{n+1}=2$,所以 $S_{2\,025}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2\,024}+a_{2\,025})=a_1+2\times1\,012=2\,027$,所以 $a_1=3$.

6. 答案 A

命题意图 本题考查空间向量的线性运算.

解析 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=4$,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=6$.

7. 答案 D

命题意图 本题考查导数的计算、抛物线的性质.

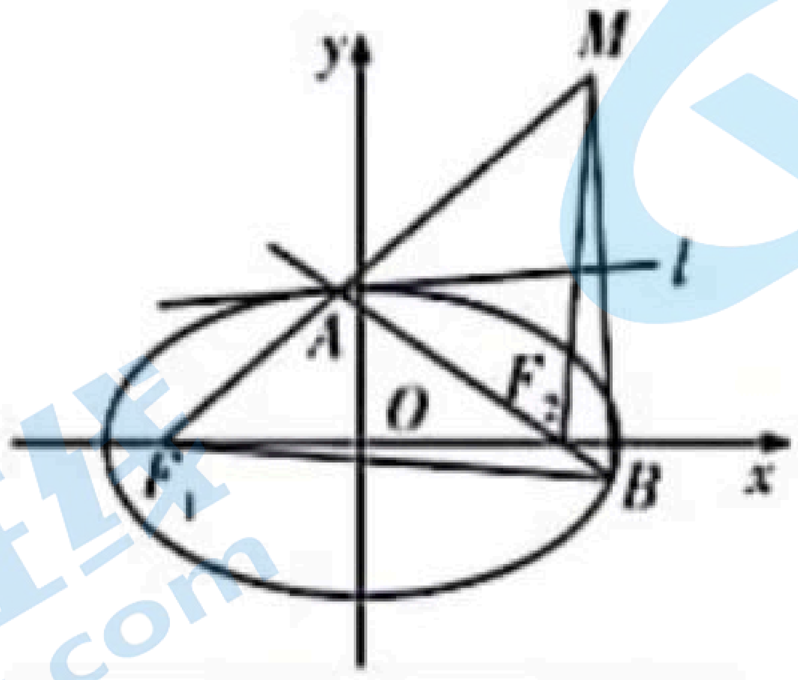
解析 由题可知抛物线方程为 $x^2=4y$,即 $y=\frac{1}{4}x^2$,则 $y'=\frac{1}{2}x$,$y''=\frac{1}{2}$,则该抛物线在各点处的曲率 $K=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$,当 $x=0$ 时,K 取最大值 $\frac{1}{2}$.

8. 答案　C

命题意图　本题考查椭圆与直线的位置关系.

解析　如图,由椭圆的光学性质可得 M,A,F_1 三点共线. 设 $|BF_2|=x$,则 $|BF_1|=2a-x$, $|MF_1|=|AF_1|+|MA|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_2|=2a+x$. 故 $\frac{|BF_1|}{|MF_1|}=\frac{2a-x}{2a+x}=\frac{2}{3}$,解得 $x=\frac{2a}{5}$. 又 $|AB|=\frac{8a}{5}$,所以 $|AF_2|=\frac{6a}{5}$, $|AF_1|=\frac{4a}{5}$,

所以 $\frac{S_{\triangle MF_1F_2}}{S_{\triangle AF_1F_2}}=\frac{|MF_1|}{|AF_1|}=3$.



二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 答案　AC

命题意图　本题考查数列的性质.

解析　$a_2=S_2-S_1=3$,故 A 正确;当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$,当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=4$,不适合上式,故 B 错误;$\{a_n\}$ 从第 2 项开始为等差数列,所以其偶数项构成等差数列,故 C 正确;因为 $a_1=4>a_2=3$,故 D 错误.

10. 答案　ABC

命题意图　本题考查圆锥曲线的方程与性质.

解析　当 $m<2$ 时, $\begin{cases}2-m>0,\\6-m>0,\end{cases}$ 方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{6-m}=1$ 表示的曲线是椭圆,故 A 正确;当 $m=3$ 时,方程为 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$,故 B 正确;令 $\frac{1}{2-m}+\frac{1}{6-m}=1$,整理得 $m^2-6m+4=0$ ($m\neq 2$ 且 $m\neq 6$),此方程有解,故 C 正确;当 $m=4$ 时,曲线 C 为双曲线 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$,直线 $y=x$ 为 C 的一条渐近线,此时无交点,故 D 错误.

11. 答案　ACD

命题意图　本题考查圆的方程,圆与圆的位置关系.

