高三数学试卷参考答案

1. B　因为存在量词命题的否定是全称量词命题，所以选 B.

2. B　因为 $3a+b=(\frac{3}{a}+\frac{1}{b})(3a+b)=10+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 10+2\sqrt{9}=16$，当且仅当 $a=4,b=4$ 时，等号成立，所以选 B.

3. A　因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 是奇函数，所以 $f(0)=\sin\varphi=0$，所以 $\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=0$，则 $f(x)=\sin\omega x$，$g(x)=\sin\frac{\omega x}{2}$. 由 $\frac{2\pi}{\frac{\omega}{2}}=2\pi$，得 $\omega=2$，所以 $f(\frac{\pi}{12})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

4. D　因为不等式 $ax^2+2ax-1<0$ 恒成立，所以 $a=0$ 或 $\begin{cases}a<0,\\4a^2+4a<0,\end{cases}$ 所以 $-1<a\leqslant 0$，以上各选项只有 $-1<a<0$ 是 $-1<a\leqslant 0$ 的充分不必要条件，故选 D.

5. C　因为 $f(-x)=\frac{2(-x)\sin(-x)}{(-x)^2+1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故而排除 A，B；因为当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}\leqslant\frac{2x\sin x}{2x}=\sin x\leqslant 1$，所以 $f(x)<1$，故选 C.

6. A　由题知曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，$y=-\frac{1}{x-1}$ 的图象也关于点 $(1,0)$ 对称，设函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{x-1}$ 的零点分别为 x_1,x_2，则 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，所以 $x_1+x_2=2$.

7. D　令 $x=1,y=0$，得 $2f(1)=2f(1)f(0)$，又 $f(1)=\frac{1}{2}$，所以 $f(0)=1$，故 A 错误；令 $x=0$，得 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$，$f(-y)=f(y)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 B 错误；令 $x=y=1$，得 $f(2)=-\frac{1}{2}$，所以 $f(-2)=-\frac{1}{2}$，故 C 错误；

令 $y=1$，得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$，又得 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$，两式相加得 $f(x+2)+f(x-1)=0$，即 $f(x+3)+f(x)=0$，$f(x+3)=-f(x)$，所以 $f(x+6)=f(x)$，即 $f(x)$ 的最小正周期是 6，故 D 正确.

8. D　不等式 $t(\sqrt{x}+\sqrt{y})\leqslant\sqrt{2x+2y}$ 对所有的正实数 x,y 恒成立，即 $t\leqslant\frac{\sqrt{2x+2y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 对所有的正实数 x,y 恒成立. 因为 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，所以 $2x+2y\geqslant x+2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$，所以 $\sqrt{2x+2y}\geqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$，则 $\frac{\sqrt{2x+2y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\geqslant 1$，故 $t\leqslant 1$.

9. BD　因为 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，所以 $A\cap B=\varnothing$，$B\subseteq\complement_{U}A$，B，D 正确，A，C 错误.

10. ACD　因为 $\alpha=\beta+\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\alpha=\sin(\beta+\frac{\pi}{2})=\cos\beta$，A 正确.

因为 $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=1-\cos 2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha=1+2\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})$，所以 B 错误. 将方程 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ 两边平方，得 $1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$，解得 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$，C 正确. 因为 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=2$，则 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+2}{1-1\times 2}=-3$，D 正确.

11. CD　设 $\omega x-\frac{\pi}{6}=t$，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $t\in(-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6})$. 因为 $f(x)$ 有两个零点，所以 $\pi<\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant 2\pi$，即 $\frac{7}{6}<\omega\leqslant\frac{13}{6}$. 又因为 $f(x)$ 有两个极值点，$(\sin t)'=\cos t$，所以 $y=\cos t$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6})$ 上有两个零点，所以 $\frac{3\pi}{2}<\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2}$，即 $\frac{5}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$，故 ω 的取值范围是 $(\frac{5}{3},\frac{13}{6}]$.

12. BD　①若 $ab=1$，则 $f(x)=a^x+\frac{1}{a^x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

②若 $ab>1$，$a>b>0$，则 $a>1$.

若 $b>1$，则函数 $f(x)$ 单调递增，它的值域为 $(0,+\infty)$，与题意矛盾，所以 $0<b<1$.

