2023 北京育英学校高三（上）月考

数　学（一）

一、选择题。（每小题 4 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\{0，a\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 可以是（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

2．$(\frac{1}{x}-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数是（　　）

A．-210　　B．-120　　C．120　　D．210

3．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为 60°，且与椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 有相等的焦距，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

C．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　D．$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$

4．已知 $a<b<0$，则下列不等式中正确的是（　　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$b^2<a^2$　　C．$\frac{b}{a}>1$　　D．$\sqrt{-a}<\sqrt{-b}$

5．函数 $f(x)=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2+1}-\frac{1}{2x}$ 的零点个数为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

6．以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A、B 两点，交 C 的准线于 D、E 两点．已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

7．已知 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 表示共面的三个单位向量，$\vec{i}\perp\vec{j}$，那么 $(\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{j}+\vec{k})$ 的取值范围是（　　）

A．$[-3，3]$　　B．$[-2，2]$　　C．$[\sqrt{2}-1，\sqrt{2}=1]$ D．$[1-\sqrt{2}，1+\sqrt{2}]$

8．已知函数 $f(x)=\sin\omega x$（$\omega>0$），则"函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4}，1)$"是"函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2}，0)$"的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．设 $0<p<1$，随机变量 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2

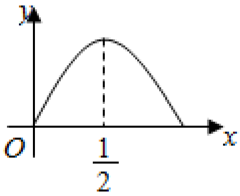
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

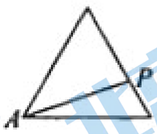
则当 p 在（0，1）内增大时，（　　）

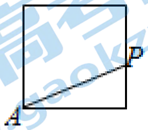
A．D（ξ）减小　　　　B．D（ξ）增大

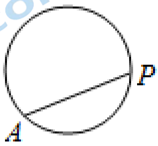
C．D（ξ）先减小后增大　　　　D．D（ξ）先增大后减小

10．动点 P 从点 A 出发，按逆时针方向沿周长为 1 的平面图形运动一周，A，P 两点间的距离 y 与动点 P 所走过的路程 x 的关系如图所示，那么动点 P 所走的图形可能是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

二、填空题。（每小题 5 分，共 25 分）

11．（5 分）设$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=1$，$a_1+a_3=6$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为_________．

12．（5 分）已知不等式$|x-m|<1$ 成立的充分不必要条件是$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，则 m 的取值范围是_____________．

13．（5 分）椭圆C_1：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$与曲线 C_2 关于直线 $y=-x$ 对称，C_1 与 C_2 分别在第一、二、三、四象限交于点 P_1，P_2，P_3，P_4．若四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积为 4，则点 P_1 的坐标为__________，C_1 的离心率为_____________．

14．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, & x\leqslant m\\ x-4, & x>m\end{cases}$.

①当 $m=0$ 时，函数 f（x）的零点个数为______；

②如果函数 f（x）恰有两个零点，那么实数 m 的取值范围为____________．

15．（5 分）已知函数 f（x）$=e^x-e^{-x}$，下列命题正确的有_______．（写出所有正确命题的编号）

①f（x）是奇函数；

②f（x）在 **R** 上是单调递增函数；

③方程 f（x）$=x^2+2x$ 有且仅有 1 个实数根；

④如果对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 f（x）$>kx$，那么 k 的最大值为 2．

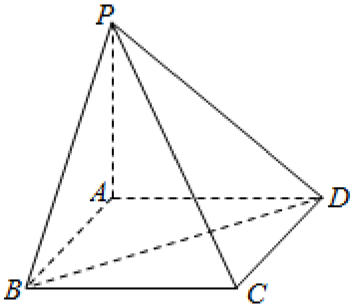
三、简答题。（共 85 分）

16．（13 分）如图，棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AD=2$，$BD=2\sqrt{2}$．

（1）求证：$BD\perp$平面 PAC；

（2）求二面角 $P-CD-B$ 的大小；

（3）求点 C 到平面 PBD 的距离．



17．（13 分）已知函数 $f(x)=4a\cos x\sin(x-\frac{\pi}{6})$，且 $f(\frac{\pi}{3})=1$．

（Ⅰ）求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间$[0，m]$上单调递增，求 m 的最大值．

18．（14 分）某学校为了解学生的体质健康状况，对高一、高二两个年级的学生进行了体质测试．现从两个年级学生中各随机选取 20 人，将他们的测试数据，用茎叶图表示如图：

《国家学生体质健康标准》的等级标准如表．规定：测试数据≥60，体质健康为合格．

等级	优秀	良好	及格	不及格
测试数据	[90，100]	[80，89]	[60，79]	[0，59]

