2024 北京二中高三（下）开学考

数　学

命题人：______　得分：______

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．选出符合题目要求的一项）

1. 设集合 $A=\{x\mid x>3\},B=\left\{x\mid \dfrac{x-1}{x-4}\le 0\right\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$（　）

A. $(1,3)$　　B. $[1,3]$　　C. $(3,4)$　　D. $[3,4)$

2. 已知复数 $\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}},a\in\mathbf{R}$ 是纯虚数，则在复平面中，复数 $z=a+\mathrm{i}$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点坐标是（　）

A. $(-3,-1)$　　B. $(-3,1)$　　C. $(1,-3)$　　D. $(1,3)$

3. 若 $(1-2x)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则 $a_1+a_2+a_3=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

4. 已知 a，$b>0$，且 $a\ne 1$，$b\ne 1$，若 $\log_a b>1$，则（　）

A. $(a-1)(b-1)<0$　　B. $(a-1)(a-b)>0$　　C. $(b-1)(a-b)>0$　　D. $(b-1)(b-a)>0$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

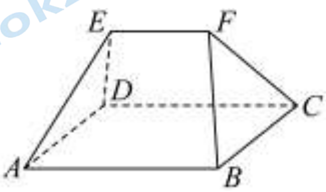
6. 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列，记 $b_n=a_n+a_{n+1}$，则“$\{a_n\}$ 是等比数列”是“$\{b_n\}$ 是等比数列”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 随着北京中轴线申遗工作的进行，古建筑备受关注．故宫不仅是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑之一，更是北京中轴线的“中心”．图 1 是古建筑之首的太和殿，它的重檐庑（wǔ）殿顶可近似看作图 2 所示的几何体，其中底面 $ABCD$ 题矩形，$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{9}$，$EF//AB$，四边形 $ABFE$、$CDEF$ 是两个全等的等腰梯形，$\triangle EAD$、$\triangle FBC$ 是两个全等的等腰三角形．若 $BC=5,EF=6,AE=\dfrac{13}{2}$，则该几何体的体积为（　）

（图 1）



（图 2）

A. 90　　B. $30\sqrt{15}$　　C. $\dfrac{75\sqrt{15}}{2}$　　D. 135

8. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 M，以 M 为圆心，双曲线 C 的半焦距为半径的圆与双曲线 C 的一条渐近线相交于 A，B 两点．若 $\angle AMB=\dfrac{2\pi}{3}$，则双曲线 C 的离心率为（　）

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

9. 平面直角坐标系 xOy 中，定点 A 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $0\le\theta\le\pi$.若当点 B 在圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 上运动时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最大值为 0，则（　）

A. $\theta=\dfrac{\pi}{3},\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为 -2

B. $\theta=\dfrac{\pi}{3},\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为 $-\dfrac{3}{2}$

C. $\theta=\dfrac{2\pi}{3},\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为 -2

D. $\theta=\dfrac{2\pi}{3},\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为 $-\dfrac{3}{2}$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得 $S_n=a_m$，下列正确的命题是（　）

①$\{a_n\}$ 可能为等差数列；

②$\{a_n\}$ 可能为等比数列；

③$a_i(i\ge 2)$ 均能写成 $\{a_n\}$ 的两项之差；

④对任意 $n\in\mathrm{N},n\ge 1$，总存在 $m\in\mathrm{N},m\ge 1$，使得 $a_a=S_m$.

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 的焦点坐标为________，准线方程为________.

12. 已知向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量 $\vec{u}=(-3,4)$，且 $|\vec{b}|=2$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$____________.

13. 已知直线 $y=kx+m$（m 为常数）与圆 $x^2+y^2=4$ 交于点 M,N，当 k 变化时，若 $|MN|$ 的最小值为 2，则 $m=$____________.

14. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（A，$\omega$，$\varphi$ 是常数，$A>0$，$\omega>0$）．若 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 ω 的值为________.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}a\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),x<\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x,\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ e^{-x+\pi}+4a,x>\pi\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①若 $f\left(x\right)$ 有最小值，则 a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{\pi},0\right]$；

②当 $a>0$ 时，若 $f\left(x\right)=t$ 无实根，则 t 的取值范围是 $\left[a\pi,4a\right]\cup\left[4a+1,+\infty\right)$；

③当 $a\le-\dfrac{1}{2}$ 时，不等式 $f\left(x^2+2\right)>f\left(\left|x\right|+4\right)$ 的解集为 $\left(-2,2\right)$；

④当 $a\ge1$ 时，若存在 $x_1<x_2$，满足 $-1<f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)<0$，则 $x_1+x_2>0$.

其中，所有正确结论的序号为__________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 在△ABC 中，$\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

（1）求 B 的值；

（2）给出以下三个条件：① $a^2-b^2+c^2+3c=0$；② $a=\sqrt{3}$，$b=1$；③ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$，若这三个条件中仅有两个正确，请选出正确的条件并回答下面问题：

（i）求 $\sin A$ 的值；

（ii）求 $\angle ABC$ 的角平分线 BD 的长.

17. 某工厂的机器上有一种易损元件 A，这种元件在使用过程中发生损坏时，需要送维修处维修．工厂规定当日损坏的元件 A 在次日早上 8：30 之前送到维修处，并要求维修人员当日必须完成所有损坏元件 A 的维修工作．每个工人独立维修 A 元件需要时间相同．维修处记录了某月从 1 日到 20 日每天维修元件 A 的个数，具体数据如下表：

日期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	9 日	10 日
元件 A 个数	9	15	12	18	12	18	9	9	24	12
日期	11 日	12 日	13 日	14 日	15 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
元件 A 个数	12	24	15	15	15	12	15	15	15	24

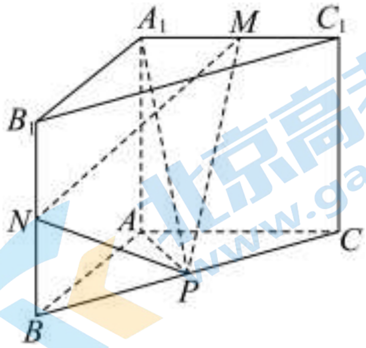
从这 20 天中随机选取一天，随机变量 X 表示在维修处该天元件 A 的维修个数.

