# 2022—2023 学年高三考前模拟考试

# 文科数学

**考生注意：**

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知全集 $U=\{x|1<x<6,x\in \mathbf{N}\}$，集合 $M=\{2,3\}$，则 $\complement_U M=$

A. $\{5\}$　　B. $\{4,5\}$　　C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{2,3,4,5\}$

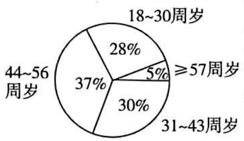
2. 复数 $z=-3\mathrm{i}(4-\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

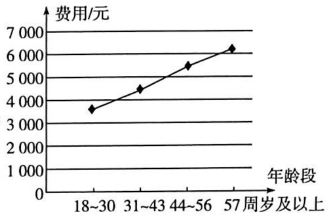
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-5,3)$，若向量 $t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则实数 $t=$

A. 2　　B. 1　　C. $-1$　　D. $-2$

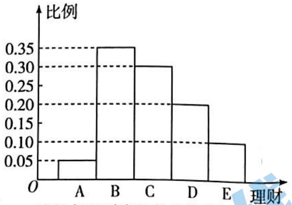
4. 某银行为客户定制了 A，B，C，D，E 共 5 个理财产品，并对 5 个理财产品的持有客户进行抽样调查，得出如下的统计图：




理财人数比例




不同年龄段人均理财费用




选择各理财产品的人数比例

用该样本估计总体，以下四个说法错误的是

A. 44 ~ 56 周岁人群理财人数最多

B. 18 ~ 30 周岁人群理财总费用最少

C. B 理财产品更受理财人青睐

D. 年龄越大的年龄段的人均理财费用越高

5. 大衍数列 0，2，4，8，12，18，…来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理. 数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾



经经历过的两仪数量总和. 其通项公式为 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{2},n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n^2}{2},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 记数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，则 $S_{100}=$

参考公式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A. 169 125　　B. 169 150　　C. 338 300　　D. 338 325

6. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1,F_2$，$P$ 是双曲线 $C$ 上的一点，且 $|PF_1|=5$，$|PF_2|=3$，$\angle F_1PF_2=120°$，则双曲线 $C$ 的离心率是

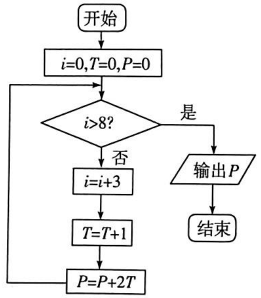
A. $\dfrac{7}{5}$　　B. $\dfrac{7}{4}$

C. $\dfrac{7}{3}$　　D. $\dfrac{7}{2}$

7. 执行如图所示的程序框图，输出的 $P$ 为

A. 6　　B. 10

C. 12　　D. 18




8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $2a_{10}=a_{14}$，则 $\dfrac{S_{32}}{S_{16}}=$

A. 17　　B. 18

C. 5　　D. 6

9. 已知两条不同的直线 $l,m$，两个不同的平面 $\alpha,\beta$，则下列命题正确的是

A. 若 $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m\perp\beta$，则 $l/\!/m$　　B. 若 $\alpha/\!/\beta,l/\!/\alpha,m/\!/\beta$，则 $l/\!/m$

C. 若 $\alpha/\!/\beta,m\perp\alpha,l\perp\beta$，则 $l/\!/m$　　D. 若 $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha,m/\!/\beta$，则 $l\perp m$

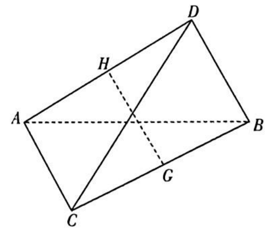
10. 设 $F$ 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 $M$ 在 $C$ 上，点 $N$ 在准线 $l$ 上，且 $MN$ 平行于 $x$ 轴，准线 $l$ 与 $x$ 轴的交点为 $E$，若 $|NF|=2|EF|$，则梯形 $EFMN$ 的面积为

A. 12　　B. 6　　C. $12\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$

11. 若不等式 $4\sin^2x+(4-2a)\sin x+5-a\geqslant 0$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 时恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是