（Ⅰ）从该校高二年级学生中随机选取一名学生，试估计这名学生体质健康合格的概率；

（Ⅱ）从两个年级等级为优秀的样本中各随机选取一名学生，求选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率；

（Ⅲ）设该校高一学生测试数据的平均数和方差分别为$\overline{x_1}$，s_1^2，高二学生测试数据的平均数和方差分别为$\overline{x_2}$，s_2^2，试估计$\overline{x_1}$与$\overline{x_2}$、s_1^2与s_2^2的大小．（只需写出结论）

高一		高二
6 4 3	9	0 5 8
7 6 3 2	8	1 4 5 8
9 8 5 2 1	7	2 3 3 9
9 7 7 6 4	6	4 5 7 8
8 3 0	5	0 2 6
	4	0 2

19．（15 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆 C 的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是 $2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 A 是椭圆 C 的右顶点，点 B 在 x 轴上．若椭圆 C 上存在点 P，使得∠APB＝90°，求点 B 横坐标的取值范围．

20．（15 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\in[-2,4]$时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

（Ⅲ）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|$（$a\in\mathbf{R}$），记 $F(x)$ 在区间$[-2,4]$上的最大值为 $M(a)$．当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值．

21．（15 分）给定数列$\{a_n\}$，若满足 $a_1=a$（$a>0$ 且 $a\neq1$），对于任意的 n，$m\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+m}=a_n\cdot a_m$，则称数列$\{a_n\}$为“指数型数列”．

（Ⅰ）已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n=5\times3^{n-1}$，$b_n=4^n$，试判断$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是不是“指数型数列”；

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），判断数列$\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$是否为“指数型数列”，若是给出证明，若不是说明理由；

（Ⅲ）若数列$\{a_n\}$是“指数型数列”，且 $a_1=\dfrac{a+1}{a+2}$（$a\in\mathbf{N}^*$），证明：数列$\{a_n\}$中任意三项都不能构成等差数列．

参考答案

一、选择题。（每小题 4 分，共 40 分）

1.【分析】由集合 $A=\{0，a\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，且 $A\subseteq B$，得到 $-1<a<2$，由此能求出结果.

【解答】解：∵集合 $A=\{0，a\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，且 $A\subseteq B$，

∴ $-1<a<2$，由 A 中元素互异性可得 $a\neq0$，

∴a 可以是 1.

故选：C.

【点评】本题考查实数值的可能取值的求法，考查子集、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

2.【分析】由二项式展开式通项公式可得：二项式（$\frac{1}{x}-x$）^{10} 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{10}^{r}(\frac{1}{x})^{10-r}(-x)^{r}=(-1)^{r}C_{10}^{r}x^{2r-10}$，再令 $2r-10=4$ 求解即可.

【解答】解：由二项式（$\frac{1}{x}-x$）^{10} 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_{10}^{r}(\frac{1}{x})^{10-r}(-x)^{r}=(-1)^{r}C_{10}^{r}x^{2r-10}$得，

令 $2r-10=4$，得 $r=7$，

即展开式中 x^4 的系数是 $(-1)^{7}C_{10}^{7}=-120$，

故选：B.

【点评】本题考查了二项式定理及二项式展开式通项公式，属基础题.

3.【分析】根据题意，由双曲线的方程分析可得其渐近线方程，分析可得有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即 $b=\sqrt{3}a$，求出椭圆的半焦距，分析可得 $a^2+b^2=4$，解可得 a^2、b^2 的值，将 a^2、b^2 的值代入双曲线的方程，即可得答案.

【解答】解：根据题意，双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在 x 轴上，其渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

若其一条渐近线的倾斜角为 60°，则该渐近线的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

则有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即 $b=\sqrt{3}a$，

椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 中，$c^2=5-1=4$，

若双曲线与椭圆有相等的焦距，则有 $a^2+b^2=4$，

解可得 $a^2=1$，$b^2=3$，

则双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

故选：C.

【点评】本题考查双曲线、椭圆的几何性质，注意分析双曲线的焦点位置.

4.【分析】利用特值代入，可排除错误的选项，即可得正确答案.