因为 $f(x)=a^x+b^x$，所以 $f'(x)=b^x[\ln b+(\frac{a}{b})^x\ln a]$，令 $g(x)=\ln b+(\frac{a}{b})^x\ln a$，因为 $\frac{a}{b}>1$，$\ln a>0$，$\ln b<0$，所以 $g(x)$ 单调递增，$g(0)=\ln(ab)>0$.

当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to\ln b$，

所以存在 $x_0\in(-\infty,0)$，使得 $g(x_0)=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,0)$ 上单调递增，此时函数 $f(x)$ 的最小值 $f(x_0)<2$，不符合题意.

③若 $ab<1$，$a>b>0$，则 $0<b<1$.

若 $0<a<1$，则函数 $f(x)$ 单调递减，它的值域为 $(0,+\infty)$，与题意矛盾，所以 $a>1$.

因为 $\frac{a}{b}>1$，$\ln a>0$，$\ln b<0$，所以由(2)知 $g(x)$ 单调递增，$g(0)=\ln(ab)<0$.

当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to\ln b$，

所以存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $g(x_0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，此时函数 $f(x)$ 的最小值 $f(x_0)<2$.

综上，可知 $ab=1$，因为 $a>b>0$，所以 $a>1$，$0<b<1$，即 $a>1>b$.

13. $\frac{2}{5}$　因为 $f'(x)=4f'(-1)\cdot x^3+2$，所以 $f'(-1)=4f'(-1)\times(-1)^3+2$，解得 $f'(-1)=\frac{2}{5}$.

14. 2　因为 $(\tan\alpha-1)(\tan\alpha+3)=0$，且 α 是第三象限角，所以 $\tan\alpha=1$，故

$\dfrac{4\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\cos(-\alpha)}=\dfrac{-4\sin\alpha}{-\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{4\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{4\tan\alpha}{\tan\alpha+1}=2.$

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　因为 $f'(x)=2x-1$，所以 $f''(x)=2$，从而 $f'(1)=1$，$f''(1)=2$，所以 $K=\dfrac{2}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

16. 65.5　由 $70=50\times(0.5+2^{-0.0001a})$，得 $2^{-0.0001a}=0.9$，所以当人口密度为 $2a$ 人/km² 时，他的行车速度 $v=50\times[0.5+(2^{-0.0001a})^2]=65.5$ km/h.

17. 解：(1)因为 $U=\{2,3,4,5\}$，$A=\{3,4\}$，………………………………………… 2分

所以 $\complement_U A=\{2,5\}$. ………………………………………………………… 3分

(2)因为 $(a^2+1)\in\complement_U A$，所以 $a^2+1=2$ 或 $a^2+1=5$. ……………………………… 4分

解得 $a=\pm1$ 或 $a=\pm2$. ………………………………………………………… 5分

又 $a\in U$，所以 $a=2$. …………………………………………………………… 6分

(3)若 $C=\{2\}$，则 C 的真子集只有 1 个，不符合题意. ………………………………… 8分

所以 $C=\{2,5\}$，即 $m^2=5$，解得 $m=\pm\sqrt{5}$. ………………………………………… 10分

18. 解：(1)因为 $f(x)=x^3-ax^2-x$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax-1$，…………………………… 1分

由 $f'(1)=2-2a=0$，解得 $a=1$. ……………………………………………………… 2分

$f(x)=x^3-x^2-x$，$f'(x)=3x^2-2x-1$. ……………………………………………… 3分

令 $3x^2-2x-1<0$，得 $-\frac{1}{3}<x<1$，可知 $f(x)$ 在 $[-1,-\frac{1}{3}]$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{3},1)$ 上单调递减，在 $[1,2]$ 上单调递增，……………………………………………………………… 4分

因为 $f(-\frac{1}{3})=\frac{5}{27}$，$f(2)=2$，且 $\frac{5}{27}<2$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 2. ………… 5分

(2)因为 $g(x)=4x+m$，所以 $y=f(x)-g(x)=x^3-x^2-5x-m$.