A. $(-\infty,4]$　　B. $[-4,4]$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,\sqrt{3}]$

12. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的所有顶点都在球 $O$ 的表面上，$\angle ADB=\angle ACB=90°$，$AC=BD=\dfrac{1}{2}AB$，若球 $O$ 的体积为 $\dfrac{32\pi}{3}$，三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 2，$G,H$ 分别是 $BC,AD$ 的中点，则异面直线 $GH$ 与 $AC$ 所成角的余弦值为




A. $\dfrac{\sqrt{10}}{6}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

## 二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 从 1 ~ 9 这 9 个数中随机选一个数，则该数的倒数大于$\frac{1}{5}$的概率为________.

14. 已知直线 $l$ 与圆 $C:x^2+(y-1)^2=2$ 相切，且切点的横、纵坐标均为整数，则直线 $l$ 的方程为________.（写出一个满足条件的方程即可）

15. 已知偶函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象的相邻两条对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$，则函数 $f(x)$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上的值域为________.

16. 已知函数 $f(x)=ax^3-4x$，若对于任意 $3<x_1<x_2<6$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}>2$，则实数 $a$ 的取值范围是________.

## 三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

### （一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

为了有针对性地提高学生对音乐课程的积极性，某校需要了解学生爱好音乐是否与性别有关，随机抽取 100 名该校学生进行问卷调查，得到如下列联表.

| | 爱好音乐 | 不爱好音乐 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男 | 16 | | |
| 女 | | 26 | |
| 总计 | | | 100 |

已知从这 100 名学生中任选 1 人，爱好音乐的学生被选中的概率为$\frac{2}{5}$.

（Ⅰ）完成上面的列联表；

（Ⅱ）根据列联表中的数据，判断能否有 90% 的把握认为该校学生爱好音乐与性别有关.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

18.（12 分）

记△$ABC$ 的内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，已知$(4a-3c)\cos B=3b\cos C$，且 $a,b,c$ 依次成等比数列.

（Ⅰ）求 $\cos B$；

（Ⅱ）若 $b=4$，求△$ABC$ 的周长.

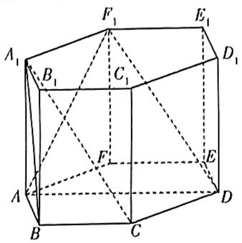


19.（12 分）

如图所示，正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1，高为$\sqrt{3}$.

（Ⅰ）证明：平面 $ADF_1$ // 平面 $A_1BC$；

（Ⅱ）求平面 $ADF_1$ 与平面 $A_1BC$ 间的距离.




20.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}mx^2+(m-1)x-\ln x(m\in\mathbf{R})$，$g(x)=x^2-\frac{1}{2e^x}+1$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $m>0$ 时，若对于任意的 $x_1\in(0,+\infty)$，总存在 $x_2\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$，求 $m$ 的取值范围.

21.（12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$，左、右顶点分别为 $A_1,A_2$，$F_2$ 是 $OA_2$（$O$ 为坐标原点）的中点，且$|F_1F_2||A_2F_2|=2$.

（Ⅰ）求 $E$ 的方程；

（Ⅱ）不过坐标原点的直线 $l$ 与椭圆 $E$ 相交于 $A,B$ 两点（$A,B$ 异于椭圆 $E$ 的顶点），直线 $AA_1,BA_2$ 与 $y$ 轴的交点分别为 $M,N$，若$\overrightarrow{A_2N}-\overrightarrow{A_2O}=3\overrightarrow{A_2O}-3\overrightarrow{A_2M}$，证明：直线 $l$ 过定点，并求该定点的坐标.

### （二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4 － 4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C$ 的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求曲线 $C$ 的普通方程和直线 $l$ 的直角坐标方程；

（Ⅱ）求 $C$ 上的动点到直线 $l$ 距离的取值范围.

23.［选修 4 － 5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x+a|+3|x-2|(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)>5$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围.

# 2022—2023 学年高三考前模拟考试

# 文科数学 · 答案

**一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.**

1. **答案** B

**命题意图** 本题考查集合的表示与运算.

**解析** 因为 $U=\{x|1<x<6,x\in\mathbf{N}\}=\{2,3,4,5\}$,$M=\{2,3\}$,所以$\complement_U M=\{4,5\}$.

2. **答案** C

**命题意图** 本题考查复数的几何意义.

**解析** 因为 $z=-3\mathrm{i}(4-\mathrm{i})=-12\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-3-12\mathrm{i}$,可知复数 $z$ 在复平面内对应的点为$(-3,-12)$,所以 $z$ 在复平面内对应的点位于第三象限.