【解答】解：已知 $a<b<0$，故可取 $a=-2$，$b=-1$

可得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}<1$，$\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$

故 A、C、D 均不正确，唯有 B 正确．

故选：B．

【点评】本题主要考查不等式与不等关系，不等式的基本性质，利用特殊值代入法，是一种简单有效的方法，属于基础题．

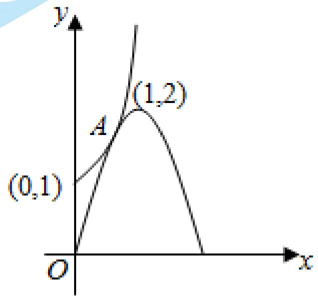
5.【分析】令 $f(x)=0$ 可得 $2x\sin\frac{\pi}{2}x=x^2+1$，设 $f_1(x)=2x\sin\frac{\pi}{2}x$，$f_2(x)=x^2+1$，作出 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的大致图象，根据两图象的关系得出结论．

【解答】解：$f(x)=\frac{2x\sin\frac{\pi}{2}x-x^2-1}{2x(x^2+1)}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

令 $f(x)=0$ 可得 $2x\sin\frac{\pi}{2}x=x^2+1$，

设 $f_1(x)=2x\sin\frac{\pi}{2}x$，$f_2(x)=x^2+1$，

画出 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的大致图象如下：



显然 $f_1(1)=f_2(1)=2$，即 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 交于点 $A(1,2)$，

又∵ $f'_1(x)=\pi x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x+2\sin\frac{\pi}{2}x$，$f'_2(x)=2x$，

∴ $f'_1(1)=f'_2(1)=2$，即点 A 为公切点，

∴点 A 为 $(0,+\infty)$ 内唯一交点，

又∵ $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，

∴点 $B(-1,2)$ 也为公切点，

∴ $f_1(x)$，$f_2(x)$ 有两个公共点，即 $f(x)$ 有两个零点．

故选：C．

【点评】本题考查了函数零点与函数图象的关系，导数的几何意义，属于中档题．

6.【分析】画出图形，设出抛物线方程，利用勾股定理以及圆的半径列出方程求解即可．

【解答】解：设抛物线为 $y^2=2px$，如图：$|AB|=4\sqrt{2}$，$|AM|=2\sqrt{2}$，

$|DE|=2\sqrt{5}$，$|DN|=\sqrt{5}$，$|ON|=\frac{p}{2}$，

$x_A=\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{2p}=\dfrac{4}{p}$,

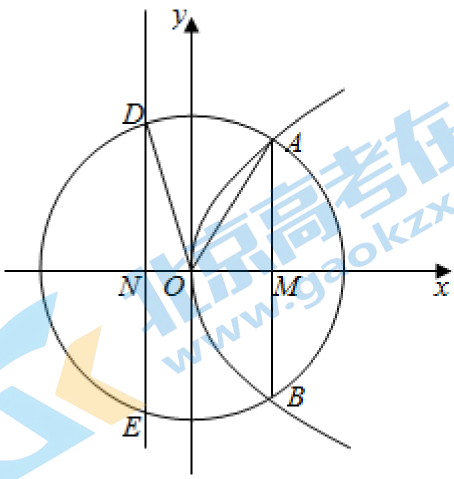
$|OD|=|OA|$,

$\dfrac{16}{p^2}+8=\dfrac{p^2}{4}+5$,

解得：$p=4$.

C 的焦点到准线的距离为：4.

故选：B.



【点评】本题考查抛物线的简单性质的应用，抛物线与圆的方程的应用，考查计算能力．转化思想的应用．

7.【分析】运用向量垂直的条件：数量积为 0，及向量模的公式，和向量数量积的定义，结合余弦函数的值域，即可计算得到．

【解答】解：由$\vec{i}\perp\vec{j}$，则$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$，

又$\vec{i}$，$\vec{j}$为单位向量，则$|\vec{i}+\vec{j}|=\sqrt{\vec{i}^2+\vec{j}^2+2\vec{i}\cdot\vec{j}}=\sqrt{2}$，

则（$\vec{i}+\vec{k}$）•（$\vec{j}+\vec{k}$）$=\vec{i}\cdot\vec{j}+(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}+\vec{k}^2$

$=(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}+1=|\vec{i}+\vec{j}|\cos<\vec{i}+\vec{j},\vec{k}>+1=\sqrt{2}\cos<\vec{i}+\vec{j},\vec{k}>+1$，

由 $-1\leqslant\cos<\vec{i}+\vec{j},\vec{k}>\leqslant 1$，

则（$\vec{i}+\vec{k}$）•（$\vec{j}+\vec{k}$）的取值范围是$[1-\sqrt{2}，1+\sqrt{2}]$.

故选：D.

