

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

本试卷共 5 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x > -1\}$ ， $B = \{x | x < 2\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $(-1, +\infty)$

B. $(-\infty, 2)$

C. $(-1, 2)$

D. \emptyset

2. 设 $z = i(2+i)$ ，则 $\bar{z} =$

A. $1+2i$

B. $-1+2i$

C. $1-2i$

D. $-1-2i$

3. 已知向量 $a=(2, 3)$, $b=(3, 2)$, 则 $|a-b|$ =

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $5\sqrt{2}$

D. 50

4. 生物实验室有 5 只兔子, 其中只有 3 只测量过某项指标, 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只, 则恰有 2 只测量过该指标的概率为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

5. 在“一带一路”知识测验后, 甲、乙、丙三人对成绩进行预测.

甲: 我的成绩比乙高.

乙: 丙的成绩比我和甲的都高.

丙: 我的成绩比乙高.

成绩公布后, 三人成绩互不相同且只有一个人预测正确, 那么三人按成绩由高到低的次序为

A. 甲、乙、丙

B. 乙、甲、丙

C. 丙、乙、甲

D. 甲、丙、乙

6. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$

A. $e^{-x} - 1$

B. $e^{-x} + 1$

C. $-e^{-x}-1$

D. $-e^{-x}+1$

7. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是

A. α 内有无数条直线与 β 平行

B. α 内有两条相交直线与 β 平行

C. α, β 平行于同一条直线

D. α, β 垂直于同一平面

8. 若 $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 两个相邻的极值点, 则 $\omega =$

A. 2

B. $\frac{3}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

9. 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$ 的一个焦点, 则 $p =$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 8

10. 曲线 $y = 2\sin x + \cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为

A. $x - y - \pi - 1 = 0$

B. $2x - y - 2\pi - 1 = 0$

C. $2x + y - 2\pi + 1 = 0$

D. $x + y - \pi + 1 = 0$

11. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点, 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x - y$ 的最大值是_____.

14. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A + a \cos B = 0$, 则 $B =$ _____.

16. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有_____个面, 其棱长为_____. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分.)



图 1



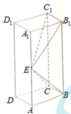
图 2

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上， $BE \perp EC_1$ 。



(1) 证明： $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 ；

(2) 若 $AE=A_1E$ ， $AB=3$ ，求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积。

18. (12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $a_1 = 2, a_3 = 2a_2 + 16$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. (12分)

某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况, 随机调查了 100 个企业, 得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.

y 的分组	$[-0.20, 0)$	$[0, 0.20)$	$[0.20, 0.40)$	$[0.40, 0.60)$	$[0.60, 0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

(1) 分别估计这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例、产值负增长的企业比例;

(2) 求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (精确到 0.01)

附: $\sqrt{74} \approx 8.602$.

20. (12分)

已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, P 为 C 上一点, O 为坐标原点.

(1) 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 求 C 的离心率;

(2) 如果存在点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16, 求 b 的值和 a 的取值范围.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$. 证明:

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) $f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在极坐标系中， O 为极点，点 $M(\rho_0, \theta_0)$ ($\rho_0 > 0$) 在曲线 $C: \rho = 4\sin\theta$ 上，直线 l 过点 $A(4, 0)$ 且与 OM 垂直，垂足为 P .

(1) 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时，求 ρ_0 及 l 的极坐标方程；

(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时，求 P 点轨迹的极坐标方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 $f(x) = |x-a| + |x-2| + (x-a)$.

(1) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x) < 0$ 的解集；

(2) 若 $x \in (-\infty, 1)$ 时， $f(x) < 0$ ，求 a 的取值范围.

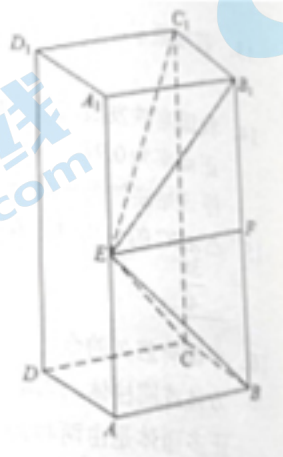
文科数学·参考答案

1. C 2. D 3. A 4. B 5. A 6. D

7. B 8. A 9. D 10. C 11. B 12. A

13. 9 14. 0.98 15. $\frac{3\pi}{4}$ 16. $\sqrt{2}-1$ 17. 解: (1) 由已知得 $B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $BE \subset$ 平面 ABB_1A_1 ,故 $B_1C_1 \perp BE$.又 $BE \perp EC_1$, 所以 $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 .

(2) 由 (1) 知 $\angle BEB_1 = 90^\circ$. 由题设知 $\text{Rt} \triangle ABE \cong \text{Rt} \triangle A_1B_1E$, 所以 $\angle AEB = \angle A_1EB_1 = 45^\circ$, 故 $AE = AB = 3$, $AA_1 = 2AE = 6$.

