2020-2021 学年第 4 学段高二年级数学学科教与学诊断 参考答案（2021.06）

一、选择题（共 10 道小题，每题 4 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\{x\in R\mid x^2-2x<0\}$，$B=\{x\in R\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $A\bigcup B=$ （ ）

A．$\{x\mid 0<x<4\}$ B．$\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$ C．$\{x\mid 1\leqslant x<2\}$ D．$\{x\mid 2<x\leqslant 4\}$

答案 B

【解析】因为集合 $A=\{x\in R\mid x^2-2x<0\}=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\in R\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$，所以 $A\bigcup B=\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$．

2．命题 $p:\forall x\in(1,+\infty)$，$lnx<x^2-x$，则 $\neg p$ 为（ ）

A．$\forall x\in(1,+\infty)$，$lnx\geqslant x^2-x$ B．$\forall x\in(0，1]$，$lnx<x^2-x$

C．$\exists x_0\in(1,+\infty)$，$lnx_0<x_0^2-x_0$ D．$\exists x_0\in(1,+\infty)$，$lnx_0\geqslant x_0^2-x_0$

答案 D

【解析】命题是全称命题，则否定为特称命题，即 $\neg p:\exists x_0\in(1,+\infty)$，$lnx_0\geqslant x_0^2-x_0$．

3．集合 $M=\{x\mid x=\frac{1}{3}+\frac{n}{6}$，$n\in Z\}$，$N=\{x\mid x=\frac{1}{6}+\frac{n}{3}$，$n\in Z\}$，则下列关系正确的是（ ）

A．$M\subseteq N$ B．$M\bigcap N=\varnothing$ C．$N\subseteq M$ D．$M\bigcup N=Z$

答案 C

【解析】$\because$ 集合 $M=\{x\mid x=\frac{1}{3}+\frac{n}{6}$，$n\in Z\}=\{\cdots$，$-\frac{1}{6}$，0，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$，$\cdots\}$，$N=\{x\mid x=\frac{1}{6}+\frac{n}{3}$，$n\in Z\}=\{\cdots$，$-\frac{5}{6}$，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{6}$，$\cdots\}$，$\therefore N\subseteq M$．

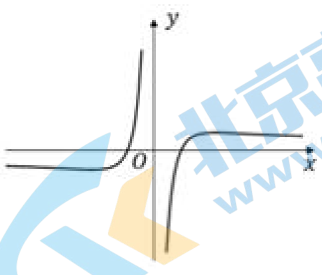
4．关于 x 的不等式 $(ax-b)(x+3)<0$ 的解集为 $(-\infty，-3)\bigcup(1，+\infty)$，则关于 x 的不等式 $ax+b>0$ 的解集为（ ）

A．$(-\infty,-1)$ B．$(-1,+\infty)$ C．$(-\infty,1)$ D．$(1,+\infty)$

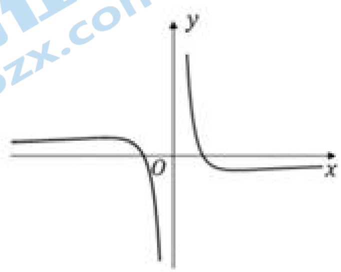
答案 A

【解析】由题意可得 $a<0$，且 1，-3 是方程 $(ax-b)(x+3)=0$ 的两根，$\therefore x=1$ 为方程 $ax-b=0$ 的根，$\therefore a=b$，则不等式 $ax+b>0$ 可化为 $x+1<0$，即 $x<-1$，$\therefore$ 不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)$．