（I）求 X 的分布列与数学期望；

（II）若 a，$b\in N^*$，且 b-a=6，求 $P\left(a\le X\le b\right)$ 最大值；

（III）目前维修处有两名工人从事维修工作，为使每个维修工人每天维修元件 A 的个数的数学期望不超过 4 个，至少需要增加几名维修工人？（只需写出结论）

18. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=AA_1=2, AA_1\perp AB$，平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 ABC，M,N,P 分别为棱 A_1C_1, BB_1, BC 的中点，如图：



（1）求证：$MP//$ 平面 ABB_1A_1；

（2）若 $AB\perp AC$，

①求 A_1P 与平面 MPN 所成角的正弦值；

②求线段 AP 在平面 MPN 内的投影 HP 的长.

19. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，且焦距为 2，动弦 MN 平行于 x 轴，且 $|F_1M|+|F_1N|=4$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设 A,B 为椭圆 E 的左右顶点，P 为直线 $l:x=4$ 上的一动点（点 P 不在 x 轴上），连接 AP 交椭圆于 C 点，连接 PB 并延长交椭圆于 D 点，试问是否存在 λ，使得 $S_{\triangle ACD}=\lambda S_{\triangle BCD}$ 成立，若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

20.已知函数 $f\left(x\right)=e^{2x-1}\left(ax^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0, f\left(0\right)\right)$ 处的切线的方程；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，求 a 的取值范围；

（3）若函数 $f\left(x\right)$ 存在最小值，直接写出 a 的取值范围.

21. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x，

y 中最大的数，$\min\{x, y\}$ 表示 x，y 中最小的数.

（1）当 $a_1=1$，$a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

（3）若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n \le M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．选出符合题目要求的一项）

1.【答案】B

【分析】根据条件，得到 $\complement_{R} A=\{x \mid x \leq 3\}$， $B=\{x \mid 1 \leq x<4\}$，再利用集合的运算，即可求出结果.

【详解】因为 $A=\{x \mid x>3\}$，所以 $\complement_{R} A=\{x \mid x \leq 3\}$，

又由 $\dfrac{x-1}{x-4} \leq 0$，得到 $1 \leq x<4$，即 $B=\{x \mid 1 \leq x<4\}$，

所以 $\left(\complement_{R} A\right) \cap B=\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$，

故选：B.

2.【答案】A

【分析】利用复数除法计算出 $\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+3 \mathrm{i}}=\dfrac{a+3+(1-3 a) \mathrm{i}}{10}$，从而得到 $a=-3$，求出答案.

【详解】$\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+3 \mathrm{i}}=\dfrac{(a+\mathrm{i})(1-3 \mathrm{i})}{(1+3 \mathrm{i})(1-3 \mathrm{i})}=\dfrac{a-3 a \mathrm{i}+\mathrm{i}-3 \mathrm{i}^{2}}{10}=\dfrac{a+3+(1-3 a) \mathrm{i}}{10}$，

则 $a+3=0$，解得 $a=-3$，则 $z=-3+\mathrm{i}$， $\bar{z}=-3-\mathrm{i}$

故共轭复数 $\bar{z}$ 对应的坐标为 $(-3,-1)$.

故选：A

3.【答案】D

【分析】对 x 赋值，分别赋值 $x=0$， $x=1$，进而可得结果.

【详解】由 $(1-2 x)^{3}=a_{0}+a_{1} x+a_{2} x^{2}+a_{3} x^{3}$，

令 $x=0$，则 $1^{3}=a_{0}$，即 $a_{0}=1$，

令 $x=1$，则 $(1-2)^{3}=a_{0}+a_{1}+a_{2}+a_{3}$，

即 $-1=1+a_{1}+a_{2}+a_{3}$

所以 $a_{1}+a_{2}+a_{3}=-2$.

故选：D.

4.【答案】D

【分析】根据对数函数的单调性，结合 $a>1$ 或 $0<a<1$ 分类讨论进行判断即可.

【详解】解：由 $\log_{a} b>1$，即 $\log_{a} b>\log_{a} a$，,

当 $a>1$ 时，则有 $b>a>1$，

此时 $b-1>0$， $b-a>0$， $a-1>0$， $a-b<0$，

则 $(a-1)(b-1)>0$， $(a-1)(a-b)<0$， $(b-1)(a-b)<0$， $(b-1)(b-a)>0$， D选项符合；

当$0<a<1$时，则有$0<b<a<1$，

此时$b-1<0$，$b-a<0$，$a-1<0$，$a-b>0$，

则$(a-1)(b-1)>0$，$(a-1)(a-b)<0$，$(b-1)(a-b)<0$，$(b-1)(b-a)>0$，

D选项符合；

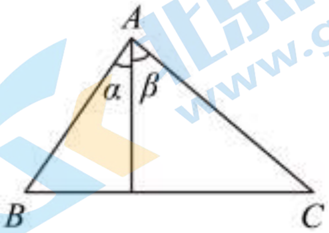
故选：D.

5. 【答案】C

【详解】试题分析：设

$$AD=a\Rightarrow AB=\sqrt{2}a,CD=2a,AC=\sqrt{5}a\Rightarrow \sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow \cos A$$

$=\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,故选 C.