设 $h(x)=x^3-x^2-5x$，则 $h'(x)=3x^2-2x-5$，

令 $h'(x)>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>\frac{5}{3}$，令 $h'(x)<0$ 得 $-1<x<\frac{5}{3}$，………………………… 7分

所以 $h(x)$ 在 $(-1,\frac{5}{3})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$，$(\frac{5}{3},+\infty)$ 上单调递增，……………… 8分

所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的极大值为 $h(-1)=3$，极小值为 $h(\frac{5}{3})=-\frac{175}{27}$. ………………… 10分

又函数 $y=f(x)-g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有三个零点，所以函数 $h(x)=x^3-x^2-5x$ 与函数 $y=m$ 的图象有三个交点，

所以 $-\frac{175}{27}<m<3$，即实数 m 的取值范围为 $(-\frac{175}{27},3)$. ……………………………… 12分

19. 解：(1)因为质点 A，B 运动的角速度分别为 3 rad/s 和 5 rad/s，

所以 x s 时质点 A，B 的坐标分别为 $(\cos 3x,\sin 3x)$，$(\cos 5x,\sin 5x)$，……………… 3分

所以 $f(x)=\sqrt{(\cos 3x-\cos 5x)^2+(\sin 3x-\sin 5x)^2}=\sqrt{2-2\cos 3x\cos 5x-2\sin 3x\sin 5x}$，

即 $f(x)=\sqrt{2-2\cos 2x}=2|\sin x|(x\geqslant 0)$. ………………………………………… 6 分

(2)因为两质点从点 P 出发后每次相遇对应函数 $f(x)$ 的一个零点，

所以 x_n 为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上第 n 个零点，………………………………………… 8 分

由 $f(x_n)=2|\sin x_n|=0$，得 $\sin x_n=0$，………………………………………… 10 分

所以 $x_n=n\pi(n\in \mathbf{N}^*)$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意可得 $27000a+630=180$，解得 $a=-\frac{1}{60}$. ………………………………………… 2 分

当对甲项目投资 30 万元时，对乙项目投资 170 万元，

则 $-2a(170-b)^2=\frac{1}{30}(170-b)^2=120$，解得 $b=110$. ………………………………………… 4 分

设对甲项目的投资金额为 x 万元，则对乙项目的投资金额为 $200-x$ 万元，

则 $\begin{cases} x\geqslant 10, \\ 200-x\geqslant 10, \end{cases}$ 解得 $10\leqslant x\leqslant 190$. ………………………………………… 5 分

故 $f(x)=-\frac{1}{60}x^3+21x+\frac{1}{30}[(200-x)-110]^2=-\frac{1}{60}(x^3-2x^2-900x-16200)(10\leqslant x\leqslant 190)$. ………………………………………… 7 分

(2)设 $h(x)=x^3-2x^2-900x-16200(10\leqslant x\leqslant 190)$，$h'(x)=3x^2-4x-900=(3x+50)(x-18)$. ………………………………………… 8 分

当 $x\in[10,18)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(18,190]$ 时，$h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 在 $[10,18)$ 上单调递减，在 $(18,190]$ 上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h(18)=-27216$. ………………………………………… 10 分

故 $f(x)_{\max}=f(18)=453.6$，即对甲项目投资 18 万元，对乙项目投资 182 万元，才能使总收益 $f(x)$ 取得最大值 453.6 万元. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为函数 $y=\lg[g(x)]$ 的值域为 $\mathbf{R}$，所以 $y=g(x)$ 的值域要包含 $(0,+\infty)$，… 1 分

当 $m\leqslant 0$ 时，$\lg[g(x)]<\lg 3$，不符合题意，所以 $m>0$. ………………………………………… 2 分

$g(x)=m\cdot(2^x)^2-4\cdot 2^x+3$，令 $2^x=t(t>0)$，$h(t)=mt^2-4t+3$ 的值域要包含 $(0,+\infty)$，………………………………………… 3 分

所以 $\Delta\geqslant 0$，即 $16-12m\geqslant 0$，解得 $m\leqslant\frac{4}{3}$. 又因为 $m>0$，所以 $0<m\leqslant\frac{4}{3}$. ………………… 4 分

因为 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=1$. ………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-2,2)$ 的奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{a}{2}=0$，解得 $a=2$. ………………………………………… 6 分

又 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2-x}{2+bx}$ 的定义域为 $(-2,2)$，所以 $\frac{2-x}{2+bx}>0$ 的解集是 $(-2,2)$，即 $(x-2)(bx+2)<0$ 的解集是 $(-2,2)$，解得 $b=1$，

