丰台区 2022 ~ 2023 学年度第一学期期末练习

高 二 数 学

2023.01

考生须知	
考生须知	1. 答题前,考生务必先将答题卡上的学校、班级、姓名、教育 ID 号用黑色字迹签字笔填写清楚,并认真核对条形码上的教育 ID 号、姓名,在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。 2. 本次练习所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑,如需改动,用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写,要求字体工整、字迹清楚。 3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答,超出答题区域书写的答案无效,在练习卷、草稿纸上答题无效。 4. 本练习卷满分共 150 分,作答时长 120 分钟。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知经过 $A(0,2)$, $B(1,0)$ 两点的直线的一个方向向量为 $(1,k)$,那么 $k=$

(A) -2　　(B) -1　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) 2

(2) 圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心坐标和半径分别为

(A) $(-2,-2)$, 2　　(B) $(2,2)$, 2

(C) $(-2,-2)$, 4　　(D) $(2,2)$, 4

(3) 有一组样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方差为 0.1,则数据 $x_1+2, x_2+2, \cdots, x_n+2$ 的方差为

(A) 0.1　　(B) 0.2　　(C) 1.1　　(D) 2.1

(4) 已知 m, n 是实数,若 $\boldsymbol{a}=(2,2m-3,2)$, $\boldsymbol{b}=(4,2,3n-2)$,且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则 $m+n=$

(A) -4　　(B) 0　　(C) 2　　(D) 4

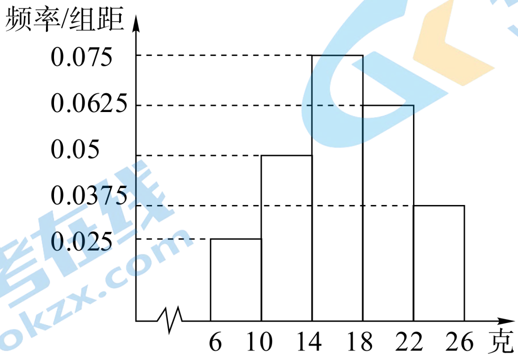
(5) 记录并整理某车间 10 名工人一天生产的产品数量(单位:个)如下表所示:

工人	赵甲	钱乙	孙丙	李丁	周戊	吴己	郑庚	王辛	冯壬	陈癸
产品数量/个	46	48	51	53	53	56	56	56	58	71

那么这 10 名工人一天生产的产品数量的第 30 百分位数为

(A) 49.5　　(B) 51　　(C) 52　　(D) 53

(6)某工厂对一批产品进行了抽样检测,下图是根据抽样检测后的产品净重(单位:克)数据绘制的频率分布直方图,其中产品净重的范围是[6,26],样本数据分组为[6,10),[10,14),[14,18),[18,22),[22,26],已知样本中产品净重小于14克的个数是36,则样本中净重大于或等于10克并且小于22克的产品的个数是



(A)90　　(B)75　　(C)60　　(D)45

(7)已知生产某种产品需要两道工序,设事件 A =“第一道工序加工合格”,事件 B =“第二道工序加工合格”,只有第一道工序加工合格才进行第二道工序加工,那么事件“产品不合格”可以表示为

(A)$\overline{A}$　　(B)AB　　(C)$A\overline{B}$　　(D)$\overline{A}\cup A\overline{B}$

(8)已知圆 $M:x^2+y^2=1$ 和 $N:(x-2\sqrt{2})^2+(y-2\sqrt{2})^2=m^2(m>0)$ 存在公共点,则 m 的值不可能为

(A)3　　(B)$3\sqrt{2}$　　(C)5　　(D)$4\sqrt{2}$

(9)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右支与圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 交于 A,B 两点,O 为坐标原点. 若$\triangle OAB$ 为正三角形,则该双曲线的离心率为

(A)$\frac{2}{3}$　　(B)$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(C)$\sqrt{2}$　　(D)2

(10)在平面直角坐标系 xOy 中,方程 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-3)^2+y^2}=13$ 对应的曲线记为 C,给出下列结论:

①(0,0)是曲线 C 上的点;

②曲线 C 是中心对称图形;

③记 $A(-3,0)$,$B(3,0)$,P 为曲线 C 上任意一点,则$\triangle PAB$ 面积的最大值为6.

其中正确结论的个数为

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的渐近线方程为________.

(12) 甲、乙两人独立地破译某个密码，若两人独立译出密码的概率都是 0.5，则密码被破译的概率为________.

(13) 写出过点 $A(2,3)$ 且与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相切的一条直线的方程________.