解析　圆 $O_1:(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $O_1(1,0)$,半径 $r_1=1$,圆 $O_2:(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心为 $O_2(-1,2)$,半径 $r_2=2$.

对于 A,显然圆 O_2 与 x 轴相切,故 A 正确;

对于 B,易知两圆相交,将方程 $x^2+y^2-2x=0$ 与 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 相减,得公共弦所在直线的方程为 $4x-4y+1=0$,故 B 错误;

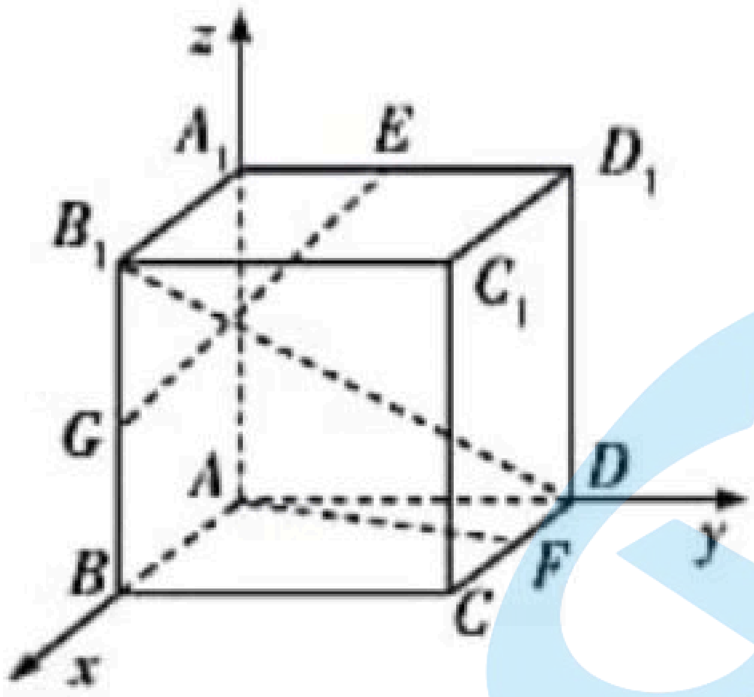
对于 C,两圆相交,所以两圆的公切线只有两条,又因为两圆半径不相等,所以公切线交于一点 P,即过点 P 可以作出两条与两圆都相切的直线,故 C 正确;

对于 D,因为 $|O_1O_2|=2\sqrt{2}$, $r_2-r_1=1$,所以公切线段长为 $\sqrt{|O_1O_2|^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{7}$,故 D 正确.

12. **答案** AD

命题意图 本题考查空间向量在立体几何中的应用.

解析 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.



对于 A,易知 $A(0,0,0)$,$F\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,$G(1,0,m)$($m\in[0,1]$),所以$\overrightarrow{EG}=\left(1,-\frac{1}{2},m-1\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EG}=0$,所以 $EG\perp AF$,故 A 正确;

对于 B,易得$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$,则$\overrightarrow{AD_1}$在$\overrightarrow{AF}$方向上的投影向量的模为$\frac{|\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,则点 D_1 到直线 AF 的距离为$\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{5}$,故 B 错误;

对于 C,易知平面 ACD_1 的一个法向量为$\overrightarrow{B_1D}=(-1,1,-1)$,而$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{B_1D}=-\frac{1}{2}-m\neq 0$,故 C 错误;

对于 D,因为 $BC\perp$平面 ABB_1A_1,$PB\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $PB\perp BC$,点 P 到直线 BC 的距离即点 P 到点 B 的距离,所以 P 点的轨迹是以 B 为焦点,A_1B_1 所在直线为准线的抛物线的一部分,故 D 正确.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $y=e(x-1)$

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 设$f(x)=e^x\ln x$,则$f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$,所以$f'(1)=e$,所以曲线 $y=e^x\ln x$ 在点$(1,0)$处的切线方程为 $y=e(x-1)$.

14. **答案** $\pm\sqrt{2}$

命题意图 本题考查直线的方向向量.

解析 设 l_1,l_2 所成的角为 θ. 由题意知 $\cos\theta=\frac{|1-3|}{\sqrt{2+m^2}\cdot\sqrt{1+9}}=\frac{2}{\sqrt{2+m^2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,解得 $m=\pm\sqrt{2}$.

15. **答案** $\sqrt{3}+1$

命题意图 本题考查双曲线与直线的位置关系.