考点：解三角形.

6. 【答案】D

【分析】根据充分、必要条件以及等差、等比数列的知识求得正确答案.

【详解】非充分性：$\{a_n\}:1,-1,1,-1,\cdots,\{b_n\}:0,0,0,0,\cdots$，

此时$\{a_n\}$是等比数列，但$\{b_n\}$不是等比数列；

非必要性：$\{b_n\}:1,1,1,1,\cdots,\{a_n\}:1,0,1,0,\cdots$.

此时$\{b_n\}$是等比数列，但$\{a_n\}$不是等比数列.

所以“$\{a_n\}$是等比数列”是“$\{b_n\}$是等比数列”的既不充分也不必要条件.

故选：D

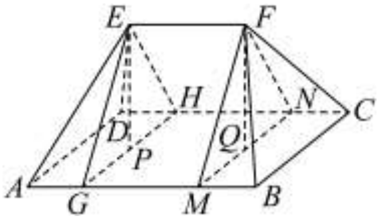
7. 【答案】B

【分析】将该五面体分割为四棱锥和三棱柱，结合棱柱和棱锥的体积公式求其体积.

【详解】过点E作$EG\perp EF$，$EH\perp EF$，又$EG\bigcap EH=E$，EG，$EH\subset$平面EGH，

所以$EF\perp$平面EGH，

过点F作$FM\perp EF$，$FN\perp EF$，又$FM\bigcap FN=F$，FM，$FN\subset$平面FMN，



所以 $EF\perp$ 平面 FMN，

因为 $EF//$ 底面 $ABCD$， $EF\subset$ 平面 $ABFE$， 平面 $ABFE\bigcap$ 平面 $ABCD=AB$，

所以 $AB//EF$， 同理 $CD//EF$，

所以 $AB\perp EG$， $CD\perp EH$， $AB\perp FM$， $CD\perp FN$，

$AB\perp$ 平面 EGH， $AB\perp$ 平面 FMN， $GH\subset$ 平面 EGH， $MN\subset$ 平面 FMN，

所以 $AB\perp GH$， $AB\perp MN$，

因为 $AB=9,BC=5,EF=6$， $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 是全等的等腰三角形，

由对称性可得， $AG=DH=BM=CN=\dfrac{9-6}{2}=\dfrac{3}{2}$，

所以 $EG=EH=\sqrt{AE^2-AG^2}=2\sqrt{10},GH=MN=5$，

连接点 E 与 GH 的中点 P， 则 $EP=\sqrt{EG^2-\left(\dfrac{1}{2}BC\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$，

所以 $S_{\triangle EGH}=\dfrac{1}{2}GH\bullet EP=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\times5=\dfrac{15\sqrt{15}}{4}$， 又 $GM=6$，

所以三棱柱 $EGH-FMN$ 的体积为 $S_{\triangle EHG}\cdot EF=\dfrac{15\sqrt{15}}{4}\times6=\dfrac{45\sqrt{15}}{2}$，

因为 $AB\perp$ 平面 EGH， $EP\subset$ 平面 EGH， 所以 $AB\perp EP$，

又 $EP\perp GH$， AB， $GH\subset$ 平面 $ABCD$， $AB\bigcap GH=G$，

所以 $EP\perp$ 平面 $ABCD$， 又矩形 $AGHD$ 的面积为 $AG\cdot HG=\dfrac{3}{2}\times5=\dfrac{15}{2}$，

所以四棱锥 $E-AGHD$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15}{2}\times\dfrac{3\sqrt{15}}{2}=\dfrac{15\sqrt{15}}{4}$，

由对称性可得四棱锥 $F-MBCN$ 的体积为 $\dfrac{15\sqrt{15}}{4}$，

所以五面体 $ABCDEF$ 的体积为 $\dfrac{45\sqrt{15}}{2}+\dfrac{15\sqrt{15}}{4}\times2=30\sqrt{15}$.

故选：B

8. 【答案】D

【分析】做 $MC\perp AB$ 交 AB 于 C 点， C 点为弦 AB 的中点，可得圆心 M 到渐近线的距离等于半径的一半，即 $\dfrac{ab}{c}=\dfrac{c}{2}$， 再利用 $a^2+b^2=c^2$ 可得答案.

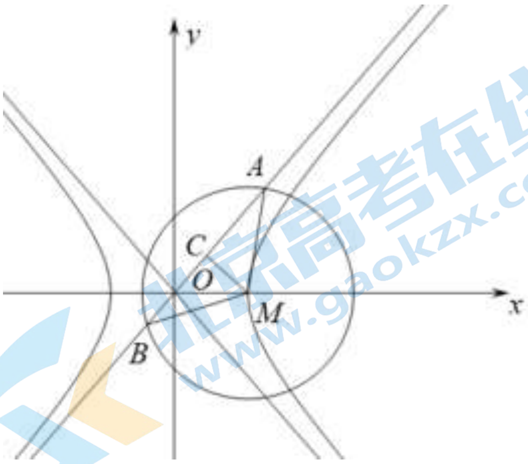
【详解】因为 $\angle AMB=\dfrac{2\pi}{3}$，如图，做 $MC\perp AB$ 交 AB 于 C 点，C 点为弦 AB 的中点，

$\angle AMC=60^\circ,\angle CAM=30^\circ$，所以圆心 M 到渐近线的距离等于半径的一半，

则 $\dfrac{ab}{c}=\dfrac{c}{2}$，则 $a^2(c^2-a^2)=\dfrac{c^4}{4}$，即 $\left(\dfrac{c}{a}\right)^4-4\left(\dfrac{c}{a}\right)^2+4=0$，解得 $\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=2$，

则双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$.

故选：D.