(14) 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，已知过坐标原点 O 的平面 α 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(0,0,-1)$，点 $P(3,-4,5)$ 到平面 α 的距离为________.

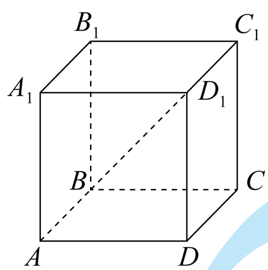
(15) 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}+z\overrightarrow{BB_1}$，其中 x，y，$z\in[0,1]$，给出下列四个结论：

① 当 $x=0$，$z=1$ 时，$\triangle BPD_1$ 可能是等腰三角形；

② 当 $x=0$，$y=1$ 时，三棱锥 $P-BDD_1$ 的体积恒为 $\frac{4}{3}$；

③ 当 $z=1$，且 $x+y=1$ 时，$\triangle BPD_1$ 的面积的最小值为 $\sqrt{2}$；

④ 当 $z=1$，且 $x+y=\frac{1}{2}$ 时，$\angle BPD_1$ 可能为直角.



其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)（本小题 13 分）

已知 $\triangle OAB$ 的三个顶点分别是 $O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(4,2)$.

（Ⅰ）求 $\triangle OAB$ 的外接圆 C 的方程；

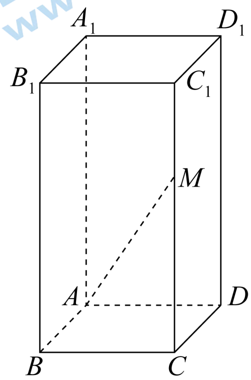
（Ⅱ）求直线 l：$4x+3y-8=0$ 被圆 C 截得的弦的长.

(17)(本小题 14 分)

如图,在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2AB=2BC=2$,M 是棱 CC_1 上任意一点.

(Ⅰ)求证:$AM\perp BD$;

(Ⅱ)若 M 是棱 CC_1 的中点,求异面直线 AM 与 BC 所成角的余弦值.



(18)(本小题 14 分)

某公司为了了解 A,B 两个地区用户对其产品的满意程度,从 A 地区随机抽取 400 名用户,从 B 地区随机抽取 100 名用户,通过问卷的形式对公司产品评分. 该公司将收集的数据按照[20,40),[40,60),[60,80),[80,100]分组,绘制成评分分布表如下:

分组	A 地区	B 地区
[20,40)	40	30
[40,60)	120	20
[60,80)	160	40
[80,100]	80	10
合计	400	100

(Ⅰ)采取按组分层随机抽样的方法,从 A 地区抽取的 400 名用户中抽取 10 名用户参加座谈活动. 求参加座谈的用户中,对公司产品的评分不低于 60 分的用户有多少名?

(Ⅱ)从(Ⅰ)中参加座谈的且评分不低于 60 分的用户中随机选取 2 名用户,求这 2 名用户的评分恰有 1 名低于 80 分的概率;

(Ⅲ)若 A 地区用户对该公司产品的评分的平均值为 μ_1,B 地区用户对该公司产品的评分的平均值为 μ_2,两个地区的所有用户对该公司产品的评分的平均值为 μ_0,试比较 μ_0 和 $\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$ 的大小,并说明理由.

(19)(本小题 14 分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 过点 $A(1,2)$.

(Ⅰ)求抛物线 C 的方程及其焦点坐标;

(Ⅱ)过点 A 的直线 l 与抛物线 C 的另一个交点为 B,若 $\triangle OAB$ 的面积为 2,其中 O 为坐标原点,求点 B 的坐标.

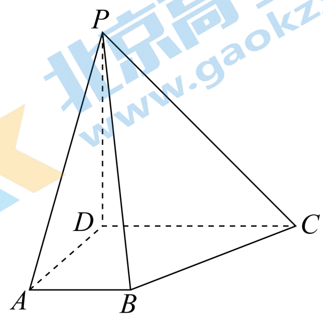
(20)(本小题 15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$ 平面 $ABCD$,$AB\parallel CD$,$\angle ADC=90°$,且 $AD=CD=PD=2AB$.

(Ⅰ)求证:$AB\perp$ 平面 PAD;

(Ⅱ)求平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值;

(Ⅲ)在棱 PB 上是否存在点 G(G 与 P,B 不重合),使得 DG 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$? 若存在,求 $\frac{PG}{PB}$ 的值,若不存在,说明理由.



(21)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $A(2,0)$,$B(0,1)$两点.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ)过点 P 的直线 l 与椭圆 E 交于 C,D 两点.