【点评】本题考查平面向量的数量积的定义和性质，考查向量垂直的条件，考查余弦函数的值域，考查运算能力，属于中档题．

8.【分析】由三角函数求值易得："函数 $f(x)$ 的图象经过点（$\dfrac{\pi}{4}$，1）"是"函数 $f(x)$ 的图象经过点（$\dfrac{\pi}{2}$，0）"的充分不必要条件，得解．

【解答】解：当函数f（x）的图象经过点（$\frac{\pi}{4}$，1）时，得$\sin\frac{\omega\pi}{4}=1$，所以$\omega=8k+2$，$k\in\mathbf{Z}$，

则f（$\frac{\pi}{2}$）$=\sin$（$4k\pi+\pi$）$=0$，

即”函数f（x）的图象经过点（$\frac{\pi}{4}$，1）”能推出“函数f（x）的图象经过点（$\frac{\pi}{2}$，0）”

当函数f（x）的图象经过点（$\frac{\pi}{2}$，0），所以f（$\frac{\pi}{2}$）$=0$，所以$\sin\frac{\omega\pi}{2}=0$，所以$\frac{\omega\pi}{2}=k\pi$，所以$\omega=2k$，$k\in\mathbf{Z}$，

即f（$\frac{\pi}{4}$）$=\sin\frac{k\pi}{2}$，不能推出f（$\frac{\pi}{4}$）$=1$，

即“函数f（x）的图象经过点（$\frac{\pi}{4}$，1）”是“函数f（x）的图象经过点（$\frac{\pi}{2}$，0）”的充分不必要条件，

故选：A．

【点评】本题考查了三角函数求值及充分必要条件，属中档题．

9.【分析】求出随机变量ξ的分布列与方差，再讨论D（ξ）的单调情况．

【解答】解：设$0<p<1$，随机变量ξ的分布列是

E（ξ）$=0\times\frac{1-p}{2}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{p}{2}=p+\frac{1}{2}$；

方差是D（ξ）$=(0-p-\frac{1}{2})^2\times\frac{1-p}{2}+(1-p-\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}+(2-p-\frac{1}{2})^2\times\frac{p}{2}$

$=-p^2+p+\frac{1}{4}$

$=-(p-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$，

∴$p\in$（0，$\frac{1}{2}$）时，D（ξ）单调递增；

$p\in$（$\frac{1}{2}$，1）时，D（ξ）单调递减；

∴D（ξ）先增大后减小．

故选：D．

【点评】本题考查了离散型随机变量的数学期望与方差的计算问题，也考查了运算求解能力，是基础题．

10.【分析】本题考查的是函数的图象与图象变化的问题．在解答时首先要充分考查所给四个图形的特点，包括对称性、圆滑性等，再结合所给A，P两点连线的距离y与点P走过的路程x的函数图象即可直观的获得解答．

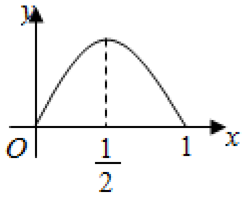
【解答】解：由题意可知：

对于A、B，当P位于A，B图形时，函数变化有部分为直线关系，不可能全部是曲线，

由此即可排除A、B，

对于 D，其图象变化不会是对称的，由此排除 D，

故选：C．



【点评】本题考查的是函数的图象与图象变化的问题．在解答的过程当中充分体现了观察图形、分析图形以及应用图形的能力．体现了函数图象与实际应用的完美结合．值得同学们体会反思．

二、填空题。（每小题 5 分，共 25 分）

11．【分析】由题意，利用等差数列的定义、通项公式，计算求得结果．

【解答】解：$\because \{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=1$，$a_1+a_3=2a_2=6$，设公差为 d，

$\therefore a_2=3$，$\therefore d=a_2-a_1=2$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$．

故答案为：$a_n=2n-1$．

【点评】本题主要考查等差数列的定义、通项公式，属于基础题．

12．【分析】先求出不等式$|x-m|<1$ 的解集，再由不等式$|x-m|<1$ 成立的充分不必要条件是$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$来确定 m 的取值范围．

【解答】解：$\because |x-m|<1$，

$\therefore -1<x-m<1$，

$\therefore m-1<x<m+1$，

$\because m-1<x<m+1$ 成立的充分不必要条件是$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，

$\therefore \begin{cases} m-1\leqslant\frac{1}{3} \\ m+1\geqslant\frac{1}{2} \end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$．

故 m 的取值范围是$[-\frac{1}{2}，\frac{4}{3}]$．

故答案为：$[-\frac{1}{2}，\frac{4}{3}]$．

【点评】本题考查充分不必要条件的应用，解题时要注意含绝对值不等式的解法和应用．

13．【分析】由题意求得曲线 C_2 的方程，与椭圆 C_1 联立，结合四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积为 4 求得 b^2，则答案可求．

【解答】解：在椭圆C_1：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，取 $x=-y$，$y=-x$，可得曲线 C_2：$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{b^2}=1$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\end{cases}$，得$x^2=y^2=\dfrac{4b^2}{4+b^2}$.