解析 设双曲线的半焦距为 $c(c>0)$,则 $c^2=a^2+b^2$. 因为 $PF_1\perp PF_2$,所以 $|PO|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$,在$\triangle POF_2$ 中,$\angle POF_2=\frac{\pi}{3}$,$|PO|=|OF_2|$,所以$\triangle POF_2$ 为等边三角形,所以$|PF_2|=c$,根据双曲线定义可得$|PF_1|=2a+c$,在 Rt$\triangle PF_1F_2$ 中,由勾股定理可得$(2a+c)^2+c^2=4c^2$,整理得$\frac{c}{a}=\sqrt{3}+1$,所以 C 的离心率为$\sqrt{3}+1$.

16. **答案** $\frac{17}{12}$

命题意图 本题考查数列的综合性质.

解析 由题意可得 $S_n=2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，当 n 为奇数时，$S_n=2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，随着 n 值的增大而减小，所以 $S_n=2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\in(2,3]$，当 n 为偶数时，$S_n=2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，随着 n 值的增大而增大，所以 $S_n=2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\in\left[\frac{3}{2},2\right)$，所以 $S_n\in\left[\frac{3}{2},2\right)\cup(2,3]$，又因为函数 $y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$ 在 $\left[\frac{3}{2},3\right]$ 上单调递增，所以当 $x\in\left[\frac{3}{2},2\right)\cup(2,3]$ 时，$y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\in\left[-\frac{7}{12},0\right)\cup\left(0,\frac{5}{6}\right]$，所以 $q\geqslant\frac{5}{6}$，$p\leqslant-\frac{7}{12}$，所以 $q-p$ 的最小值为 $\frac{17}{12}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等比数列与等差数列的性质、等差数列求和.

解析 （Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 a_2,a_3,a_1 成等差数列，所以 $2a_3=a_2+a_1$，……（1 分）

即 $2q^2=q+1$，解得 $q=-\frac{1}{2}$ 或 1（舍去）. ……（3 分）

所以 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. ……（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $\{b_n\}$ 的前三项为 $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1$，……（6 分）

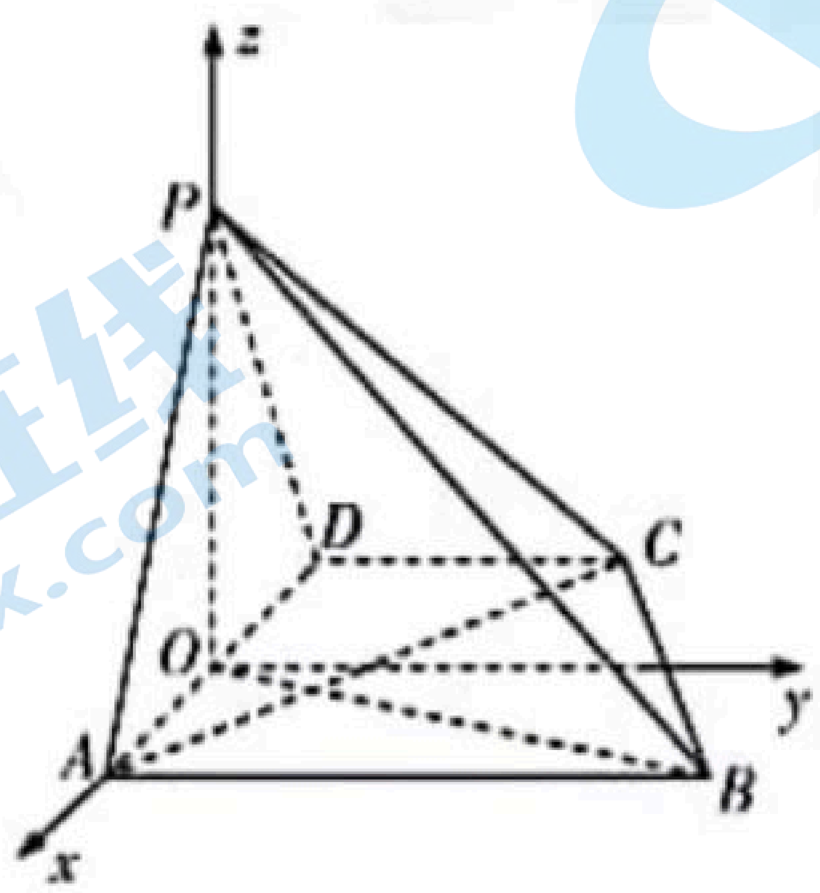
所以 $b_n=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n-\frac{5}{4}$，……（7 分）

所以 $4b_n=3n-5$. ……（8 分）

所以 $S_n=\frac{(-2+3n-5)n}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n$. ……（10 分）

18. **命题意图** 本题考查空间向量在立体几何中的应用.