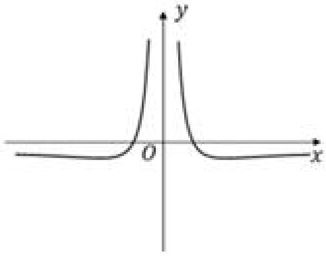
5．函数 $f(x)=\frac{lg|x|}{x^2}$ 的图象大致为（ ）



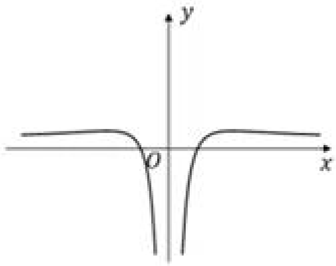
A



B



C



D

答案　D

【解析】函数的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，$f(-x)=\frac{lg|-x|}{(-x)^2}=\frac{lg|x|}{x^2}=f(x)$，即 $f(x)$ 是偶函数，排除 A，B，

由 $f(x)=0$，得 $lg|x|=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，排除 C．

6．已知两个正实数 x，y 满足 $x+y=2$，则 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y+1}$ 的最小值是(　　)

A．$\frac{16}{3}$　　B．$\frac{11}{2}$　　C．8　　D．3

答案　A

【解析】因为正实数 x，y 满足 $x+y=2$，

则 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y+1}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{9}{y+1})(x+y+1)=\frac{1}{3}(10+\frac{y+1}{x}+\frac{9x}{y+1})\geqslant\frac{1}{3}(10+2\sqrt{\frac{y+1}{x}\cdot\frac{9x}{y+1}})=\frac{16}{3}$．

7．已知 a，$b\in R$，则“$|a-b|>|b|$”是“$\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

答案　C

【解析】$\because|a-b|>|b|$，$\therefore|a-b|^2>|b|^2$，$\therefore a^2-2ab+b^2>b^2$，$\therefore a(a-2b)>0$，$\because\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{b}{a}-\frac{1}{2}<0$，$\therefore\frac{2b-a}{2a}<0$，

$\therefore a(a-2b)>0$，$\therefore|a-b|>|b|$ 是 $\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$ 的充要条件.

8．近些年，我国在治理生态环境方面推出了很多政策，习总书记明确提出大力推进生态文明建设，努力建设美丽中国！某重型工业企业的生产废水中某重金属对环境有污染，因此该企业研发了治理回收废水中该重金属的过滤装置，废水每通过一次该装置，可回收20%的该重金属．若当废水中该重金属含量低于最原始的4%时，至少需要经过该装置的次数为(　　)（参考数据：$lg2\approx 0.301$）

A．12　　B．13　　C．14　　D．15

答案　D

【解析】设废水中最原始的该重金属含量为 a，则经过 x 次该装置过滤后，该重金属含量为 $a\times(1-20\%)^x=a\cdot(\frac{4}{5})^x$，

由题意知 $a\times(\frac{4}{5})^x<0.04a$，所以 $(\frac{4}{5})^x<0.04$，两边取对数，得 $x>\frac{lg4-2}{lg4-lg5}=\frac{2lg2-2}{3lg2-1}\approx 14.4$，所以 x 取最小整数为 15．

9．已知函数 $g(x)=\frac{a}{x}+a-lnx$ 在区间 $(\frac{1}{e},e)$ 内有唯一的零点，则实数 a 的取值不可能是(　　)

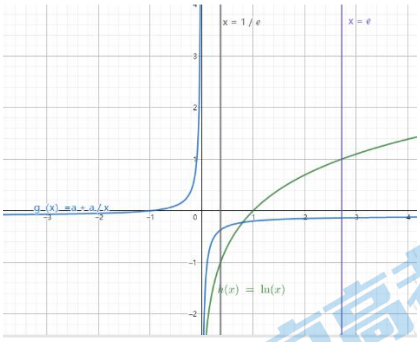
A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{e+1}$　　D. $-\frac{1}{e+2}$

答案　B

【解析】**方法一：**数形结合法。将函数有零点问题转换成两函数交点问题，

$g(x)=\frac{a}{x}+a-lnx$=0 可化为 $\frac{a}{x}+a=lnx$，在同一坐标系中画函数 $y=lnx$ 与 $y=\frac{a}{x}+a$ 的图像.