9. 【答案】C

【分析】设 $B(2+\cos\alpha,\sin\alpha)$，$0\le\alpha<2\pi$，根据数量积的坐标运算结合两角和差公式可得

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$，再结合余弦函数的有界性分析求解.

【详解】设 $B(2+\cos\alpha,\sin\alpha)$，$0\le\alpha<2\pi$，

则 $\overrightarrow{OA}=(\cos\theta,\sin\theta),\overrightarrow{OB}=(2+\cos\alpha,\sin\alpha)$，

可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\theta(2+\cos\alpha)+\sin\theta\sin\alpha=2\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$，

对任意 $0\le\alpha<2\pi$，可知当 $\cos(\theta-\alpha)=1$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最大值为 $2\cos\theta+1=0$，

可得 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，且 $0\le\theta\le\pi$，所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，

且当 $\cos(\theta-\alpha)=-1$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的最小值为 $2\cos\theta-1=-1-1=-2$.

故选：C.

10. 【答案】A

【分析】对于①，取 $a_n=n$，可知①正确；对于②，当 $\{a_n\}$ 的公比 $q=1$，$n\ge 2$ 时，

$S_n=na_1=na_m\ne a_m$；当 $q\ne 1$ 时，$S_n=a_m$，而 $1+q+\cdots+q^{n-1}=q^{m-1}$ 无有理数根，可知②错误；对于③，根据 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$，可知③正确；对于④取数列 $a_n=n$，显然不存在 m，使得 $S_m=a_2=2$，故④不正确.

【详解】对于①，取 $a_n=n$，则 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，显然存在 $m=\frac{n(n+1)}{2}$，使 $S_n=a_m$，所以①正确，

对于②，若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，设公比为 q，显然 $q=1$ 不满足要求，

考虑 $q\neq1$ 的情况，依题意有，$S_{n+1}=a_{m_1}, S_{2n+2}=a_{m_2}$，

即 $1+q+q^2+\cdots+q^n=q^{m_1}$ ①，$1+q+q^2+\cdots+q^{2n+1}=(1+q+q^2+\cdots+q^n)(1+q^{n+1})=q^{m_2}$ ②，

两式相除，得到 $1+q^{n+1}=q^{m_2-m_1}$，

若 $|q|>1$，则取 n 为奇数，那么 $q^{n+1}>0$，所以 $q^{m_2-m_1}\geq|q|^{n+2}$，

所以 $1=q^{m_2-m_1}-q^{n+1}\geq|q|^{n+2}-q^{n+1}=|q|^{n+1}(|q|-1)$，

当 n 足够大时，显然不成立；

若 $|q|<1$，则 $\left|q^{m_2-m_1}\right|\in(0,|q|]\cup[\frac{1}{|q|},+\infty)$，因为 $|q|<1<\frac{1}{|q|}$，

所以当 n 足够大时，可以使 $1+q^{n+1}\in\left(|q|,\frac{1}{|q|}\right)$，故也不成立.从而知②错误，

对于选项③，取 $n=2$，则 $a_1+a_2=a_m$，所以 $a_1=a_m-a_2$，

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=a_{m_1}-a_{m_2}$，故③正确，

对于选项④，取数列 $a_n=n$，显然不存在 m，使得 $S_m=a_2=2$，故④错误，

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于第②选项，根据条件得到 $S_{n+1}=a_{m_1}, S_{2n+2}=a_{m_2}$，从而得到 $1+q^{n+1}=q^{m_2-m_1}$，再对 q 进行讨论，从而解决问题.

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】 ①. $(0,1)$ ②. $y=-1$

【分析】先将 $y=\frac{1}{4}x^2$ 化简为 $x^2=4y$，再利用抛物线的定义即可求解.

【详解】由题意知 $y=\frac{1}{4}x^2$，化简得 $x^2=4y$，所以焦点坐标为 $(0,1)$，准线方程为：$y=-1$.

故答案为：$(0,1)$；$y=-1$.

12.【答案】±10

【分析】由题意设 $\vec{b}=\lambda\vec{u}=(-3\lambda,4\lambda)$，结合 $|\vec{b}|=2$，求出 λ，再根据投影向量的定义，列式计算，即可求得答案.

【详解】由题意知向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\vec{u}=(-3,4)$，

设$\vec{b}=\lambda\vec{u}=(-3\lambda,4\lambda)$，由$|\vec{b}|=2$，得$(-3\lambda)^2+(4\lambda)^2=4,\therefore\lambda=\pm\dfrac{2}{5}$，

故$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{u}$，即$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}\cdot\dfrac{\lambda\vec{u}}{2}=\vec{u}$，

故$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{4}{\lambda}=\pm10$，

故答案为：±10

13.【答案】$\pm\sqrt{3}$

【分析】利用垂径定理表示出$|MN|$即可.

【详解】$x^2+y^2=4$可知圆心为$(0,0)$，半径$r=2$.

圆心到直线的距离，由点到直线的距离公式有：$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$.

由垂径定理可知：$|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\dfrac{m^2}{1+k^2}}$ ……①

由$|MN|$的表达式可知，当$k=0$时，$|MN|$取得最小值，即$|MN|_{\min}=2$ ……②

所以②代入①有：$2\sqrt{4-m^2}=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

故答案为：$\pm\sqrt{3}$.

14.【答案】$\dfrac{3}{2}$

【分析】由$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$上具有单调性，得函数最小正周期$T\geq\pi$，从而可由$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$得出其一条对称轴方程和一个对称中心，然后可求得周期，再由周期公式求ω的值.