解析 由题可知 OP,AD,AB 两两互相垂直，所以以 OA 所在直线为 x 轴，过 O 与 AB 平行的直线为 y 轴，OP 所在直线为 z 轴建立如图的空间直角坐标系. ……（1 分）



（Ⅰ）易知 $A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$. ……（2 分）

所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,2,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$. ……（4 分）

所以 $AC\perp PB$. ……（5 分）

(Ⅱ)因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PO\perp AC$. …………(6分)

由(Ⅰ)知 $AC\perp PB$,又 $PB\cap PO=P$,

所以 $AC\perp$ 平面 POB,即 $\overrightarrow{AC}=(-2,1,0)$ 是平面 POB 的一个法向量. …………(8分)

又因为 $\overrightarrow{PC}=(-1,1,-\sqrt{3})$, …………(9分)

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{2+1}{\sqrt{4+1+0}\times\sqrt{1+1+3}}=\dfrac{3}{5}$, …………(11分)

所以直线 PC 与平面 POB 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{5}$. …………(12分)

19. **命题意图** 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由题意可知圆 C 的圆心为 $C(a,0)$,半径 $r=|a-1|$. …………(1分)

因为 $\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$,$AP\perp AC$,所以 $\angle APC=\dfrac{\pi}{6}$,从而 $|PC|=2|AC|=2r$, …………(3分)

即 $\sqrt{(a-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2|a-1|$,两边平方整理得 $a^2-2a=0$,

又因为 $a>0$,所以 $a=2$. …………(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$,点 $D(1,0)$ 在圆 C 上,

又因为 $MD\perp ND$,所以线段 MN 为圆 C 的直径,即直线 MN 过圆心 $(2,0)$,

显然直线 MN 的斜率不为 0,设其方程为 $x-2=ty$, …………(7分)

点 $D(1,0)$ 到直线 MN 的距离为 $d=\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1+t^2}}$. …………(8分)

根据三角形的面积公式可得 $d=\dfrac{|MD||ND|}{|MN|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. …………(9分)

所以 $\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $t=\pm1$, …………(11分)

所以直线 MN 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$. …………(12分)

20. **命题意图** 本题考查数列的递推关系以及数列求和.

解析 (Ⅰ)在 $2S_na_n=a_n^2+1$ 中,令 $n=1$,得 $S_1=1$, …………(2分)

当 $n\geqslant2$ 时,由 $2S_na_n=a_n^2+1$,得 $2S_n(S_n-S_{n-1})=(S_n-S_{n-1})^2+1$, …………(4分)

整理得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geqslant2)$, …………(5分)

所以数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 1,公差为 1 的等差数列. …………(6分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $S_n^2=1+(n-1)\times1=n$. …………(7分)

所以 $T_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$①,

$2T_n=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$②, …………(9分)

①-②,得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$, …………(11分)

所以 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$. …………(12分)

21. **命题意图** 本题考查立体几何综合问题以及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h.

因为 $AB\perp BC$, $\angle CAB=\frac{\pi}{3}$, $AC=2$,

所以 $AB=1$, $BC=\sqrt{3}$, $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………………（2 分）

因为 $V_{C_1-ABC}=\frac{1}{3}h\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$, ……………………………………………………………………（3 分）

