高三数学考试参考答案

1. A 【解析】本题考查平面向量的垂直,考查数学运算的核心素养.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6(x-1)-2(2-x)=0$,解得 $x=\frac{5}{4}$.

2. B 【解析】本题考查数列求和,考查数学运算的核心素养.

因为 $S_n=n^2+n+1$,所以 $a_3=S_3-S_2=6$.

3. D 【解析】本题考查诱导公式和二倍角公式,考查数学运算的核心素养.

因为 $1+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=2\sin(\pi-\alpha)$,所以 $1-\sin\alpha=2\sin\alpha$,解得 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$,所以 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\sin 2\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

4. A 【解析】本题考查异面直线所成的角,考查直观想象的核心素养.

设 $AD=CD=2$,则 $AA_1=4$,易知 $AD_1\parallel BC_1$,所以异面直线 D_1E 与 BC_1 所成的角为 $\angle AD_1E$. 经计算可知 $D_1E=\sqrt{17}$,$AD_1=2\sqrt{5}$,$AE=\sqrt{5}$,所以 $\cos\angle AD_1E=\frac{17+20-5}{2\sqrt{17}\times2\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{85}}{85}$.

5. C 【解析】本题考查利用导数研究函数的零点,考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为 $f(x)=x^3+x^2-x+2$,所以 $f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$. 令 $f'(x)<0$,解得 $-1<x<\frac{1}{3}$,令 $f'(x)>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>\frac{1}{3}$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增,在 $(-1,\frac{1}{3})$ 上单调递减,在 $(\frac{1}{3},+\infty)$ 上单调递增. 因为方程 $f(x)=2m-1$ 有 3 个不同的根,$f(-1)=3$,$f(\frac{1}{3})=\frac{49}{27}$,所以 $\frac{49}{27}<2m-1<3$,解得 $\frac{38}{27}<m<2$,即 m 的取值范围为 $(\frac{38}{27},2)$.

6. D 【解析】本题考查旋转体的体积与侧面积,考查直观想象的核心素养.

设圆锥 PO_1,PO 的底面圆半径分别为 r,R,它们的母线长分别为 l,L,因为 $\frac{V_{PO_1}}{V_{PO}}=(\frac{r}{R})^3=\frac{1}{8}$,

所以 $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$,从而 $\frac{l}{L}=\frac{1}{2}$,即 $R=2r$,$L=2l$. 所以 $\frac{S_{PO_1侧}}{S_{OO_1侧}}=\frac{\pi rl}{\pi\cdot2r\cdot2l-\pi rl}=\frac{1}{3}$.

7. A 【解析】本题考查等差数列的性质与求和,考查数学抽象与数学运算的核心素养.

$S_n=n^2+(a_1-1)n$,$nS_n=n^3+(a_1-1)n^2$,由题得 $(n+1)S_{n+1}-nS_n=3n^2+(2a_1+1)n+a_1>0$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,即 $a_1>-\frac{3n^2+n}{2n+1}$,令 $t=2n+1(t\geqslant3)$,$n\in\mathbf{N}^*$,则 $a_1>-\frac{1}{4}(3t+\frac{1}{t})+1$,

令 $\varphi(t)=-\frac{1}{4}(3t+\frac{1}{t})+1$,当 $t=3$ 时,$\varphi(t)$ 取得最大值 $-\frac{4}{3}$,故 $a_1>-\frac{4}{3}$.

8. C 【解析】本题考查导数在研究函数中的应用,考查逻辑推理的核心素养.

$\forall x\geqslant 0$, $f(x)\leqslant 0$ 等价于 $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\leqslant ax$. 记 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax$，即 $g(x)\leqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立. $g'(x)=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}-a=-3(\dfrac{1}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{1}{3}-a$.

当 $\dfrac{1}{3}-a\leqslant 0$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant g(0)=0$，即 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立；

当 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，记 $h(x)=\dfrac{\sin x}{3}-ax$，则 $h'(x)=\dfrac{\cos x}{3}-a$，存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $h'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $\dfrac{\sin x}{3}>ax$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\geqslant\dfrac{\sin x}{3}>ax$，即 $f(x)>0$，不符合题意；

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(\dfrac{\pi}{2})=1-\dfrac{\pi}{2}a>0$，不符合题意.