【详解】因为$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$上具有单调性，

则$\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{1}{2}T$，所以$T\geq\pi$，又$\omega>0$，$\dfrac{2\pi}{\omega}\geq\pi$，故$0<\omega\leq2$，

由$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$可知函数$f(x)$的一条对称轴为$x=\dfrac{\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{11\pi}{12}}{2}=\dfrac{5\pi}{6}$，

又$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，则$f(x)$有对称中心$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$，

从而$T=4\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\pi}{3}$，即$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{3}$，

所以$\omega=\frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$.

15.【答案】②③④

【分析】对①，利用函数的单调性与最值的关系结合函数图象求解；对②，利用函数图象，数形结合求解；对③，利用函数的单调性解不等式；对④，利用函数的切线与导函数的关系，以及图形的对称关系，数形结合求解.

【详解】当$x>\pi$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x+\pi}+4a\in\left(4a,4a+1\right)$，

当$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$时，$f\left(x\right)=\cos x\in\left[-1,0\right]$，

若$a>0$，则当$x<\frac{\pi}{2}$时，$f\left(x\right)<f(\frac{\pi}{2})=a\pi$，则此时函数无最小值；

若$a=0$，则当$x<\frac{\pi}{2}$时，$f\left(x\right)=0$，$x>\pi$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x+\pi}+4a\in(0,1)$，

则函数有最小值为-1满足题意；

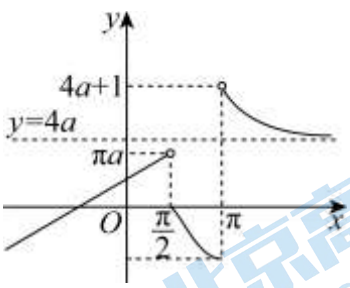
若$a<0$，则当$x<\frac{\pi}{2}$时，$f\left(x\right)>f(\frac{\pi}{2})=a\pi$，$x>\pi$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x+\pi}+4a\in\left(4a,4a+1\right)$，

要使函数有最小值，则$\begin{cases}\pi a\ge-1\\4a\ge-1\end{cases}$，解得$-\frac{1}{4}\le a<0$；

综上，a的取值范围是$\left[-\frac{1}{4},0\right]$，①错误；

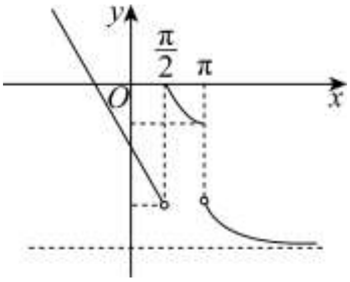
当$a>0$时，函数$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$单调递减，$\left(\pi,+\infty\right)$单调递减，

作图如下，



因为$f\left(x\right)=t$无实根，所以$\pi a\le t\le 4a$或$t\ge 4a+1$，②正确；

当$a\le-\frac{1}{2}$时，

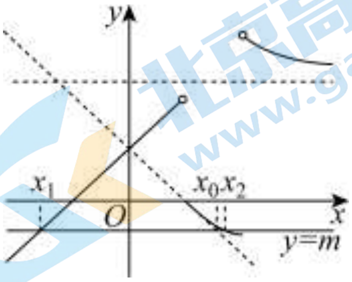


因为$4a+1\le -1$，所以函数$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$单调递减，

又因为$x^2+2\ge 2, |x|+4\ge 4,$ 所以由$f\left(x^2+2\right)>f\left(|x|+4\right)$可得，

$x^2+2<|x|+4$，即$x^2-|x|-2<0$，解得$0\le |x|<2$，所以$x\in(-2,2)$，

所以不等式$f\left(x^2+2\right)>f\left(|x|+4\right)$的解集为$(-2,2)$，③正确；



函数$f(x)$在点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$处的切线斜率为$f'(x)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$，

所以切线方程为$y=-x+\frac{\pi}{2}$，则由图象可知，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$\cos x\ge -x+\frac{\pi}{2}$，

设$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=m\in(-1,0)$，

记直线$y=m$与函数$f(x), x\in\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$，$y=-x+\frac{\pi}{2}$，$f(x), x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$的交点的横坐标为$x_1, x_0, x_2$，

因为$f(x)=a\left(x+\frac{\pi}{2}\right), x<\frac{\pi}{2}$经过点$(-\frac{\pi}{2},0)$，

所以由对称性可知，当$a\ge 1$时，$x_1+x_0\ge 0$，又因为$x_2>x_0$，所以$x_1+x_2>0$，④正确；

故答案为:②③④.

【点睛】关键点点睛：本题的②③④小问都用数形结合的思想，数形结合的思想通常与函数的单调性、最值等有关联，根据单调性、最值，以及一些特殊的点准确作出函数图象是用数形结合来解决问题的关键.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.【答案】(1) $B=\frac{2\pi}{3}$

(2) 正确条件为①③，(i) $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，(ii) $BD=\frac{15}{8}$

【分析】（1）利用和角正弦公式可得 $2\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=0$，结合三角形内角和性质即可求 B 的值；

（2）根据条件组合判断出正确条件为①③，（i）应用余弦定理、三角形面积公式求各边长，最后由正弦定理求 $\sin A$；

（ii）由角平分线性质求得 $\angle ABD=\frac{\pi}{3}$，再根据三角形内角和定理及两角和的正弦公式求出 $\sin\angle ADB$，再根据正弦定理求 BD 的长．

【小问 1 详解】

由题设 $\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

而 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，

所以 $B+\frac{\pi}{3}=\pi$，故 $B=\frac{2\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

若①②正确，则 $c^2+3c+2=(c+1)(c+2)=0$，得 $c=-1$ 或 $c=-2$，

所以①②有一个错误条件，则③是正确条件，

若②③正确，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，可得 $\sin C=\frac{15}{2}>1$，即②为错误条件，

综上，正确条件为①③，

（i）由 $2ac\cos B=a^2+c^2-b^2$，则 $c(3-a)=0$，即 $a=3$，

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，可得 $c=5$，

所以 $9-b^2+25+15=0$，可得 $b=7$，则 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{14}{\sqrt{3}}$，

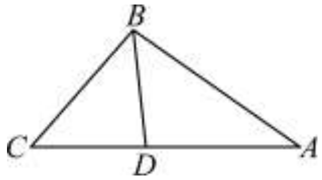
故 $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$；

（ii）因为 $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 且 $A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{13}{14}$，

由 BD 平分 $\angle ABC$ 得 $\angle ABD=\frac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\sin\angle ADB=\sin(\angle ABD+A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

在△ABD 中，由 $\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，得 $BD=\dfrac{5\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}}{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}=\dfrac{15}{8}$.