(ⅰ)若点 P 坐标为$(2,1)$,直线 BC,BD 分别与 x 轴交于 M,N 两点.求证:$|AM|=|AN|$;

(ⅱ)若点 P 坐标为$(2,\frac{\sqrt{3}}{3})$,直线 g 的方程为$\sqrt{3}x-6y-2\sqrt{3}=0$,椭圆 E 上存在定点 Q,使直线 QC,QD 分别与直线 g 交于 M,N 两点,且$|AM|=|AN|$. 请直接写出点 Q 的坐标,结论不需证明.

(考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效)

丰台区 2022～2023 学年度第一学期期末练习

高二数学参考答案

2023. 01

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	A	D	C	A	D	D	C	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．$y=\pm x$　　12．0.75

13．$x=2$ 或 $4x-3y+1=0$（写出任意一条即可）　　14．5

15．①②③（全选对给 5 分，有错选给 0 分，其他情况给 3 分）

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$

因为点 $O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(4,2)$ 在圆 C 上，

所以 $\begin{cases}F=0,\\4+2D+F=0,\\20+4D+2E+F=0.\end{cases}$　…………3 分

解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=-6,\\F=0.\end{cases}$　…………3 分

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2x-6y=0$.　…………7 分

（Ⅱ）因为圆 C 的圆心 $C(1,3)$，半径 $r=\sqrt{10}$.　…………10 分

设圆心 C 到直线 l 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|4\times1+3\times3-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$.　…………11 分

记直线 l 与圆 C 的两个交点分别为 M,N，则有

$(\dfrac{|MN|}{2})^2=r^2-d^2=9$，　…………12 分

所以 $|MN|=6$.　…………13 分

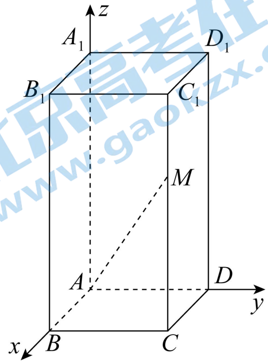
17．（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）证明：在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB，AD，AA_1 两两互相垂直，以 A 为原点，AB，AD，

AA_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $CM=m(0\leqslant m\leqslant 2)$，则

$A(0,0,0),M(1,1,m),B(1,0,0),D(0,1,0)$.



所以 $\overrightarrow{AM}=(1,1,m),\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

所以 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BD}$，

所以 $AM\perp BD$.　　…………7 分

（Ⅱ）因为 $B(1,0,0),C(1,1,0)$，M 是 CC_1 的中点，

所以 $\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，所以 $M(1,1,1)$ ，

所以 $\overrightarrow{AM}=(1,1,1)$.

设异面直线 AM 与 BC 所成角为 θ，

所以 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以异面 AM 与 BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　　…………14 分

18.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）设从 A 地区抽取的用户中抽取的 10 名参加座谈的用户中，对公司产品的评分不低于 60 分的用户有 m 名，则 $\dfrac{m}{10}=\dfrac{240}{400}$，所以 $m=6$.　　…………4 分

（Ⅱ）将从（Ⅰ）中参加座谈的且评分不低于 60 分的 6 名用户中，评分为 $[60,80)$ 的 4 名用户编号为 1，2，3，4，评分为 $[80,100]$ 的 2 名用户编号为 a， b，从 6 人中随机选取 2 名用户的样本空间

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,a),(1,b),(2,3),(2,4),(2,a),(2,b),(3,4),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b),(a,b)\}$.

设事件 $M=$“这两名用户的评分恰有一名低于 80 分”，则

$M=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b)\}$.

则 $P(M)=\dfrac{n(M)}{n(\Omega)}=\dfrac{8}{15}$，

所以这两名用户的评分恰有一名低于 80 分的概率为 $\dfrac{8}{15}$.　　…………11 分

（III）结论 1： $\mu_0>\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$，用样本估计总体.

方法一：计算 $\mu_1=30\times\dfrac{1}{10}+50\times\dfrac{3}{10}+70\times\dfrac{4}{10}+90\times\dfrac{2}{10}=64$，

$\mu_2=30\times\dfrac{3}{10}+50\times\dfrac{2}{10}+70\times\dfrac{4}{10}+90\times\dfrac{1}{10}=56$，

计算 $\mu_0=30\times\dfrac{7}{50}+50\times\dfrac{14}{50}+70\times\dfrac{20}{50}+90\times\dfrac{9}{50}=62.4$

所以 $\mu_0>\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$.