作 $EF \perp BB_1$, 垂足为 F , 则 $EF \perp$ 平面 BB_1C_1C , 且 $EF = AB = 3$.所以, 四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times 3 \times 6 \times 3 = 18$.18. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题设得

$$2q^2 = 4q + 16, \text{ 即 } q^2 - 2q - 8 = 0.$$

解得 $q = -2$ (舍去) 或 $q = 4$.

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$.

(2) 由 (1) 得 $b_n = (2n-1)\log_2 2 = 2n-1$, 因此数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $1+3+\dots+2n-1 = n^2$.

19. 解: (1) 根据产值增长率频数分布表得, 所调查的 100 个企业中产值增长率不低于 40% 的企业频率为 $\frac{14+7}{100} = 0.21$.

产值负增长的企业频率为 $\frac{2}{100} = 0.02$.

用样本频率分布估计总体分布得这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例为 21%, 产值负增长的企业比例为 2%.

$$(2) \bar{y} = \frac{1}{100}(-0.10 \times 2 + 0.10 \times 24 + 0.30 \times 53 + 0.50 \times 14 + 0.70 \times 7) = 0.30,$$

$$s^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 n_i (y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{100} [(-0.40)^2 \times 2 + (-0.20)^2 \times 24 + 0^2 \times 53 + 0.20^2 \times 14 + 0.40^2 \times 7]$$

$$= 0.0296,$$

$$s = \sqrt{0.0296} = 0.02 \times \sqrt{74} \approx 0.17,$$

所以, 这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值分别为 30%, 17%.

20. 解: (1) 连结 PF_1 , 由 $\triangle POF_2$ 为等边三角形可知在 $\triangle F_1PF_2$ 中, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, $|PF_2| = c$,

$|PF_1| = \sqrt{3}c$, 于是 $2a = |PF_1| + |PF_2| = (\sqrt{3} + 1)c$, 故 C 的离心率是 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1$.

(2) 由题意可知, 满足条件的点 $P(x, y)$ 存在当且仅当 $\frac{1}{2}|y| \cdot 2c = 16$, $\frac{y}{x+c} \cdot \frac{y}{x-c} = -1$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 即 } c|y| = 16, \text{ ①}$$

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3)$$

由②③及 $a^2 = b^2 + c^2$ 得 $y^2 = \frac{b^4}{c^2}$, 又由①知 $y^2 = \frac{16^2}{c^2}$, 故 $b = 4$.

由②③得 $x^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - b^2)$, 所以 $c^2 \geq b^2$, 从而 $a^2 = b^2 + c^2 \geq 2b^2 = 32$, 故 $a \geq 4\sqrt{2}$.

当 $b = 4$, $a \geq 4\sqrt{2}$ 时, 存在满足条件的点 P .

所以 $b = 4$, a 的取值范围为 $[4\sqrt{2}, +\infty)$.

21. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x - 1 = \ln x - \frac{1}{x}.$$

因为 $y = \ln x$ 单调递增, $y = \frac{1}{x}$ 单调递减, 所以 $f'(x)$ 单调递增, 又 $f'(1) = -1 < 0$,

$$f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{\ln 4 - 1}{2} > 0, \text{ 故存在唯一 } x_0 \in (1, 2), \text{ 使得 } f'(x_0) = 0.$$

又当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

因此, $f(x)$ 存在唯一的极值点.

(2) 由 (1) 知 $f(x_0) < f(1) = -2$, 又 $f(e^2) = e^2 - 3 > 0$, 所以 $f(x) = 0$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内存在唯一根 $x = \alpha$.

由 $\alpha > x_0 > 1$ 得 $\frac{1}{\alpha} < 1 < x_0$.

又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0$, 故 $\frac{1}{\alpha}$ 是 $f(x) = 0$ 在 $(0, x_0)$ 的唯一根.

综上, $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

22. 解: (1) 因为 $M(\rho_0, \theta_0)$ 在 C 上, 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时, $\rho_0 = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$.

由已知得 $|OP| = |OA| \cos \frac{\pi}{3} = 2$.

设 $Q(\rho, \theta)$ 为 l 上除 P 的任意一点. 在 $\text{Rt}\triangle OPQ$ 中 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = |OP| = 2$,

经检验, 点 $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ 在曲线 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ 上.

所以, l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$.

(2) 设 $P(\rho, \theta)$, 在 $\text{Rt}\triangle OAP$ 中, $|OP| = |OA| \cos \theta = 4 \cos \theta$, 即 $\rho = 4 \cos \theta$.

因为 P 在线段 OM 上, 且 $AP \perp OM$, 故 θ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

所以, P 点轨迹的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

23. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = |x-1|x + |x-2|(x-1)$.

当 $x < 1$ 时, $f(x) = -2(x-1)^2 < 0$; 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$.

所以, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, 1)$.

(2) 因为 $f(a) = 0$, 所以 $a \geq 1$.

当 $a \geq 1$, $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f(x) = (a-x)x + (2-x)(x-a) = 2(a-x)(x-1) < 0$.

所以, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.