17.【答案】(I) 分布列见解析，$E(X)=15$；(II)$\dfrac{3}{4}$；(III)至少增加 2 人.

【分析】

(I) 求出 X 的所有可能取值为 9，12，15，18，24，求出概率，得到 X 的分布列，然后求解期望即可.

(II) 当 P（$a\le X\le b$）取到最大值时，求出 a，b 的可能值，然后求解 P（$a\le X\le b$）的最大值即可.

(III) 利用前两问的结果，判断至少增加 2 人.

【详解】(I)X 的取值为：9，12，15，18，24；

$P(X=9)=\dfrac{3}{20},P(X=12)=\dfrac{5}{20},P(X=15)=\dfrac{7}{20}$,

$P(X=18)=\dfrac{2}{20},P(X=24)=\dfrac{3}{20}$,

X 的分布列为：

X	9	12	15	18	24
P	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{5}{20}$	$\dfrac{7}{20}$	$\dfrac{2}{20}$	$\dfrac{3}{20}$

故 X 的数学期望 $E(X)=9\times\dfrac{3}{20}+12\times\dfrac{5}{20}+15\times\dfrac{7}{20}+18\times\dfrac{2}{20}+24\times\dfrac{3}{20}=15$；

(II)当 $P(a\le X\le b)$取到最大值时。

a,b 的值可能为：$\begin{cases}a=9\\b=15\end{cases}$,或$\begin{cases}a=12\\b=18\end{cases}$,或$\begin{cases}a=18\\b=24\end{cases}$.

经计算 $P(9\le X\le 15)=\dfrac{15}{20},P(12\le X\le 18)=\dfrac{14}{20},P(18\le X\le 24)=\dfrac{5}{20}$,

所以 $P(a\le X\le b)$的最大值为 $\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$.

(III)至少增加 2 人.

【点睛】本题考查离散型随机变量及其分布列，离散型随机变量的期望与方差，属于中等题.

18.【答案】(1) 证明见解析

（2）① $\frac{\sqrt{21}}{14}$；② $\frac{\sqrt{42}}{14}$

【分析】（1）通过证明四边形 PQA_1M 为平行四边形，得到 $PM \parallel A_1Q$，进而证明 $MP//$ 平面 ABB_1A_1.

（2）结合题意，通过面面垂直，转化为 AA_1, AB, AC 两两垂直，从而建立坐标系，计算即可.

【小问 1 详解】

如图，取 AB 中点 Q，连接 QA_1, QB，

因为 P 为 BC 的中点，所以 $PQ//AC$，且 $PQ=\frac{1}{2}AC$

因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M 为 A_1C_1 的中点，

所以 $A_1M//AC$，且 $A_1M=\frac{1}{2}AC$，

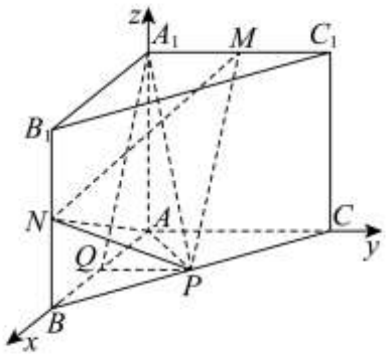
所以 $PQ//A_1M$，$PQ=A_1M$，

所以四边形 PQA_1M 为平行四边形.

所以 $PM \parallel A_1Q$，

又因为 $A_1Q\subset$ 平面 ABB_1A_1，$MP\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，

因此，$MP//$ 平面 ABB_1A_1.



【小问 2 详解】

因为平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 ABC，且交线为 BC.

$AP\perp BC, AP\subset$ 平面 ABC.

所以 $AP\perp$ 平面 B_1BCC_1. 因为 $BB_1\subset$ 面 B_1BCC_1，所以 $AP\perp BB_1$.

因为 $AA_1\parallel BB_1$. 所以 $AP\perp AA_1$.

因为 $AA_1\perp AB$，且 $AP\cap AB=A, AP, AB\subset$ 面 ABC，

所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC.

再由 $AB\perp AC$，得 AA_1, AB, AC 两两垂直，如图建立直角坐标系 $A-xyz$.

有 $A_1(0,0,2), N(2,0,1), M(0,1,2), P(1,1,0)$，

$\overrightarrow{AP}=(1,1,0), \overrightarrow{A_1P}=(1,1,-2), \overrightarrow{PM}=(-1,0,2), \overrightarrow{PN}=(1,-1,1)$.

设平面 PMN 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{PN}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+2z=0\\ x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(2,3,1).$$

①设所求线面角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{A_1P},\vec{n}>\right|=\dfrac{|\overrightarrow{A_1P}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1P}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

② $AH=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{5}{\sqrt{14}},HP=\sqrt{AP^2-AH^2}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

19.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2) 存在，3

【分析】(1) 由椭圆的对称性得 $|F_1M|=|F_2N|$，结合椭圆的定义可求出 $a=2$，即可求出答案；

(2) 设 $P(4,y_0)(y_0\neq 0)$，设直线 AP 的方程为： $y=\dfrac{y_0}{6}(x+2)$，与椭圆的方程联立，由此利用韦达定理结合已知条件能求出存在 $\lambda=3$，使得 $S_{\triangle ACD}=\lambda S_{\triangle BCD}$ 成立.

