2023 北京交大附中高三 9 月开学考

数　　学

说明：本试卷共 4 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟.

一、选择题（每题的四个备选答案中只有一个答案正确）

1. 已知集合$M=\{x|x-1>0\}$，集合$M=\{x|x-2\geq 0\}$，则(　　)

A. $M\subseteq N$　　B. $N\subseteq M$　　C. $M\cap N=\varnothing$　　D. $M\cup N=\mathbf{R}$

2. 若复数 z 满足 $iz=2-4i$，则复数 z 在复平面内对应的点位于(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数中，是奇函数且在其定义域上为增函数的是(　　)

A. $y=\sin x$　　B. $y=x|x|$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=x-\dfrac{1}{x}$

4. “$x>1$”是“$\frac{x+1}{x}<2$”的(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

5. 已知平面向量$\vec{a}=(2,-1)$，$\vec{b}=(-4,x)$，若$\vec{b}$与$(\vec{a}+\vec{b})$共线，则实数$x=$（　）

A. -8　　B. 8　　C. -2　　D. 2

6. 已知 f（x）是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且在（$-\infty$，0]上单调递增，若 $a=f$（$\log_{\frac{1}{5}}3$），$b=f$（$\log_3 5$），$c=f$（$0.2^{0.5}$），则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

7. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，前 n 项积为T_n，已知$a_2=-4$，$S_4=-10$，则(　　)

A. S_n有最小值，T_n有最小值　　B. S_n有最大值，T_n有最大值

C. S_n有最小值，T_n有最大值　　D. S_n有最大值，T_n有最小值

8. 已知点$M(2,0)$，点 P 在曲线 $y^2=4x$ 上运动，点 F 为抛物线的焦点，则$\dfrac{|PM|^2}{|PF|-1}$的最小值为

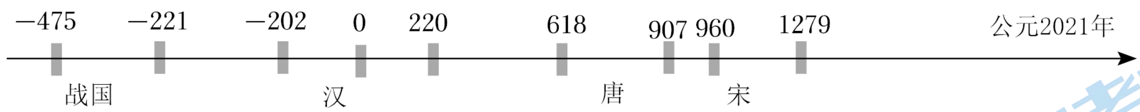
A. $\sqrt{3}$　　B. 2（$\sqrt{5}-1$）

C. $4\sqrt{5}$　　D. 4

9. 生物体死亡后，它机体内原有的碳 14 含量 P 会按确定的比率衰减（称为衰减率），P 与死亡年数 t 之间的函数关系式为$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{a}}$（其中 a 为常数），大约每经过 5730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”. 若 2021 年某遗址文物出土时碳 14 的残余量约占原始含量的 75%，则可推断该文物属于（　　）

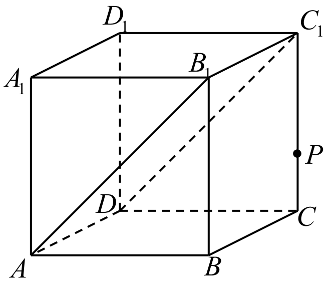
参考数据：$\log_2 0.75\approx-0.4$

参考时间轴：



A．宋　　　　B．唐　　　　C．汉　　　　D．战国

10. 若点 N 为点 M 在平面 α 上的正投影，则记 $N=f_\alpha(M)$. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD$ - $A_1B_1C_1D_1$ 中，记平面 AB_1C_1D 为 b，平面 $ABCD$ 为 g，点 P 是棱 CC_1 上一动点（与 C，C_1 不重合），$Q_1=f_g[f_b(P)]$，$Q_2=f_b[f_g(P)]$. 给出下列三个结论：



①线段 PQ_2 长度的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$；

②存在点 P 使得 PQ_1 // 平面 b；

③存在点 P 使得 $PQ_1\perp PQ_2$.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①②③　　（B）②③　　（C）①③　　（D）①②

二、填空题

11．已知 x，$y>0$，且满足 $x+y=2$，则 $xy+x+y$ 的最大值为__________.

12．已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数，$f(x+4)=f(x)$，若当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x+a)$，则 $f(2023)$=______.

13．已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x+\frac{1}{2}$，若将其图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后所得的图象关于原点对称，则 φ 的最小值为____.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\geq a, \\ |x-3-a|+3a, & x<a, \end{cases}$，若函数 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为 ____；a 的最大值为 ____.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2(n\in N^*)$，给出下列四个结论中，正确的结论是______.

①数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列；　　②数列 $\{a_n\}$ 中存在不大于 0 的项；

③存在 $N_0\in N^+$，当 $n>N_0$ 时，$a_n<\frac{1}{100}$；　　④ $a_{100}\leq\frac{1}{40}$.

三、解答题

16．在ΔABC中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$a=4\sqrt{2}$．再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．求：

（Ⅰ）c的值；

（Ⅱ）$\sin C$和ΔABC的面积．

条件①：$B=\frac{\pi}{4}$；条件②：$b=5$．

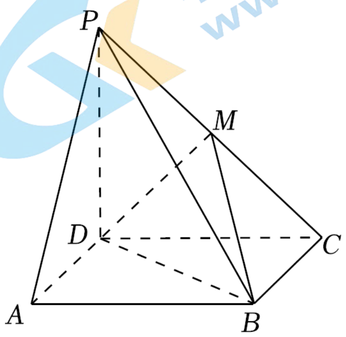
(注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分)

17．如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD$，底面$ABCD$是矩形，M是线段PC的中点．已知$PD=CD=2$，$AD=1$．

（Ⅰ）求证：$PA//$平面BDM；

（Ⅱ）求二面角$M-BD-C$的余弦值；

（Ⅲ）直线BD上是否存在点N，使得MN与PA垂直？若存在，求MN的长；若不存在，请说明理由．



18．某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.5	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值．假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等．

（Ⅰ）从所有的回访客户中随机抽取1人，求这个客户满意的概率；

（Ⅱ）若以样本的频率估计概率，从Ⅰ型号和Ⅴ型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为ξ，求ξ的分布列和期望；

（Ⅲ）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ型号汽车让客户满意，“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示不满意．写出方差$D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$的大小关系．

19．已知$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$.

(I)求椭圆C的方程；

(II)设直线l与椭圆C交于A、B两点，坐标原点O到直线l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle AOB$面积的最大值.

20．已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{ax}(a>0)$.

(1)求$f(x)$的单调区间；

(2)若$f(x)\le x-\frac{1}{a}$对$x\in(0,+\infty)$恒成立，求a的取值范围；

(3)若$x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0\left(x_1\ne x_2\right)$，证明：$x_1+x_2>2$.

21．已知无穷数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足：$x_{n+1}=|y_n|-|z_n|$，$y_{n+1}=|z_n|-|x_n|$，$z_{n+1}=|x_n|-|y_n|$，$n\in N^*$.

记$u_n=max\{|x_n|, |y_n|, |z_n|\}$($max\{x, y, z\}$表示3个实数$x$，$y$，$z$中的最大值).

（Ⅰ）若$x_1=2$，$y_1=3$，$z_1=4$，求u_1，u_2，u_3；

（Ⅱ）若$x_1=2$，$y_1=3$，$u_2=u_1$，求z_1；

（Ⅲ）设x_1，y_1，z_1是有理数，数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$中是否一定存在无穷个0？请说明理由.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。