∵四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积为 4，∴$4x^2=4$，即$\dfrac{4b^2}{4+b^2}=1$，解得$b^2=\dfrac{4}{3}$.

∴点 P_1 的坐标为（1，1），

由 $a^2=4$，得 $a=2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

∴$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：（1，1）；$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【点评】本题考查椭圆的简单性质，考查椭圆与椭圆位置关系的应用，考查计算能力，是中档题.

14.【分析】①令 $f(x)=0$ 求出 $f(x)$ 的零点；

②根据 m 与 -2，0 和 4 的大小关系逐一判断 $f(x)$ 的零点个数即可得出结论.

【解答】解：①令 $-x^2-2x=0$ 可得 $x=-2$ 或 $x=0$，

令 $x-4=0$ 得 $x=4$.

∴当 $m=0$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点.

②若 $m<-2$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, m]$上无零点，在 $(m, +\infty)$ 上有 1 个零点 $x=4$，不符合题意；

若 $-2\leqslant m<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, m]$上有 1 个零点 $x=-2$，在 $(m, +\infty)$ 上有 1 个零点 $x=4$，符合题意；

若 $0\leqslant m<4$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, m]$上有 2 个零点 $x=-2$，$x=0$，在 $(m, +\infty)$ 上有 1 个零点 $x=4$，不符合题意；

若 $m\geqslant 4$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, m]$上有 2 个零点 $x=-2$，$x=0$，在 $(m, +\infty)$ 上无零点，符合题意；

∴ $-2\leqslant m<0$ 或 $m\geqslant 4$.

故答案为：①3，②$[-2, 0)\cup[4, +\infty)$.

【点评】本题考查了函数零点的个数判断，属于中档题.

15.【分析】根据题意，依次分析 4 个命题，对于①、由奇函数的定义分析可得①正确；对于②、对函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 求导，分析可得 $f'(x)>0$，分析可得②正确；对于③、$g(x)=e^x-e^{-x}-x^2-2x$，分析可得 $g(0)=0$，即方程 $f(x)=x^2+2x$ 有一根 $x=0$，进而利用二分法分析可得 $g(x)$ 有一根在（3，4）之间，即方程 $f(x)=x^2+2x$ 至少有 2 跟，故③错误，对于④、由函数的恒成立问题的分析方法，分析可得④正确，综合可得答案.

【解答】解：根据题意，依次分析 4 个命题：

对于①、$f(x)=e^x-e^{-x}$，定义域是 **R**，且 $f(-x)=e^{-x}-e^x=-f(x)$，$f(x)$ 是奇函数；故①正确；

对于②、若 $f(x)=e^x-e^{-x}$，则 $f'(x)=e^x+e^{-x}>0$，故 $f(x)$ 在 R 递增；故②正确；

对于③、$f(x)=x^2+2x$，令 $g(x)=e^x-e^{-x}-x^2-2x$，

令 $x=0$ 可得，$g(0)=0$，即方程 $f(x)=x^2+2x$ 有一根 $x=0$，

$g(2)=e^2-\frac{1}{e^2}-8<0$，$g(3)=e^3-\frac{1}{e^3}-15>0$，

则方程 $f(x)=x^2+2x$ 有一根在（2，3）之间，

故③错误；

对于④、如果对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>kx$，即 $e^x-e^{-x}-kx>0$ 恒成立，

令 $h(x)=e^x-e^{-x}-kx$，且 $h(0)=0$，

若 $h(x)>0$ 恒成立，则必有 $h'(x)=e^x+e^{-x}-k>0$ 恒成立，

若 $e^x+e^{-x}-k>0$，即 $k<e^x+e^{-x}=e^x+\frac{1}{e^x}$ 恒成立，

而 $e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant 2$，若有 $k<2$，

故④正确；

综合可得：①②④正确；

故答案为：①②④.

【点评】本题考查函数的奇偶性、单调性的判定，以及方程的根与恒成立问题的综合应用，③关键是利用二分法.

三、简答题。（共 85 分）

16.【分析】（1）证明直线 BD 所在的向量与平面内两个不共线的向量垂直，即可得到直线与平面内的两条相交直线垂直，进而得到线面垂直.