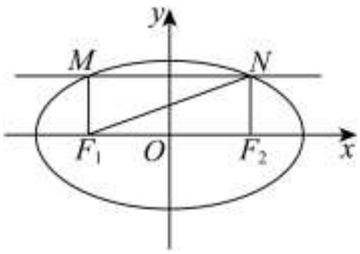
【小问 1 详解】

因为焦距为 $2=2c$，即 $c=1$，由椭圆的对称性得 $|F_1M|=|F_2N|$.

又因为 $|F_1M|+|F_1N|=4$，所以 $|F_2N|+|F_1N|=4$. 则 $2a=4$， $a=2$.

所以 $b=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.



【小问 2 详解】

设 $P(4,y_0)(y_0\neq 0)$，又 $A(-2,0)$，则 $k_{AP}=\dfrac{y_0}{6}$，

故直线 AP 的方程为： $y=\dfrac{y_0}{6}(x+2)$，代入方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 并整理得：

$$(27+y_0^2)x^2+4y_0^2x+4y_0^2-108=0.$$

由韦达定理： $x_A+x_C=-2+x_C=-\dfrac{4y_0^2}{27+y_0^2}$，即 $x_C=-\dfrac{4y_0^2}{27+y_0^2}+2=\dfrac{54-2y_0^2}{27+y_0^2}$，所以 $y_C=\dfrac{18y_0}{27+y_0^2}$，

故直线 BP 的方程为：$y=\frac{y_0}{2}(x-2)$，代入方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 并整理得：

$\left(3+y_0^2\right)x^2-4y_0^2x+4y_0^2-12=0$，

由韦达定理：$x_B+x_D=2+x_D=\frac{4y_0^2}{3+y_0^2}$，即 $x_D=\frac{4y_0^2}{3+y_0^2}-2=\frac{2y_0^2-6}{3+y_0^2}$，所以 $y_D=\frac{-6y_0}{3+y_0^2}$

所以 $k_{CD}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=\frac{6y_0}{9-y_0^2}$，

故直线 CD 的方程为 $y=k_{CD}(x-x_C)+y_C$，即 $y=\frac{6y_0}{9-y_0^2}\left(x-\frac{54-2y_0^2}{27+y_0^2}\right)+\frac{18y_0}{27+y_0^2}$，

化简可得：$\left(9-y_0^2\right)y+6y_0(-x+1)=0$，

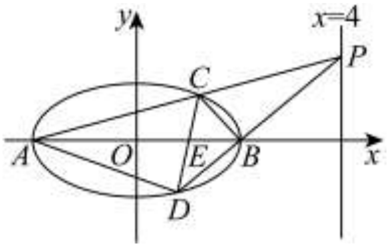
所以直线 CD 恒过定点 $E(1,0)$.

所以 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{S_{\triangle AEC}+S_{\triangle AED}}{S_{\triangle BEC}+S_{\triangle BED}}=\frac{\frac{1}{2}|AE||y_C-y_D|}{\frac{1}{2}|BE||y_C-y_D|}=\frac{|AE|}{|BE|}$，

因为 $|AE|=1+2=3$，$|BE|=2-1=1$，

所以 $\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{3}{1}=3=\lambda$，

所以存在 $\lambda=3$，使 $S_{\triangle ACD}=\lambda S_{\triangle BCD}$.



【点睛】方法点睛：本题考查直线与椭圆综合应用中的定点问题的求解，求解此类问题的基本思路如下：

①假设直线方程，与椭圆方程联立，整理为关于 x 或 y 的一元二次方程的形式；

②利用 Δ 求得变量之间的关系，同时得到韦达定理的形式；

③利用韦达定理表示出已知的等量关系，化简整理得到所求定点.

20. 【答案】(1). $y-\frac{1}{2e}=0$

(2) $(-\infty,1)$

(3) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

【分析】(1) 先求导后求出切线的斜率 $f'(0)=0$，然后求出直线上该点的坐标即可写出直线方程；

（2）根据函数的单调性和最值分类讨论；

（3）分情况讨论，根据函数的单调性和极限求解.

【小问 1 详解】

$f(0)=e^{-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}$，所以：切点为$\left(0,\frac{1}{2e}\right)$，

又 $f'(x)=e^{2x-1}\left[2ax^2+2(a-1)x\right]=2x(ax+a-1)e^{2x-1}$，所以：$f'(0)=0$，

所以：切线方程为 $y-\frac{1}{2e}=0$.

【小问 2 详解】

定义域为 **R**，$f'(x)=2x(ax+a-1)e^{2x-1}$，

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=-2xe^{2x-1}$，令 $f'(x)>0$ 得 $x<0$，所以：$f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty,0)$；

令 $f'(x)<0$ 得 $x>0$，所以 $f(x)$ 单调递减区间为 $(0,+\infty)$；所以：$f(x)$ 在 $x=0$ 取极大值，符合题意.

②当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=2x(ax+a-1)e^{2x-1}=0$，得：$x_1=0$，$x_2=\frac{1-a}{a}<0$

x，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\frac{1-a}{a}\right)$	$\frac{1-a}{a}$	$\left(\frac{1-a}{a},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	减	极小值	增	极大值	减

所以：$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，所以：$a<0$ 符合题意.