综上，a 的取值范围是 $[\dfrac{1}{3},+\infty)$.

9. BCD 【解析】本题考查复数的运算与几何意义，考查数学运算的核心素养.

由题可得 $z=\dfrac{-1}{2+i}=\dfrac{-(2-i)}{4-i^2}=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$，即 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(-\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5})$，与点 $(\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5})$ 关于原点对称，A 错误，C 正确；$\bar{z}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$，B 正确；$|z|=\sqrt{(-\dfrac{2}{5})^2+(\dfrac{1}{5})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，D 正确.

10. BCD 【解析】本题考查导数的运算，考查数学运算的核心素养.

因为 $f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}+2f'(-1)\cdot x$，所以 $f'(-1)=-3-2f'(-1)$，解得 $f'(-1)=-1$，则 $f(x)=\dfrac{3}{x}-x^2+1$，$f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}-2x$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$f'(1)=-5$，$f(1)=3$，A 错误，B，C，D 正确.

11. BC 【解析】本题考查三角函数的图象与性质，考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为 $\begin{cases}A+b=3,\\-A+b=-1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}A=2,\\b=1.\end{cases}$ 又 $\dfrac{1}{4}T=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，则 $\omega=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$. 将点 $(\dfrac{\pi}{3},1)$ 的坐标代入 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，则 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$，B 正确；若 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$，则 $f(\dfrac{\pi}{3})=2$，A 错误；而 $1-2\cos(2x+\dfrac{5\pi}{6})=1-2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2})=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$，C 正确；若 $f(x)=1-2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$，则 $f(0)=0$，D 错误.

12. ACD 【解析】本题考查数学文化与数列的求和，考查数学抽象与数学运算的核心素养.

对于 A，因为 $F_{n+2}-F_{n+1}=F_n$，所以 $F_3-F_2=F_1$，$F_4-F_3=F_2$，$F_5-F_4=F_3$，…，$F_{2026}-F_{2025}=F_{2024}$，上式两边分别相加得 $F_{2026}-F_2=\sum_{i=1}^{2024}F_i$，又 $F_1=F_2=1$，所以 $\sum_{i=1}^{2024}F_i=F_{2026}-1$，A 正确.

对于 B，因为 $F_{n+1}=F_{n+2}-F_n$，所以 $F_{n+1}^2=F_{n+2}F_{n+1}-F_{n+1}F_n$，所以 $F_2^2=F_3F_2-F_2F_1$，$F_3^2=F_4F_3-F_3F_2$，$F_4^2=F_5F_4-F_4F_3$，…，$F_{2024}^2=F_{2025}F_{2024}-F_{2024}F_{2023}$，上式两边分别相加得 $F_2^2+F_3^2+\cdots+F_{2024}^2=F_{2025}F_{2024}-1$，所以 $\sum_{i=1}^{2024}F_i^2=F_{2024}F_{2025}$，B 错误.

对于 C，由题意知 $G_1=1$，$G_2=1$，$G_3=2$，$G_4=0$，$G_5=2$，$G_6=2$，$G_7=1$，$G_8=0$，$G_9=1$，$G_{10}=1$，…，所以数列$\{G_n\}$是最小正周期为 8 的数列，故 $G_{2024}=G_8=0$，C 正确.

对于 D，$\sum_{i=1}^{2024}G_i=253\times(1+1+2+0+2+2+1+0)=2277$，D 正确.

13. 3 **【解析】本题考查平面向量的夹角与模，考查数学运算的核心素养.**

因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2|\boldsymbol{b}|\times\frac{1}{2}=-2$，所以 $|\boldsymbol{b}|=3$.

14. -3 **【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.**

因为 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=-\frac{1}{2}$，所以 $\tan\theta=-3$.