3. **答案** A

**命题意图** 本题考查平面向量的坐标运算.

**解析** $t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=t(1,-4)+(-5,3)=(t-5,-4t+3)$,若向量 $t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,则$(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(t-5,-4t+3)\cdot(-5,3)=-5(t-5)+3(-4t+3)=-17t+34=0$,解得 $t=2$.

4. **答案** B

**命题意图** 本题考查统计图表的应用.

**解析** A 选项,44~56 周岁人群理财人数所占比例是 37%,是最多的,故 A 正确;B 选项,“18~30 周岁人群的人均理财费用”比“57 周岁及以上人群的人均理财费用”的一半还多,而 18~30 周岁人群理财人数所占比例是 57 周岁及以上人群理财人数所占比例的 5.6 倍,所以 57 周岁及以上人群理财总费用最少,故 B 错误;C 选项,B 理财产品占的比例为 0.35,是最多的,故 C 正确;D 选项,随着年龄的增长,人均理财费用逐渐增高,所以年龄越大的年龄段的人均理财费用越高,故 D 正确.

5. **答案** B

**命题意图** 本题考查数列的求和.

**解析** $a_n=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{2},n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n^2}{2},n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 故 $S_{100}=\dfrac{1^2-1}{2}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{3^2-1}{2}+\dfrac{4^2}{2}+\dfrac{5^2-1}{2}+\dfrac{6^2}{2}+\cdots+\dfrac{99^2-1}{2}+\dfrac{100^2}{2}=$

$\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+99^2+100^2}{2}-\dfrac{50}{2}=\dfrac{100\times101\times201}{6\times2}-25=169\ 150$.

6. **答案** D

**命题意图** 本题考查双曲线的性质.

**解析** 设双曲线 $C$ 的半焦距为 $c(c>0)$. 由题意,点 $P$ 在双曲线 $C$ 的右支上,$|PF_1|=5$,$|PF_2|=3$,由余弦定理得 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{5^2+3^2-|F_1F_2|^2}{2\times5\times3}=-\dfrac{1}{2}$,解得$|F_1F_2|=7$,即 $2c=7$,$c=\dfrac{7}{2}$,根据双曲线定义得$|PF_1|-|PF_2|=2a=2$,解得 $a=1$,故双曲线 $C$ 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{7}{2}$.

7. **答案** C

**命题意图**　本题考查程序框图.

**解析**　第一次循环，$i=0<8$，则 $i=0+3=3$，$T=0+1=1$，$P=0+2\times1=2$；

第二次循环，$i=3<8$，则 $i=3+3=6$，$T=1+1=2$，$P=2+2\times2=6$；

第三次循环，$i=6<8$，则 $i=6+3=9$，$T=2+1=3$，$P=6+2\times3=12$.

此时，$i=9>8$，所以输出的 $P$ 为 12.

8. **答案**　A

**命题意图**　本题考查等比数列的性质.

**解析**　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$. 由 $2a_{10}=a_{14}$，得 $2a_{10}=a_{10}q^4$，解得 $q^4=2$，所以 $\frac{S_{32}}{S_{16}}=\frac{\frac{a_1(1-q^{32})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^{16})}{1-q}}=1+q^{16}=1+2^4=17$.

9. **答案**　C

**命题意图**　本题考查空间线面位置关系的判断.

**解析**　对于 A，若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $l\perp m$，A 错误；

对于 B，若 $\alpha/\!/\beta$，$l/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，则 $l$ 与 $m$ 可能平行、异面，也可能相交，B 错误；

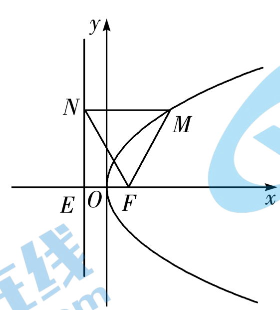
对于 C，若 $\alpha/\!/\beta$，$m\perp\alpha$，则 $m\perp\beta$，又 $l\perp\beta$，所以 $l/\!/m$，C 正确；

对于 D，若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，$m/\!/\beta$，则 $l$ 与 $m$ 可能平行，也可能相交或异面，相交或异面时可能垂直，也可能不垂直，D 错误.