（2）由题意求出两个平面的法向量，求出两个向量的夹角，进而转化为二面角 $P-CD-B$ 的平面角即可.

（3）求出平面 PBD 的法向量，再求出平面的斜线 PC 所在的向量 $\overrightarrow{PC}$，然后求出 $\overrightarrow{PC}$ 在法向量上的射影即可得到点到平面的距离.

【解答】（1）证明：建立如图所示的直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$、$D(0,2,0)$、$P(0,0,2)$.

在 Rt△BAD 中，$AD=2$，$BD=2\sqrt{2}$，

∴$AB=2$. ∴$B(2,0,0)$、$C(2,2,0)$，

∴ $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$

∴ $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $BD\perp AP$，$BD\perp AC$，

又因为 $AP\cap AC=A$，∴$BD\perp$ 平面 PAC.

（2）解：由（1）得 $\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

即$\begin{cases}2y-2z=0\\-2x=0\end{cases}$，

故平面 PCD 的法向量可取为$\overrightarrow{n_1}$＝（0，1，1）

∵PA⊥平面 $ABCD$，

∴$\overrightarrow{AP}$＝（0，0，2）为平面 $ABCD$ 的法向量．

设二面角 $P-CD-B$ 的大小为 θ，依题意可得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

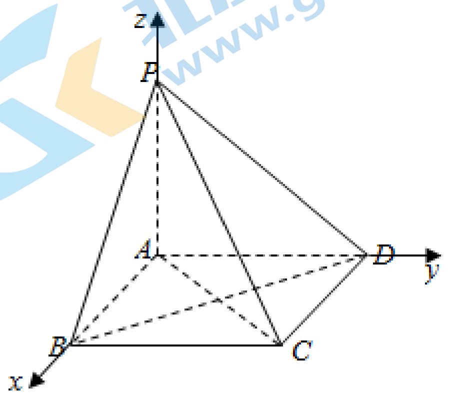
∴二面角 $P-CD-B$ 的大小是 45°．

（3）解：由（1）得$\overrightarrow{PB}$＝（2，0，﹣2），$\overrightarrow{PD}$＝（0，2，﹣2），

同理，可得平面 PBD 的法向量为$\overrightarrow{n_2}$＝（1，1，1）．

∵$\overrightarrow{PC}$＝（2，2，﹣2），

∴C 到面 PBD 的距离为 $d=\left|\frac{2+2-2}{\sqrt{1+1+1}}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．



【点评】解决此类问题的关键是熟悉几何体的结构特征，以便建立空间直角坐标系利用向量的基本运算解决线面共线、空间角与空间距离等问题．

17.【分析】（Ⅰ）利用两角和差的正弦公式以及辅助角公式进行化简结合三角函数的周期公式进行求解即可．

（Ⅱ）求出角的范围，结合三角函数的单调性和最值关系进行求解即可．

【解答】解：（Ⅰ）由已知 $f(\frac{\pi}{3})=1$，得 $4a\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$，

解得 $a=1$．$f(x)=4\cos x\sin(x-\frac{\pi}{6})=4\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)$

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$，

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$的最小正周期为 π．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$．

当 $x\in[0,m]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}]$，

若 $f(x)$ 在区间$[0，m]$上单调递增，

则有 $2m-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $m\leqslant\frac{\pi}{3}$.

所以 m 的最大值为$\frac{\pi}{3}$.

【点评】本题主要考查三角函数的性质，结合两角和差的正弦公式以及辅助角公式进行化简是解决本题的关键.

18.【分析】(*I*) 高二年级学生样本中合格的学生数为 15，样本中学生体质健康合格的频率为$\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$. 由此从该校高二年级学生中随机选取一名学生，能估计这名学生体质健康合格的概率.

(*II*) 设等级为优秀的样本中高一年级测试数据是 93，94，96 的学生分别为 a_1，a_2，a_3，高二年级测试数据是 90，95，98 的学生分别为 b_1，b_2，b_3. 选取的两名学生，利用列举法能求出选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率.

(*III*) $\overline{X_1}>\overline{X_2}$，$S_1^2<S_2^2$.

【解答】(共 13 分)

解：(*I*) 高二年级学生样本中合格的学生数为：3+4+4+4＝15，

样本中学生体质健康合格的频率为$\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

所以从该校高二年级学生中随机选取一名学生，估计这名学生体质健康合格的概率为$\frac{3}{4}$. ….

(*II*) 设等级为优秀的样本中高一年级测试数据是 93，94，96 的学生分别为 a_1，a_2，a_3，

高二年级测试数据是 90，95，98 的学生分别为 b_1，b_2，b_3.