所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{9}}\frac{2-x}{2+x}=\log_{\frac{1}{9}}(-1+\frac{4}{2+x})$. ………………………………………… 7分

因为 $y=-1+\frac{4}{2+x}$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递增， ……… 8分

所以 $\forall x_1\in[1,2)$，$f(x_1)\geqslant f(1)=\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 9分

$\forall x_1\in[1,2)$，$\exists x_2\in[-1,1]$，$f(x_1)-g(x_2)>-\frac{1}{2}$，即 $\exists x_2\in[-1,1]$，$g(x_2)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，

………………………………………………………………………………………… 10分

即 $\exists x\in[-1,1]$，$m\cdot 4^x-2^{x+2}+3<1$，即 $m<-2\cdot[(\frac{1}{2})^x]^2+4\cdot(\frac{1}{2})^x$.

令 $(\frac{1}{2})^x=u$，$u\in[\frac{1}{2},2]$，即 $m<-2u^2+4u$.

因为 $-2u^2+4u=-2(u-1)^2+2\leqslant 2$，所以 $m<2$，即 m 的取值范围是 $(-\infty,2)$. …… 12分

22.(1)解：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-1-x\ln x$， ………………………………………… 1分

则 $f'(x)=e^x-1-\ln x$， ………………………………………………………… 2分

$f'(1)=e-1$， …………………………………………………………………… 3分

$f(1)=e-1$， …………………………………………………………………… 4分

所以所求切线的方程为 $y=(e-1)x$. ………………………………………… 5分

(2)证明：(法一)当 $a\geqslant 1$，$x>0$ 时，要证 $f(x)+\cos x=a(e^x-1)-x\ln x+\cos x>0$，只需证 $e^x-x\ln x+\cos x-1>0$， ………………………………………………………… 6分

即要证 $(e^x-\frac{3}{2}x^2+x)+(x^2-x-x\ln x)+(\cos x-1+\frac{1}{2}x^2)>0$. ……………………… 7分

易证 $x-1\geqslant\ln x$，即 $x^2-x-x\ln x\geqslant 0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立. ………………… 8分

令 $\varphi(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2(x>0)$，则 $\varphi'(x)=x-\sin x>0$，所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $\cos x-1+\frac{1}{2}x^2>0$. ………………………………………………………… 9分

因此，只需证 $e^x-\frac{3}{2}x^2+x\geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立.

令 $g(x)=e^x-\frac{3}{2}x^2+x$，则 $g'(x)=e^x-3x+1$， ……………………………………… 10分

令 $h(x)=e^x-3x+1$，则 $h'(x)=e^x-3$，$h(x)$ 在 $(0,\ln 3)$ 上单调递减，在 $[\ln 3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{min}=4-3\ln 3>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=1>0$. ………………………………………………………………………… 11分

故当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+\cos x>0$ 恒成立. ……………………………………………… 12分

(法二)要证 $f(x)+\cos x=a(e^x-1)-x\ln x+\cos x>0$，由于 $a\geqslant 1$，$x>0$，$e^x-1>0$，只需证 $e^x-1-x\ln x+\cos x>0$. ………………………………………………………… 6分

当 $x\in(0,1)$ 时，$e^x-1-x\ln x+\cos x>x+1-1-x\ln x+\cos x=x(1-\ln x)+\cos x$. …

…………………………………………………………………………………… 8分

因为 $1-\ln x>0, \cos x>0$，所以 $e^{x}-1-x\ln x+\cos x>0$. ………………………… 9 分

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，令 $F(x)=e^{x}-1-x\ln x$，则 $F'(x)=e^{x}-1-\ln x>x-\ln x>0$，所以 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $F(x)=e^{x}-1-x\ln x\geqslant F(1)=e-1>1$，

所以 $e^{x}-1-x\ln x+\cos x>1+\cos x\geqslant 0$. ………………………………………… 11 分

综上，$e^{x}-1-x\ln x+\cos x>0$ 恒成立，

所以 $a(e^{x}-1)-x\ln x+\cos x\geqslant e^{x}-1-x\ln x+\cos x>0$，即 $f(x)+\cos x>0$. …… 12 分