10. **答案**　D

**命题意图**　本题考查抛物线的性质.

**解析**　由题可知，$p=2$，抛物线的焦点 $F$ 为 $(1,0)$，准线 $l$ 为 $x=-1$，如图所示. 由题知 $MN\perp l$，因为 $|NF|=2|EF|=2\times2=4$，所以 $\angle EFN=60^\circ$，则 $|NE|=\sqrt{3}|EF|=2\sqrt{3}$. 因为 $MN/\!/EF$，所以 $\angle MNF=\angle EFN=60^\circ$，由抛物线的定义可知 $|MN|=|MF|$，所以 $\triangle MNF$ 是正三角形，所以 $|MN|=4$，所以 $S_{梯形EFMN}=\frac{(4+2)\times2\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.




11. **答案**　A

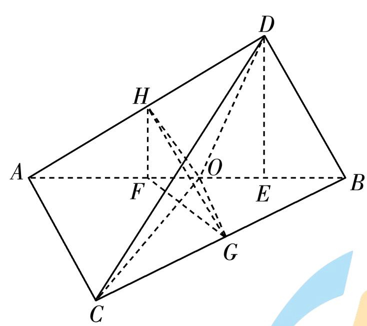
**命题意图**　本题考查函数与不等式的综合.

**解析**　依题意知，$4\sin^2x+(4-2a)\sin x+5-a\geqslant0\Leftrightarrow4\sin^2x+4\sin x+5\geqslant(2\sin x+1)a$，结合 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，知 $2\sin x+1>0$，不等式转化为 $\frac{4\sin^2x+4\sin x+5}{2\sin x+1}\geqslant a$，须 $\left(\frac{4\sin^2x+4\sin x+5}{2\sin x+1}\right)_{\min}\geqslant a$. 设 $t=\sin x$，由 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，知 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，设 $g(t)=\frac{4t^2+4t+5}{2t+1}=2t+1+\frac{4}{2t+1}\geqslant2\sqrt{(2t+1)\times\frac{4}{2t+1}}=4$，当且仅当 $2t+1=\frac{4}{2t+1}$，即 $t=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{6}$ 时等号成立. 因此实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,4]$.

12. **答案** C

**命题意图** 本题考查空间几何体的结构特征以及相关计算.

**解析** 如图,取 $AB$ 的中点 $O$,连接 $OC,OD$,因为 $\angle ADB=\angle ACB=90°$,所以 $O$ 到 $A,B,C,D$ 的距离相等,故 $O$ 为三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心. 设外接球半径为 $R$,由球 $O$ 的体积为 $\frac{32\pi}{3}$,得 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$,解得 $OD=R=2$,则 $AB=4,AC=BD=2,AD=BC=2\sqrt{3}$,$\angle DAB=\angle ABC=30°$. 过 $D,H$ 作 $DE,HF$ 分别垂直于 $AB$ 于点 $E,F$,连接 $GF,OG,OH$. 因为 $DE=AD\sin 30°=\sqrt{3}$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. 设三棱锥 $D-ABC$ 的高为 $h$,则体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times h=2$,解得 $h=\sqrt{3}$,而 $DE=\sqrt{3}$,所以 $DE$ 就是三棱锥 $D-ABC$ 的高. 在 $\triangle BFG$ 中,$BF=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$,$BG=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$,$\angle FBG=30°$,由余弦定理得 $\cos\angle FBG=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2-GF^2}{2\times\frac{5}{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $GF=\frac{\sqrt{7}}{2}$,$HF=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则由勾股定理得 $GH=\sqrt{HF^2+GF^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 因为 $OG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,所以 $OG/\!/AC$ 且 $OG=\frac{1}{2}AC=1$,同理,$OH=1$,所以 $\angle OGH$ 或其补角是异面直线 $GH$ 与 $AC$ 所成的角,在 $\triangle OGH$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle OGH=\frac{1^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-1^2}{2\times 1\times\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$,即为所求.




**二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.**

13. **答案** $\frac{4}{9}$

**命题意图** 本题考查古典概型的概率计算.

**解析** 从 1 ~ 9 这 9 个数中随机选一个数共有 9 种等可能的结果,其中倒数大于 $\frac{1}{5}$ 的有 1,2,3,4 等 4 种等可能的结果,所以该数的倒数大于 $\frac{1}{5}$ 的概率为 $\frac{4}{9}$.