方法二：依据 A,B 两个地区调查后各组数据的频率对比，易知 $\mu_1>\mu_2$，

因为 A,B 两个地区抽取的样本容量不同 $n(A):n(B)=4:1$，

所以 $\mu_0=\dfrac{4}{5}\mu_1+\dfrac{1}{5}\mu_2>\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$. …………14 分

结论 2：无法判断 μ_0 与 $\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$ 的大小关系.

理由一：因为样本的抽样具有随机性，样本不一定能完全代表总体，所以无法比较. ….14 分

理由二：因为抽取样本时在两个地区中的抽样的权重不知道，所以无法确定 μ_0 的值，所以无法比较. …………14 分

注意：只判断大小，不说明理由不给分。

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为抛物线 $C:y^2=2px$ 经过点 $A(1,2)$，

所以 $2p=4$，即 $p=2$.

故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，焦点坐标为 $(1,0)$. …………5 分

（Ⅱ）解法 1：因为 $|OA|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$， $S_{\Delta OAB}=2$，

所以点 B 到直线 OA 的距离 $d=\dfrac{2S_{\Delta OAB}}{|OA|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

因为直线 OA 的方程为 $2x-y=0$，设点 B 坐标为 $B\left(\dfrac{t^2}{4},t\right)$，

所以点 B 到直线 OA 的距离又可以表示为 $d=\dfrac{\left|2\times\dfrac{t^2}{4}-t\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{t^2}{2}-t\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|t^2-2t|}{2\sqrt{5}}$，

所以 $\left|\dfrac{t^2}{2}-t\right|=4$，解得 $t=-2$ 或 $t=4$.

所以点 B 的坐标为 $(1,-2)$ 或 $(4,4)$. …………14 分

解法 2：因为$|OA|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$S_{\Delta OAB}=2$，

所以点 B 到直线 OA 的距离 $d=\dfrac{2S_{\Delta OAB}}{|OA|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

设经过点 B 平行于直线 OA 的直线 l 的方程为 $y=2x+m$，

所以点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，解得 $m=\pm 4$.

当 $m=4$ 时，由$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=2x+4\end{cases}$得 $y^2-2y+8=0$ 无解；

当 $m=-4$ 时，由$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=2x-4\end{cases}$得 $y^2-2y-8=0$，解得 $y=-2$ 或 $y=4$.

所以点 B 的坐标为$(1,-2)$或$(4,4)$. …………14 分

解法 3：当直线 AB 的斜率不存在时，点 B 的坐标为$(1,-2)$，此时 $S_{\Delta OAB}=2$，符合题意.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的斜率为 k，显然有 $k\neq 0$，方程记为 $kx-y-k+2=0$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ kx-y-k+2=0\end{cases}$，得 $k^2x^2-2(k^2-2k+2)x+(2-k)^2=0$.

显然 $\Delta=4(k^2-2k+2)^2-4k^2(2-k)^2=16(k-1)^2>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，有 $x_1+x_2=\dfrac{2(k^2-2k+2)}{k^2},x_1x_2=\dfrac{(2-k)^2}{k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}\,|k-1|}{k^2}$.

记点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{1+k^2}\,|k-1|}{k^2}\times\dfrac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，即$|k^2-3k+2|=k^2$，

所以，$k=\dfrac{2}{3}$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ 2x-3y+4=0\end{cases}$可得 $y=2$（舍）或 $y=4$.

所以点 B 的坐标为$(1,-2)$或$(4,4)$. …………14 分

解法 4：当直线 AB 的斜率不存在时，点 B 的坐标为 $(1,-2)$，此时 $S_{\Delta OAB}=2$，符合题意.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的斜率为 k，显然有 $k\neq 0$，方程记为 $kx-y-k+2=0$.

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ kx-y-k+2=0 \end{cases}$，得 $k^2x^2-2\left(k^2-2k+2\right)x+(2-k)^2=0$.

显然 $\Delta=4\left(k^2-2k+2\right)^2-4k^2(2-k)^2=16(k-1)^2>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，有 $x_1+x_2=\dfrac{2\left(k^2-2k+2\right)}{k^2},x_1x_2=\dfrac{(2-k)^2}{k^2}$，

因为 $x_1=1$，所以 $x_2=\dfrac{(2-k)^2}{k^2}$. 所以 $y_2=kx_2-k+2=\dfrac{k(2-k)^2}{k^2}-k+2=\dfrac{4-2k}{k}$，

所以点 B 的坐标为 $\left(\dfrac{(2-k)^2}{k^2},\dfrac{4-2k}{k}\right)$.