15. 5 **【解析】本题考查等比数列的性质与求和，考查数学运算的核心素养.**

设公比为 q，因为 $a_5=a_4+6a_3$，所以 $q^2-q-6=0$，解得 $q=3$. 又由 $S_3=13$，即 $a_1+3a_1+9a_1=13$，解得 $a_1=1$，所以 $S_n=\frac{3^n-1}{2}$. 由$\frac{3^n-1}{2}<123$，得 $3^n<247$，因为 $3^5=243$，$3^6=729$，所以 n 的最大值为 5.

16. 100π **【解析】本题考查三棱柱的外接球的表面积，考查直观想象的核心素养.**

设$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle ABC$ 的外心分别为 O_1，O_2，则线段 O_1O_2 的中点 O 为外接球的球心. 设$\triangle ABC$ 外接圆的半径与该三棱柱外接球的半径分别为 r，R，由正弦定理知$\frac{BC}{\sin 30^\circ}=2r$，解得 $r=3$，所以 $R=\sqrt{(\frac{8}{2})^2+3^2}=5$，从而三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积 $S=4\pi R^2=100\pi$.

17. 解：$f(x)=3\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}\sin^2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3}{2}\sin 2\omega x-\sqrt{3}\times\frac{1-\cos 2\omega x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ………………………………………… 2 分

$=\sqrt{3}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$. ………………………………………………………… 3 分

(1)因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant|f(\frac{\pi}{6})|$，所以直线 $x=\frac{\pi}{6}$为曲线 $y=f(x)$的一条对称轴，

所以 $2\omega\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$， ………………………………………… 4 分

解得 $\omega=3k+1,k\in\mathbf{Z}$. ………………………………………………………………………… 5 分

又 $\omega>0$,所以 $\omega=3k+1,k\in\mathbf{N}$,$\omega$ 的取值集合为$\{\omega|\omega=3k+1,k\in\mathbf{N}\}$. ………………… 6 分

(2)当 $\omega=1$ 时,$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$, …………………………………………………… 7 分

所以$-\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$, ………………………………………………………………… 9 分

所以$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant\sqrt{3}$,即 $f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域为$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}]$. …… 10 分

评分细则:

【1】第一问中,ω 的取值集合写成$\{\omega|\omega=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$或$\{\omega|\omega=3k+1\}$,扣 1 分,即累计得 5 分.

【2】第二问,求出$-\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$,累计得 9 分,最后求出正确答案,累计得 10 分.

18. 解:(1)因为 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$,所以$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2c-a}{2b}$, ……………………………………… 3 分

整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$,

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$, ………………………………………………………… 5 分

又因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,c=3,b=\sqrt{13}$,

所以 $13=a^2+9-3a$,即 $a^2-3a-4=0$, ……………………………………………………… 8 分

解得 $a=4$. ……………………………………………………………………………………… 10 分

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. …………………………… 12 分

评分细则:

第一问另解:

因为 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$,所以 $2b\cos A=2c-a$. ……………………………………………… 1 分

由正弦定理得 $2\cos A\sin B=2\sin(A+B)-\sin A$,

整理得 $2\sin A\cos B-\sin A=0$. …………………………………………………………………… 4 分

因为 $\sin A>0$,所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 5 分

又因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 6 分

19. 解:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=2a_1-2$,解得 $a_1=2$. …………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_n=2a_n-2,S_{n-1}=2a_{n-1}-2$,

两式相减得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$， ………………………………………………………… 3 分

所以$\{a_n\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，故 $a_n=2^n$. ……………………………………………… 4 分

设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d，由 $b_3+b_4+b_5=21$，可得 $b_4=7$，……………………………………… 5 分

又 $b_6=11$，所以 $7+2d=11$，解得 $d=2$，故 $b_n=2n-1$. ……………………………………………… 6 分

(2)令 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$，则由(1)可知 $c_n=\frac{2n-1}{2^n}$，…………………………………………………………………… 7 分

则 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，② …………………………………………………………………… 8 分

①－②，得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，……………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $a_1=2$，得 1 分，写出 $a_n=2^n$，累计得 4 分，写出 $b_4=7$，累计得 5 分，求出 $b_n=2n-1$，累计得 6 分.

【2】第二问，求出 $c_n=\frac{2n-1}{2^n}$，累计得 7 分，求出$\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，累计得 11 分，直到给出正确结论得 12 分.