14. **答案** $x-y-1=0$ 或 $x+y+1=0$ 或 $x-y+3=0$ 或 $x+y-3=0$(任写一个都对)

**命题意图** 本题考查直线与圆的位置关系.

**解析** 圆 $C$ 的圆心为点(0,1),圆 $C$ 经过的整点有 4 个:(1,0),(−1,0),(1,2),(−1,2). 以点(1,0)为例,圆心与切点连线的斜率为 −1,则切线斜率为 1,所以切线方程为 $y=x-1$.

15. **答案** [−2,1]

**命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质.

**解析** 因为函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$，则 $\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)$，又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $-\dfrac{\pi}{4}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos 2x$，因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$，所以 $2x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\cos 2x\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，所以 $-2\cos 2x\in[-2,1]$，故 $f(x)\in[-2,1]$.

16. **答案** $\left[\dfrac{16}{27},+\infty\right)$

**命题意图** 本题综合考查函数的性质.

**解析** $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}>2$ 可变形为 $\dfrac{[f(x_1)-2x_1^2]-[f(x_2)-2x_2^2]}{x_1^2-x_2^2}>0$. 令 $g(x)=f(x)-2x^2=ax^3-2x^2-4x$，则函数 $g(x)$ 在区间 $(3,6)$ 上单调递增，$g'(x)=3ax^2-4x-4$，则 $g'(x)\geqslant 0$ 在区间 $(3,6)$ 上恒成立，即 $3ax^2-4x-4\geqslant 0$ 在区间 $(3,6)$ 上恒成立，则 $a\geqslant\dfrac{4}{3x}+\dfrac{4}{3x^2}$ 在区间 $(3,6)$ 上恒成立，当 $x\in(3,6)$ 时，$\dfrac{4}{3x}+\dfrac{4}{3x^2}<\dfrac{4}{3\times3}+\dfrac{4}{3\times3^2}=\dfrac{16}{27}$，所以 $a\geqslant\dfrac{16}{27}$，即实数 $a$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{16}{27},+\infty\right)$.

**三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

17. **命题意图** 本题考查独立性检验的应用.

**解析** （Ⅰ）设这 100 名学生中爱好音乐的学生有 $x$ 人，则 $\dfrac{x}{100}=\dfrac{2}{5}$，

解得 $x=40$. …………………………………………………………………（3 分）

列联表完成如下.

| | 爱好音乐 | 不爱好音乐 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 男 | 16 | 34 | 50 |
| 女 | 24 | 26 | 50 |
| 总计 | 40 | 60 | 100 |

…………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $k=\dfrac{100\times(16\times26-24\times34)^2}{60\times40\times50\times50}\approx 2.667$，……………………（9 分）

因为 $2.667<2.706$，故没有 90% 的把握认为该校学生爱好音乐与性别有关. ……………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

**解析** （Ⅰ）由条件及正弦定理得 $4\sin A\cos B-3\sin C\cos B=3\sin B\cos C$，……………（2 分）

所以 $4\sin A\cos B=3\sin B\cos C+3\sin C\cos B$，

所以 $4\sin A\cos B=3\sin(B+C)$，…………………………………………（4 分）

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $4\sin A\cos B=3\sin A$，……………………………（5 分）

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A>0$，所以 $\cos B=\dfrac{3}{4}$. ……………………………（6 分）

（Ⅱ）因为 $b=4$，且 $a,b,c$ 依次成等比数列，

所以 $ac=b^2=16$. ………………………………………………………（8 分）

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $16=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B$，

所以 $a+c=6\sqrt{2}$，……（11 分）

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{2}+4$. ……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查面面平行的证明以及距离的计算.

**解析** （Ⅰ）在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，

因为底面为正六边形，所以 $AD/\!/BC$，……（1 分）

因为 $AD\not\subset$ 平面 $A_1BC$，$BC\subset$ 平面 $A_1BC$，所以 $AD/\!/$ 平面 $A_1BC$. ……（2 分）

因为 $CD/\!/A_1F_1$，$CD=A_1F_1$，所以四边形 $CDF_1A_1$ 为平行四边形，……（3 分）

所以 $DF_1/\!/A_1C$，因为 $DF_1\not\subset$ 平面 $A_1BC$，$A_1C\subset$ 平面 $A_1BC$，所以 $DF_1/\!/$ 平面 $A_1BC$，……（4 分）

又 $AD\cap DF_1=D$，所以平面 $ADF_1/\!/$ 平面 $A_1BC$. ……（6 分）

（Ⅱ）平面 $ADF_1$ 与平面 $A_1BC$ 间的距离等价于点 $A$ 到平面 $A_1BC$ 的距离，设为 $d$.