因为 $|OA|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$S_{\Delta OAB}=2$，

所以点 B 到直线 OA 的距离 $d=\dfrac{2S_{\Delta OAB}}{|OA|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

因为直线 OA 的方程为 $2x-y=0$，

所以点 B 到直线 OA 的距离又可以表示为 $d=\dfrac{\left|2\times\dfrac{(2-k)^2}{k^2}-\dfrac{4-2k}{k}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{4(k^2-3k+2)}{k^2}\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，

所以 $\left|k^2-3k+2\right|=k^2$，解得 $k=\dfrac{2}{3}$.

所以点 B 的坐标为 $(1,-2)$ 或 $(4,4)$. …………14 分

20.（本小题共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AB$.

因为 $\angle ADC=90^\circ$，所以 $AD\perp CD$，

因为 $AB\parallel CD$，

所以 $AD\perp AB$.

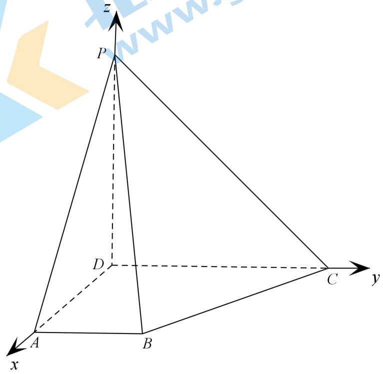
因为 $PD\cap AD=D$，$PD\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD. …………4 分

（Ⅱ）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ADC=90^{\circ}$，所以 DA，DC，DP 两两互相垂直. 以 D 为原点，DA，DC，DP 为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $PD=2$，则 $D(0,0,0),A(2,0,0),B(2,1,0),C(0,2,0),P(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,1,-2),\overrightarrow{BC}=(-2,1,0)$.



设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

因为 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y-2z=0,\\ -2x+y=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}z=2x,\\ y=2x.\end{cases}$

令 $x=1$，于是 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$.

因为平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{3}$.

所以平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$. …………10 分

（Ⅲ）棱 PB 上存在点 G，使得 DG 平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

设 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PB}$，其中 $\lambda\in(0,1)$，

所以 $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{DP}+\lambda\overrightarrow{PB}=(2\lambda,\lambda,2-2\lambda)$.

又因为平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$，DG 平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{DG},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{DG}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DG}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{3\sqrt{(2\lambda)^2+\lambda^2+(2-2\lambda)^2}}=\dfrac{2}{3}$.

整理得 $9\lambda^2-8\lambda=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{8}{9}$，或 $\lambda=0$（舍），

故 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{8}{9}$.

所以存在点 G，当 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{8}{9}$ 时，DG 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$. …………15 分

21．（本小题共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $a=2,b=1$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………4 分

（Ⅱ）（ⅰ）设过点 $P(2,1)$ 的直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，

不妨令 $-2\leqslant x_1<x_2<2$，由 $\begin{cases}y-1=k(x-2),\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$ 整理得

$(1+4k^2)x^2+(8k-16k^2)x+16k^2-16k=0$，

所以 $\Delta=(8k-16k^2)^2-4(1+4k^2)(16k^2-16k)>0$，解得 $k>0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{16k^2-8k}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{16k^2-16k}{1+4k^2}$.

①当 $x_1x_2\neq 0$ 时，直线 BC 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$，令 $y=0$，解得 $x_M=\frac{x_1}{1-y_1}$.

直线 BD 的方程为 $y-1=\frac{y_2-1}{x_2}x$，令 $y=0$，解得 $x_N=\frac{x_2}{1-y_2}$，

所以 $x_N+x_M=\frac{x_2}{1-y_2}+\frac{x_1}{1-y_1}=\frac{x_2}{1-[k(x_2-2)+1]}+\frac{x_1}{1-[k(x_1-2)+1]}$

$=\frac{x_2}{-k(x_2-2)}+\frac{x_1}{-k(x_1-2)}$

$=-\frac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)}{k(x_1x_2-2(x_1+x_2)+4)}$

$=-\frac{2\times\frac{16k^2-16k}{1+4k^2}-2\times\left(\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}\right)}{k\left(\frac{16k^2-16k}{1+4k^2}-2\times\left(\frac{16k^2-8k}{1+4k^2}\right)+4\right)}$

$=4$.

所以 $|AM|=|AN|$ …………11 分

②当 $x_1x_2=0$ 时，得 $C(0,-1)$，$D\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$，此时直线 BC 的方程为 $x=0$，直线 BD 的方程为

$y=-\frac{x}{4}+1$，所以 $M(0,0),N(4,0)$，符合题意. …………13 分

综上，$|AM|=|AN|$

（ii）$Q\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. …………15 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。