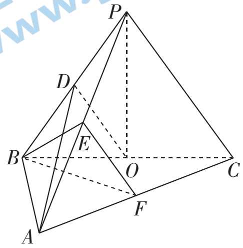
20.(1)证明：因为$\triangle PBC$ 为等边三角形，D，O 分别是 BP，BC 的中点，且 $BC=2\sqrt{2}$，所以 $DO=BD=\sqrt{2}$， …………………………………………………………………………………… 1 分

所以 $AD=\sqrt{3}DO=\sqrt{6}$. ……………………………………………… 2 分

又 $AB=2$，所以 $AB^2+BD^2=AD^2$，即 $AB\perp BD$. ………………… 4 分

因为 $AB\perp BC$，$BC\cap BD=B$，所以 $AB\perp$平面 PBC.

又 $AB\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 PBC. ………………… 5 分



(2)解：连接 PO，由已知可得 $PO\perp BC$，

又由(1)可知平面 $PBC\perp$平面 ABC，

所以 $PO\perp$平面 ABC. ……………………………………………………………………………… 6 分

因为 F 为 AC 的中点，所以点 C 到平面 BEF 的距离等于点 A 到平面 BEF 的距离.

在直角$\triangle ABC$ 中，可知 $BF=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{8+2^2}}{2}=\sqrt{3}$， ………………………………………………… 7 分

在直角$\triangle ABP$ 中，可知 $BE=\frac{AP}{2}=\frac{\sqrt{8+2^2}}{2}=\sqrt{3}$， ………………………………………………… 8 分

因为 EF 是 $\triangle ACP$ 的中位线，所以 $EF=\frac{PC}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，$\triangle BEF$ 的面积 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ………………………………………………………………………… 9 分

设点 A 到平面 BEF 的距离为 d，则三棱锥 $A-BEF$ 的体积 $V_{A-BEF}=\frac{\sqrt{5}}{6}d$. ………… 10 分

又 $\triangle ABF$ 的面积 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，点 E 到平面 ABF 的距离为 $\frac{OP}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以三棱锥 $E-ABF$ 的体积 $V_{E-ABF}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… 11 分

由 $\frac{\sqrt{5}}{6}d=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $d=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，即点 C 到平面 BEF 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. ……………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问中，求出 $AD=\sqrt{3}DO=\sqrt{6}$，得 2 分，证出 $AB\perp BD$，累计得 4 分，证出平面 $ABC\perp$ 平面 PBC，累计得 5 分.

【2】第二问中，证出 $PO\perp$ 平面 ABC，累计得 6 分，计算出 $S_{\triangle BEF}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，累计得 9 分，计算出 $V_{E-ABF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，累计得 11 分，直至正确求出点 C 到平面 BEF 的距离，累计得 12 分.

21.(1)解：$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-8+\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-4x+1)}{x}$. ……………… 2 分

令 $f'(x)<0$，解得 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$；令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<2-\sqrt{3}$ 或 $x>2+\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,2-\sqrt{3})$ 上单调递增，在 $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ 上单调递减，在 $(2+\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：因为 $f(x_1)+f(x_2)=7$，所以 $2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2-8x_1-8x_2=7$. ………… 5 分

设 $\varphi(t)=\ln t-t+1$，定义域为 $(0,+\infty)$，则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$. …………………… 7 分

当 $0<t<1$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单调递增；当 $t>1$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减. 因此 $\varphi(t)\leqslant\varphi(1)=0$，所以 $\ln t\leqslant t-1$ 对任意的 $t>0$ 恒成立. ………………………………………… 9 分

令 $t=x_1+x_2(t>0)$，有 $7=2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2-8x_1-8x_2\leqslant2x_1x_2-2+x_1^2+x_2^2-8x_1-8x_2=(x_1+x_2)^2-8(x_1+x_2)-2$，当且仅当 $x_1x_2=1$ 时，等号成立. ……………………… 11 分

因此 $t^2-8t-9\geqslant0$，即 $(t+1)(t-9)\geqslant0$，解得 $t\geqslant9$，即 $x_1+x_2\geqslant9$. ……………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $f(x)$ 的定义域和 $f'(x)=2x-8+\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-4x+1)}{x}$，各得 1 分，第一问都正确，累计得 4 分.