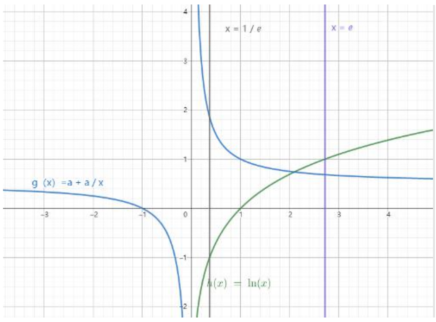
若 $a<0$，有交点情况如图所示：



$\begin{cases} ln\frac{1}{e}<a+\frac{a}{\frac{1}{e}} \\ \ln e>a+\frac{a}{e} \end{cases}$ 解得 $a\in(-\frac{1}{e+1},0)$

若 $a=0$，则两函数交点横坐标为 1，符合题意。

若 $a>0$，有交点情况如图所示：



$\begin{cases} \ln e>a+\frac{a}{e} \\ \ln\frac{1}{e}<a+\frac{a}{\frac{1}{e}} \end{cases}$ 解得 $a\in(0,\frac{e}{e+1})$

综上 $a\in(-\frac{1}{e+1},\frac{e}{e+1})$，且 $-\frac{1}{2}\notin(-\frac{1}{e+1},\frac{e}{e+1})$

故选：B．

方法二：令 $g(x)=0$，得 $a(1+\frac{1}{x})=lnx$，即 $a=\frac{xlnx}{x+1}$，

依题意，函数 $f(x)=\frac{xlnx}{x+1},x\in(\frac{1}{e},e)$ 的图象与直线 $y=a$ 有且仅有一个交点，

$f'(x)=\frac{x+lnx+1}{(x+1)^2}$，令 $h(x)=x+lnx+1$，易知函数 $h(x)$ 在定义域上为增函数，

故当 $x\in(\frac{1}{e},e)$ 时，$h(x)>h(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}>0$，此时 $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)=\frac{xlnx}{x+1}$ 在 $(\frac{1}{e},e)$ 上为增函数，

$\therefore f(\frac{1}{e})<f(x)<f(e)$，即 $-\frac{1}{e+1}<f(x)<\frac{e}{e+1}$，

$\therefore -\frac{1}{e+1}<m<\frac{e}{e+1}$，而 $-\frac{1}{2}\notin(-\frac{1}{e+1},\frac{e}{e+1})$．

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，当 $x\in[2，4]$时，$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x,2\leqslant x\leqslant 3\\ \frac{x^2+2}{x},3<x\leqslant 4\end{cases}$，$g(x)=ax+1$，若对 $\forall x_1\in[2，4]$，$\exists x_2\in[-2，1]$，使得 $f(x_1)\le g(x_2)$，则正实数 a 的取值范围为(　　)

A．$(0，2]$　　B．$(0，\frac{7}{2}]$　　C．$[2，+\infty)$　　D．$[\frac{7}{2}，+\infty)$

答案：D

【解析】$\because$ 对 $\forall x_1\in[2，4]$，$\exists x_2\in[-2，1]$，使得 $g(x_2)\geqslant f(x_1)$，$\therefore g(x_2)_{max}\geqslant f(x_1)_{max}$，

①当 $x\in[2，3]$时，$f(x)=-x^2+4x=-((x-2)^2+4$，$\therefore f(x)_{max}=4$，

②当 $x\in(3，4]$时，$f(x)=\frac{x^2+2}{x}=x+\frac{2}{x}$，$\because f'(x)=1-\frac{2}{x^2}>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(3，4]$上单调递增，

$\therefore f(x)_{max}=f$（4）$=\frac{9}{2}$，由①②得 $f(x)_{max}=\frac{9}{2}$，

又 $\because a>0$，$g(x)=ax+1$ 在 $x\in[-2，1]$上为增函数，$\therefore g(x)_{max}=a+1$，$\therefore a+1\geqslant\frac{9}{2}$，$\therefore a\geqslant\frac{7}{2}$，