③当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=2x(ax+a-1)e^{2x-1}=0$，得：$x_1=0$，$x_2=\frac{1-a}{a}$，

（i）当 $\frac{1-a}{a}<0$ 即 $a>1$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\frac{1-a}{a}\right)$	$\frac{1-a}{a}$	$\left(\frac{1-a}{a},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以：$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，不合题意.

（ii）当$\frac{1-a}{a}=0$即$a=1$时，$f'(x)\geq 0$在$\mathbf{R}$上恒成立，所以：$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，无极大值点.

（iii）当$\frac{1-a}{a}>0$，即$0<a<1$时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1-a}{a}\right)$	$\frac{1-a}{a}$	$\left(\frac{1-a}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以：$f(x)$在$x=0$处取得极大值，所以：$0<a<1$合题意.

综上可得：a的取值范围是$(-\infty,1)$.

【小问 3 详解】

$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

详解如下：根据（2）知可分三种情况：①$a\leq 0$，②$0<a<1$，③$a\geq 1$：

①当$a\leq 0$时，$f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1-a}{a}\right)$单调递减，$\left(\frac{1-a}{a},0\right)$单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减，无最小值.

②当$0<a<1$时，当$x<0$，x趋向$-\infty$时，$f(x)$趋向于0，

当$x>0$，要使函数$f(x)$取得存在的最小值，

即：$f\left(\frac{1-a}{a}\right)=e^{\frac{2-3a}{a}}\left[a\left(\frac{1-a}{a}\right)^2-\frac{1-a}{a}+\frac{1}{2}\right]=e^{\frac{2-3a}{a}}\frac{2a-1}{2}\leq 0$，解得：$0<a\leq\frac{1}{2}$，

故$x=\frac{1-a}{a}$时，取得最小值，故a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

③当$a\geq 1$时，$f(x)$在x趋向$-\infty$时，$f(x)$趋向于0，

又因为$x=0$时，$f(x)$取到极小值，$f(0)=\frac{1}{2\mathrm{e}}>0$，故无最小值.

综上所述：函数$f(x)$存在最小值，a的取值范围为：$\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

21.【答案】（1）$\{1,3,5\}$

（2）证明见解析　（3）不存在，理由见解析

【分析】（1）根据定义知$a_n\geq 0$，讨论$a_3>2$、$a_3<2$及a_3,a_4大小求所有a_4可能值；

（2）由 $a_n \geq 0$，假设存在 $n_0 \in \mathrm{N}^*$ 使 $a_n \leq a_{n_0}$，进而有 $a_{n_0} \leq \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \leq a_{n_0}$，可得 $\min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} = 0$，即可证结论；

（3）由题设 $a_n \neq a_{n+1}\,(n = 2,3,\cdots)$，令 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\}$，讨论 $S = \varnothing$、$S \neq \varnothing$ 求证 $a_n > M$ 即可判断存在性.

【小问 1 详解】

由 $a_n = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} - \min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \geq 0$，$a_1 = \max\{2, a_3\} - \min\{2, a_3\} = 1$，

若 $a_3 > 2$，则 $a_3 - 2 = 1$，即 $a_3 = 3$，此时 $a_2 = \max\{3, a_4\} - \min\{3, a_4\} = 2$，

当 $a_4 > 3$，则 $a_4 - 3 = 2$，即 $a_4 = 5$；

当 $a_4 < 3$，则 $3 - a_4 = 2$，即 $a_4 = 1$；

若 $a_3 < 2$，则 $2 - a_3 = 1$，即 $a_3 = 1$，此时 $a_2 = \max\{1, a_4\} - \min\{1, a_4\} = 2$，

当 $a_4 > 1$，则 $a_4 - 1 = 2$，即 $a_4 = 3$；

当 $a_4 < 1$，则 $1 - a_4 = 2$，即 $a_4 = -1$（舍）；

综上，a_4 的所有可能值为 $\{1, 3, 5\}$.

【小问 2 详解】

由（1）知：$a_n \geq 0$，则 $\min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \geq 0$，

数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，故存在 $n_0 \in \mathrm{N}^*$ 使 $a_n \leq a_{n_0}$，$(n = 1,2,3,\cdots)$，

由 $a_{n_0} = \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} - \min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \leq \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \leq a_{n_0}$，

所以 $\min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} = 0$，故存在 $k \in \{n_0+1, n_0+2\}$ 使 $a_k = 0$，

所以 0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

【小问 3 详解】

不存在，理由如下：由 $a_n > 0(n = 1,2,3,\cdots)$，则 $a_n \neq a_{n+1}\,(n = 2,3,\cdots)$，

设 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\}$，

若 $S = \varnothing$，则 $a_1 \leqslant a_2$，$a_i < a_{i+1}\,(i = 2,3,\cdots)$，

对任意 $M > 0$，取 $n_1 = [\frac{M}{a_1}] + 2$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），

当 $n > n_1$ 时，$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_3 - a_2) + a_2$

$= a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_1 + a_2 \geq (n-1)a_1 > M$；

若 $S \neq \varnothing$，则 S 为有限集，

设 $m = \max\{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\}$，$a_{m+i} < a_{m+i+1}\,(i = 1,2,3,\cdots)$，

对任意 $M>0$，取 $n_2=[\frac{M}{a_{m+1}}]+m+1$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数），

当 $n>n_2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_{m+2}-a_{m+1})+a_{m+1}$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+\ldots+a_m+a_{m+1}\ge(n-m)a_{m+1}>M$；

综上，不存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\le M$．

【点睛】关键点点睛：第三问，首选确定 $a_n\ne a_{n+1}\,(n=2,3,\cdots)$，并构造集合 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\ge1\}$，讨论 $S=\varnothing$ 、$S\ne\varnothing$ 研究存在性.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！