【2】第二问，写出 $2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2-8x_1-8x_2=7$，累计得 5 分，证出 $\ln t\leqslant t-1$ 对任意的

$t>0$ 恒成立,累计得 9 分,写出 $7\leqslant(x_1+x_2)^2-8(x_1+x_2)-2$,累计得 11 分,直至求出正确答案,累计得 12 分.

【3】采用其他方法,参照本评分标准依步骤给分.

22. 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=e^{4x-1}-4\ln(2x)$,所以 $f'(x)=4e^{4x-1}-\dfrac{4}{x}$, ………………… 2 分

$f'(\dfrac{1}{2})=4e-8$,$f(\dfrac{1}{2})=e$,所以切线方程为 $y-e=(4e-8)(x-\dfrac{1}{2})$,

即 $y=(4e-8)x-e+4$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f(x)\geqslant a+a\ln(2a)$,即 $e^{4x-1}-4a\ln(2x)-a-a\ln(2a)\geqslant 0$.

……………………………………………………………………………………… 5 分

设 $g(x)=e^{4x-1}-4a\ln(2x)-a-a\ln(2a)$,则 $g'(x)=4e^{4x-1}-\dfrac{4a}{x}$. ……………………… 6 分

因为 $a>0$,所以 $g'(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数,当 $x\to 0$ 时,$g'(x)\to-\infty$,当 $x\to+\infty$时,$g'(x)\to+\infty$,所以存在唯一的 $x_0>0$,使 $g'(x_0)=4e^{4x_0-1}-\dfrac{4a}{x_0}=0$,

且当 $x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$g'(x)>0$.

由 $g'(x_0)=4e^{4x_0-1}-\dfrac{4a}{x_0}=0$,得 $a=x_0e^{4x_0-1}$,则 $\ln(2a)=\ln(2x_0)+4x_0-1$. …………… 8 分

所以 $g(x)_{\min}=e^{4x_0-1}-4a\ln(2x_0)-a-a\ln(2a)=e^{4x_0-1}-x_0e^{4x_0-1}[4\ln(2x_0)+1+\ln(2a)]=e^{4x_0-1}[1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2]\geqslant 0$. ………………………………………………………… 9 分

因为 $1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2=x_0[\dfrac{1}{x_0}-5\ln(2x_0)-4x_0]\geqslant 0$,所以$\dfrac{1}{x_0}-5\ln(2x_0)-4x_0\geqslant 0$. …

……………………………………………………………………………………… 10 分

设 $h(x)=\dfrac{1}{x}-5\ln(2x)-4x$,易知它在$(0,+\infty)$上为减函数,注意到 $h(\dfrac{1}{2})=0$,所以 $0<x_0\leqslant\dfrac{1}{2}$. 又 $a=x_0e^{4x_0-1}$,设 $u(x)=xe^{4x-1}(0<x\leqslant\dfrac{1}{2})$,则 $u'(x)=(4x+1)e^{4x-1}>0$, …… 11 分

可知 $u(x)$在$(0,\dfrac{1}{2}]$上单调递增,则 $a\in(0,\dfrac{e}{2}]$,即实数 a 的取值范围是$(0,\dfrac{e}{2}]$. …… 12 分

评分细则:

【1】第一问,写出 $f'(x)=4e^{4x-1}-\dfrac{4}{x}$,得 2 分,正确求出曲线 $y=f(x)$的切线方程,累计得 4 分.

【2】第二问,写出 $g'(x)=4e^{4x-1}-\dfrac{4a}{x}$,累计得 6 分,推导出 $\ln(2a)=\ln(2x_0)+4x_0-1$,累计得 8 分,推出 $e^{4x_0-1}[1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2]\geqslant 0$,累计得 9 分. 证出 $u'(x)=(4x+1)e^{4x-1}>0$,累计得 11 分,求出实数 a 的取值范围是$(0,\dfrac{e}{2}]$,累计得 12 分.

【3】采用其他方法,参照本评分标准依步骤给分.