选取的两名学生构成的基本事件空间为：

{(a_1，b_1)，(a_1，b_2)，(a_1，b_3)，(a_2，b_1)，(a_2，b_2)，(a_2，b_3)，(a_3，b_1)，(a_3，b_2)，(a_3，b_3)}，

总数为 9，

选取的测试数据平均数大于 95 的两名学生构成的基本事件空间为{(a_1，b_3)，(a_2，b_3)，(a_3，b_2)，(a_3，b_3)}，总数为 4，

所以从两个年级等级为优秀的样本中各随机选取一名学生，

选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率为$\frac{4}{9}$. ….(9 分)

(*III*) $\overline{X_1}>\overline{X_2}$，$S_1^2<S_2^2$. ….(13 分)

【点评】本题考查概率、平均数、方差的求法及应用，考查茎叶图、古典概型、列举法等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

19.【分析】(Ⅰ) 设椭圆 C 的半焦距为 c. 利用止痛剂列出方程求解 $a=2$，$b=\sqrt{2}$. 即可求出椭圆方程.

(Ⅱ)"椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90°$ "等价于"存在不是椭圆左、右顶点的点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$成立".

设 B（t，0），P（m，n），则 $m^2+2n^2=4$，且（$2-m$，$-n$）•（$t-m$，$-n$）$=0$，推出 $(2-m)(t-m)+\frac{4-m^2}{2}=0$．利用 $-2<m<2$，求解点 B 横坐标的取值范围．

【解答】（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 c．依题意，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$ab=2\sqrt{2}$，且 $a^2=b^2+c^2$．[（3 分）]

解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$．

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．[（5 分）]

（Ⅱ）"椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90°$"等价于"存在不是椭圆左、右顶点的点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 成立"．[（6 分）]

依题意，A（2，0）．设 B（t，0），P（m，n），则 $m^2+2n^2=4$，[（7 分）]

且（$2-m$，$-n$）•（$t-m$，$-n$）$=0$，

即（$2-m$）（$t-m$）$+n^2=0$．[（9 分）]

将 $n^2=\frac{4-m^2}{2}$ 代入上式，

得 $(2-m)(t-m)+\frac{4-m^2}{2}=0$．[（10 分）]

因为 $-2<m<2$，

所以 $t-m+\frac{2+m}{2}=0$，

即 $m=2t+2$．[（12 分）]

所以 $-2<2t+2<2$，

解得 $-2<t<0$，

所以 点 B 横坐标的取值范围是（-2，0）．[（14 分）]

【点评】本题考查椭圆方程的求法直线与椭圆的位置关系的综合应用，考查转化思想以及计算能力．

20.【分析】（Ⅰ）求导数 $f'(x)$，由 $f'(x)=1$ 求得切点，即可得点斜式方程；

（Ⅱ）把所证不等式转化为 $-6\leqslant f(x)-x\leqslant 0$，再令 $g(x)=f(x)-x$，利用导数研究 $g(x)$ 在$[-2,4]$的单调性和极值点即可得证；

（Ⅲ）先把 $F(x)$ 化为 $|g(x)-a|$，再利用（Ⅱ）的结论，引进函数 $h(t)=|t-a|$，结合绝对值函数的对称性，单调性，通过对称轴 $t=a$ 与 -3 的关系分析即可．

【解答】解：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$，

由 $f'(x)=1$ 得 $x\left(x-\frac{8}{3}\right)=0$，

得 $x_1=0$，$x_2=\frac{8}{3}$．

又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{27}$，

∴ $y=x$ 和 $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，

即 $y=x$ 和 $y=x-\frac{64}{27}$；

（Ⅱ）证明：欲证 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$，

只需证 $-6\leqslant f(x)-x\leqslant 0$，

令 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{4}x^3-x^2$，$x\in[-2,4]$，

则 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}x\left(x-\frac{8}{3}\right)$，

可知 $g'(x)$ 在 $[-2,0]$ 为正，在 $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ 为负，在 $\left[\frac{8}{3},4\right]$ 为正，

∴ $g(x)$ 在 $[-2,0]$ 递增，在 $\left(0,\frac{8}{3}\right]$ 递减，在 $\left(\frac{8}{3},4\right]$ 递增，