连接 $AC$，则四面体 $A_1ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}d$. ……（7 分）

因为 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{2\pi}{3}\times\sqrt{3}=\frac{1}{4}$，……（8 分）

$A_1B=\sqrt{AB^2+AA_1^2}=2$，$A_1C=\sqrt{AC^2+AA_1^2}=\sqrt{6}$，

所以 $\cos\angle A_1BC=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\times1\times2}=-\frac{1}{4}$，从而 $\sin\angle A_1BC=\frac{\sqrt{15}}{4}$，……（10 分）

所以 $S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，……（11 分）

所以 $d=\frac{3V}{S_{\triangle A_1BC}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，即平面 $ADF_1$ 与平面 $A_1BC$ 间的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……（12 分）

20. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

**解析** （Ⅰ）$f'(x)=\frac{(mx-1)(x+1)}{x}$，$x>0$. ……（2 分）

当 $m\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；……（3 分）

当 $m>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $x\in\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$，即 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$ 上单调递增，……（4 分）

由 $f'(x)<0$，解得 $x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)$，即 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递减. ……（5 分）

（Ⅱ）当 $m>0$ 时，由（Ⅰ）知 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{m}\right)=\ln m+1-\frac{1}{2m}$，……（6 分）

易知 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2-\frac{1}{2\mathrm{e}}$，……（7 分）

由题意知 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$，即 $\ln m+1-\frac{1}{2m}\geqslant2-\frac{1}{2\mathrm{e}}$. ……（8 分）

设 $h(m)=\ln m+1-\frac{1}{2m}$，则 $h'(m)=\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{m}>0$，所以 $h(m)$ 为增函数，……（10 分）

又 $h(\mathrm{e})=2-\frac{1}{2\mathrm{e}}$，所以 $m\geqslant\mathrm{e}$，

即 $m$ 的取值范围是 $[\mathrm{e},+\infty)$. ……（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆的标准方程与性质.

**解析** （Ⅰ）设椭圆 $E$ 的半焦距为 $c(c>0)$.

因为 $F_2$ 是 $OA_2$ 的中点，所以 $a=2c$， …………………………………………………………………… （1 分）

因为 $|F_1F_2||A_2F_2|=2$，所以 $2c\cdot(a-c)=2$，得 $2c\cdot(2c-c)=2$，解得 $c=1$， ………………………… （2 分）

所以 $a=2, b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$， ……………………………………………………………………… （3 分）

所以椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………… （4 分）

（Ⅱ）由已知得 $A_1(-2,0), A_2(2,0)$，设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，

则直线 $AA_1$ 的斜率为 $\frac{y_1}{x_1+2}$，直线 $AA_1$ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，得 $M$ 点坐标为 $\left(0,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$，

直线 $BA_2$ 的斜率为 $\frac{y_2}{x_2-2}$，直线 $BA_2$ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，得 $N$ 点坐标为 $\left(0,-\frac{2y_2}{x_2-2}\right)$. ………… （5 分）

因为 $\overrightarrow{A_2N}-\overrightarrow{A_2O}=3\overrightarrow{A_2O}-3\overrightarrow{A_2M}$，所以 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{MO}$.

所以 $|ON|^2=9|OM|^2$，所以 $\frac{4y_2^2}{(x_2-2)^2}=\frac{36y_1^2}{(x_1+2)^2}$， …………………………………………………… （6 分）

又因为 $y_1^2=3-\frac{3x_1^2}{4}=\frac{12-3x_1^2}{4}, y_2^2=3-\frac{3x_2^2}{4}=\frac{12-3x_2^2}{4}$，

所以 $\frac{4-x_2^2}{(x_2-2)^2}=9\times\frac{4-x_1^2}{(x_1+2)^2}$，即 $\frac{2+x_2}{2-x_2}=\frac{9(2-x_1)}{2+x_1}$，