所以 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………（5 分）

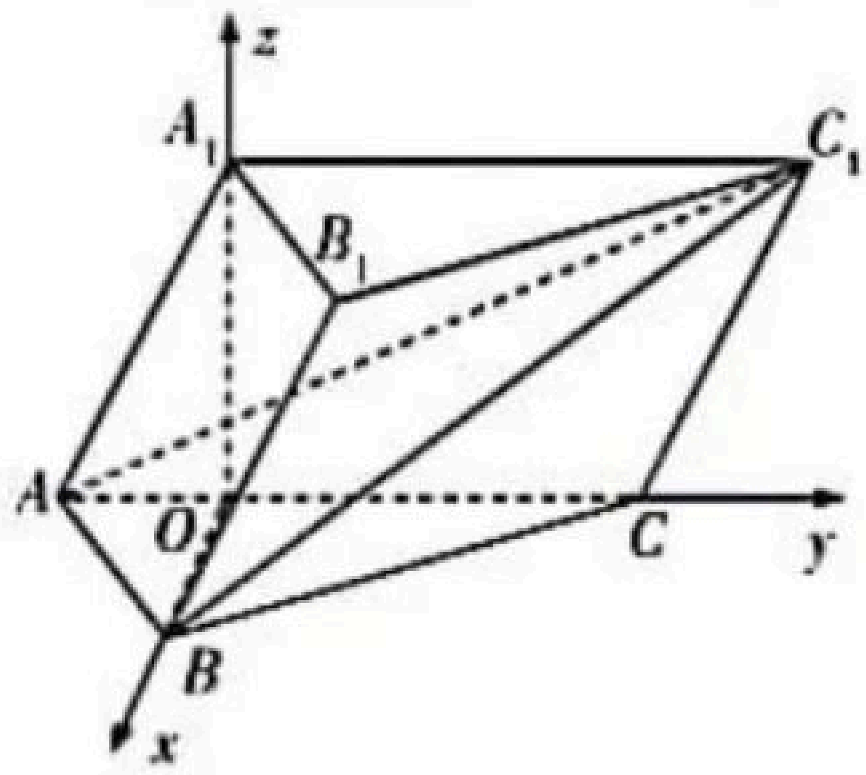
（Ⅱ）过点 A_1 作 $A_1O\perp AC$ 于点 O，连接 BO.

因为平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$，所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC.

由（Ⅰ）知 $A_1O=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $AA_1=1$，$\angle A_1AC$ 为锐角，所以 $AO=\frac{1}{2}$. ……………………………（6 分）

在 $\triangle ABO$ 中，$AB=1$, $AO=\frac{1}{2}$, $\angle OAB=\frac{\pi}{3}$，所以 $BO\perp AC$.

以 O 为坐标原点，分别以 OB, OC, OA_1 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. ………（7 分）



则 $A\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$, $C_1\left(0,2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $\overrightarrow{BC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+2y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},5)$. ……………………………（9 分）

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. ……………………………………………………………（10 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$.

所以二面角 C_1-AB-C 的余弦值为$\frac{5\sqrt{29}}{29}$. ……………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查椭圆的性质、椭圆与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）依题意可得 $B(a,0)$, $b=1$, ……………………………………………………………………（1 分）

由$\frac{1-0}{0-a}=-\frac{1}{2}$，得 $a=2$, ……………………………………………………………………………（3 分）

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）易知 l 不与 x 轴平行，设其方程为 $my=x-t(t\neq 2)$，

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\ x=my+t,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$. ……………………………………（5 分）

由 $\Delta=4m^2t^2-4(m^2+4)(t^2-4)=16m^2-16t^2+64>0$，得 $t^2<m^2+4$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2+4}$①. ……………………………（6 分）

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{QB}=(2-x_1)(2-x_2)+y_1y_2=0$，即 $(my_1+t-2)(my_2+t-2)+y_1y_2=0$，

所以 $(m^2+1)y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2=0$.

将①代入，整理得 $5t^2-16t+12=0$，即 $(5t-6)(t-2)=0$，解得 $t=\frac{6}{5}$ 或 $t=2$（舍去）.

所以直线 l 的方程为 $my=x-\frac{6}{5}$，即直线 l 过定点 $\left(\frac{6}{5},0\right)$. ……………………………………（8 分）

$S_{\triangle PQB}=\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{6}{5}\right)\times|y_1-y_2|=\frac{2}{5}|y_1-y_2|=\frac{2}{5}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ ……………………（9 分）

$=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{12^2m^2}{25(m^2+4)^2}+\frac{4\times 64}{25(m^2+4)}}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{12^2m^2}{25(m^2+4)^2}+\frac{4\times 64(m^2+4)}{25(m^2+4)^2}}=\frac{8}{25}\sqrt{\frac{25m^2+64}{(m^2+4)^2}}$. …………（10 分）

令 $n=m^2+4$，则 $n\geqslant 4$，$\frac{1}{n}\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

$S_{\triangle PQB}=\frac{8}{25}\sqrt{\frac{25(n-4)+64}{n^2}}=\frac{8}{25}\sqrt{-\frac{36}{n^2}+\frac{25}{n}}\in\left(0,\frac{16}{25}\right]$.

当 $\frac{1}{n}=\frac{1}{4}$，即 $n=4$ 时，$S_{\triangle PQB}$ 最大，且最大值为 $\frac{16}{25}$. ……………………………………（12 分）