又 $g(-2)=-6$，$g(0)=0$，$g\left(\frac{8}{3}\right)=-\frac{64}{27}>-6$，$g(4)=0$，

∴ $-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，

∴ $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

（Ⅲ）由（Ⅱ）可得，

$F(x)=|f(x)-(x+a)|$

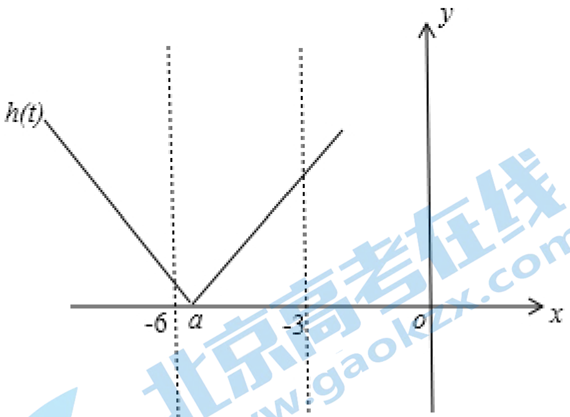
$=|f(x)-x-a|$

$=|g(x)-a|$

∵在 $[-2,4]$ 上，$-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，

令 $t=g(x)$，$h(t)=|t-a|$，

则问题转化为当 $t\in[-6,0]$ 时，$h(t)$ 的最大值 $M(a)$ 的问题了，



①当 $a\leqslant -3$ 时，$M(a)=h(0)=|a|=-a$，

此时 $-a\geqslant 3$，当 $a=-3$ 时，$M(a)$ 取得最小值 3；

②当 $a\geqslant -3$ 时，$M(a)=h(-6)=|-6-a|=|6+a|$，

$\because 6+a\geqslant 3$，$\therefore M(a)=6+a$，

也是 $a=-3$ 时，$M(a)$ 最小值为 3．

综上，当 $M(a)$ 取最小值时 a 的值为 -3．

【点评】此题考查了导数的综合应用，构造法，转化法，数形结合法等，难度较大．

21．【分析】（Ⅰ）利用指数数列的定义，判断即可；

（Ⅱ）利用 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），说明数列$\{\frac{1}{a_n}+1\}$是等比数列，然后证明数列$\{\frac{1}{a_n}+1\}$为"指数型数列"；

（Ⅲ）利用反证法，结合 n 为偶数以及奇数进行证明即可．

【解答】（Ⅰ）解：对于数列$\{a_n\}$，$a_{n+m}=a_n\bullet a_m=\frac{5}{3}\times(5\times 3^{n+m-1})\neq a_n$，所以$\{a_n\}$不是指数型数列．

对于数列$\{b_n\}$，对任意 n，$m\in\mathbf{N}^*$，因为 $b_{n+m}=4^{n+m}=4^n\bullet 4^m=b_n\bullet b_m$，

所以$\{b_n\}$是指数型数列．

（Ⅱ）证明：由题意，$\{\frac{1}{a_n}+1\}$，是"指数型数列"，

$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}$，$\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}+1=3(\frac{1}{a_n}+1)$，

所以数列$\{\frac{1}{a_n}+1\}$是等比数列，$\frac{1}{a_n}+1=(\frac{1}{a_n}+1)\times 3^{n-1}=3^n$，

$(\frac{1}{a_n}+1)(\frac{1}{a_m}+1)=3^n\bullet 3^m=3^{m+n}=(\frac{1}{a_{n+m}}+1)$，数列$\{\frac{1}{a_n}+1\}$是"指数型数列"．

（Ⅲ）证明：因为数列$\{a_n\}$是指数数列，故对于任意的 n，$m\in\mathbf{N}^*$，

有 $a_{n+m}=a_n\bullet a_m$，$\Rightarrow a_{n+1}=a_n\bullet a_1\Rightarrow a_n=a_1{}^n=(\frac{a+1}{a+2})^n$，

假设数列$\{a_n\}$中存在三项 a_u，a_v，a_w 构成等差数列，不妨设 $u<v<w$，

则由 $2a_v=a_u+a_w$，得 $2(\frac{a+1}{a+2})^v=(\frac{a+1}{a+2})^u+(\frac{a+1}{a+2})^w$，

所以 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$，

当 t 为偶数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，而 $(a+2)^{w-u}$ 是偶数，$(a+1)^{w-u}$ 是奇数，

故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立；

当 t 为奇数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，而 $(a+2)^{w-u}$ 是奇数，$(a+1)^{w-u}$ 是偶数，

故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 也不能成立．

所以，对任意 $a\in\mathbf{N}^*$，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立，

即数列$\{a_n\}$的任意三项都不成构成等差数列．

【点评】本题考查指数数列的定义，考查反证法的运用，正确理解与运用新定义是关键．

关于我们