整理得 $5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8=0$.（*） ……………………………………………………………… （7 分）

①若直线 $AB$ 的斜率不存在，则 $x_1=x_2$，

由 $5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8=0$ 得 $x_2^2-5x_2+4=0$，解得 $x_2=1$ 或 $x_2=4$，

此时直线 $AB$ 的方程为 $x=1$ 或 $x=4$，又直线 $x=4$ 与椭圆不相交，故舍去，$x=1$ 满足条件. …………… （8 分）

②若直线 $AB$ 的斜率存在，设直线 $AB$ 的方程为 $y=kx+t$，

将直线 $AB$ 的方程与椭圆方程联立 $\begin{cases} y=kx+t, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，

其中 $\Delta=64k^2t^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)=16(12k^2-3t^2+9)>0$，

且 $x_1+x_2=-\frac{8kt}{3+4k^2}, x_1x_2=\frac{4t^2-12}{3+4k^2}$. …………………………………………………………… （9 分）

代入（*），得 $-5\times\frac{8kt}{3+4k^2}-2\times\frac{4t^2-12}{3+4k^2}-8=0$，得 $4k^2+5kt+t^2=0$，得 $(4k+t)(k+t)=0$，

所以 $t=-4k$ 或 $t=-k$，

当 $t=-4k$ 时，直线 $AB$ 的方程为 $y=kx-4k=k(x-4)$，恒过点 $(4,0)$，作图可知，此时点 $M$ 与 $N$ 在 $x$ 轴的同一侧，不满足 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{MO}$，故舍去；

当 $t=-k$ 时，直线 $AB$ 的方程为 $y=kx-k=k(x-1)$，恒过点 $(1,0)$，符合题意. ……………………… （11 分）

综上所述，直线 $AB$ 恒过点 $(1,0)$. …………………………………………………………………… （12 分）

22. **命题意图**　本题考查方程的互化、参数方程的应用.

**解析**　（Ⅰ）由 $\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=\sqrt{3}\sin\alpha, \end{cases}$ 得 $x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，即 $x^2+\frac{y^2}{3}=1$，

所以曲线 $C$ 的普通方程是 $x^2+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………… （2 分）

由 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，得 $\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=2\sqrt{2}$， ………………………… （3 分）

得$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta=2\sqrt{2}$,得$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=4$, ………………………………………………………………（4 分）

代入公式$\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y,\end{cases}$得$y-x=4$,

所以直线$l$的直角坐标方程为$x-y+4=0$. ………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）,

设$C$上的动点为$M(\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$, ………………………………………………………………（6 分）

则$C$上的动点$M$到直线$l$的距离为$d=\frac{|\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha+4|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+4\right|}{\sqrt{2}}$. ……………………（8 分）

因为$2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\in[-2,2]$,所以$d\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$.

即$C$上的动点到直线$l$的距离的取值范围为$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$. ……………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质.

**解析** （Ⅰ）若$a=0$,$f(x)\geqslant10$即为$|3x|+3|x-2|\geqslant10$. ………………………………………（1 分）

当$x\geqslant2$时,不等式$f(x)\geqslant10$转化为$3x+3(x-2)\geqslant10$,解得$x\geqslant\frac{8}{3}$; ……………………………（2 分）

当$0<x<2$时,不等式$f(x)\geqslant10$转化为$3x-3(x-2)=6\geqslant10$,无解; ……………………………（3 分）

当$x\leqslant0$时,不等式$f(x)\geqslant10$转化为$-3x-3(x-2)\geqslant10$,解得$x\leqslant-\frac{2}{3}$. ……………………………（4 分）

综上所述,不等式$f(x)\geqslant10$的解集为$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$. ……………………………（5 分）

（Ⅱ）因为$f(x)>5$恒成立,所以$f(x)_{\min}>5$. ………………………………………………………………（6 分）

又$|3x+a|+3|x-2|=|3x+a|+|3x-6|\geqslant|3x+a-(3x-6)|=|a+6|$, ……………………………（8 分）

所以$|a+6|>5$,则$a+6>5$或$a+6<-5$, ………………………………………………………………（9 分）

解得$a>-1$或$a<-11$.

故$a$的取值范围为$(-\infty,-11)\cup(-1,+\infty)$. ………………………………………………………………（10 分）