$a<0$ 无解，

$\therefore a$ 的取值范围为$[\frac{7}{2}，+\infty)$．

二、填空题（共 8 道小题，每题 5 分，共 40 分）

11．设 $a=4^{0.8}$，$b=(\frac{1}{2})^{-1.5}$，$c=ln2$，则 a、b、c 的大小关系是 ________（用“>”连接）．

答案：$a>b>c$

【解析】$a=4^{0.8}=2^{1.6}$，$b=(\frac{1}{2})^{-1.5}=2^{1.5}$，所以 $a>b>2$，而 $c=ln2<lne=1$，所以 $a>b>c$．

12．已知函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 2 个单位后与函数 $y=2^x$ 的图象关于 x 轴对称，若 $f(x_0)=-1$，则 $x_0=$________．

答案：2

【解析】函数 $y=2^x$ 的图象关于 x 轴对称的函数为 $y=-2^x$，将其向右平移 2 个单位，得到 $f(x)=-2^{x-2}$，

$\because f(x_0)=-1$，$\therefore -2^{x_0-2}=-1$，即 $x_0-2=0$，$\therefore x_0=2$．

13．写出同时满足下列两个条件的一个函数 $f(x)=$__________：（1）若 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的定义域的任意子区间，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的平均变化率均为正；（2）$f(x)$ 在整个定义域内不是增函数．

答案：答案不唯一，如：$f(x)=-\frac{1}{x}$, ... 或 $f(x)=\frac{k}{x}\ \ (k<0)$, 或 $f(x)=x+\frac{k}{x}\ \ (k<0)$, 均可.

14．已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+3a)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是__________.

答案：$[-4，4]$

【解析】解：令 $t=x^2-ax+3a$，则由题意可得函数 t 在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数，且 $t>0$，

$\therefore \begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 2\\ t(2)=4+a\geqslant 0\end{cases}$，求得 $-4\leqslant a\leqslant 4$.

15．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\leqslant 0\\ x^2, x>0\end{cases}$，若 $f(x)+f(x-1)>5$，则 x 的取值范围是__________.

答案：$\{x\mid x>2\}$

【解析】$\because$ 函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\leqslant 0\\ x^2, x>0\end{cases}$，

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)+f(x-1)>5\Rightarrow x+x-1>5\Rightarrow x>3$，故此时 x 不存在，

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)+f(x-1)>5\Rightarrow x^2+x-1>5\Rightarrow x>2$ 或 $x<-3$，故此时 x 不存在，

当 $x>1$ 时，$f(x)+f(x-1)>5\Rightarrow x^2+(x-1)^2>5\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$，故此时 $x>2$，

综上可得：x 的取值范围是 $\{x\mid x>2\}$.

16．给出下列四个命题：

①若 $f'(x_0)=0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 取得极值；

②已知曲线 $y=e^x-1$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为 $ex-y+t=0$，则 $x_0=1$，$t=-1$ ；

③ $m\geqslant -1$，则函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-m)$ 的值域为 R；

④“$a=1$”是“函数 $f(x)=\frac{a-e^x}{1+ae^x}$ 是奇函数”的充分不必要条件.

其中真命题是________________.

答案：②③④

【解析】① $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但函数 $f(x)=x^3$ 在 R 递增，无极值点①错误

② $y=e^x-1$ 的导数为 $y'=e^x$，可得曲线 $y=e^x-1$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率为 e^{x_0}，

由切线方程 $ex-y+t=0$ 得 $e^{x_0}=e$，解得 $x_0=1$，切点为 $(1,e-1)$，则 $t=e-1-e=-1$．②正确

③ $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-m)$ 的值域为 R，则 $4+4m\geqslant 0$，解得 $m\geqslant -1$，③正确

④充分性：$a=1$，$f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$，$f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$；非必要性：$f(x)=\frac{a-e^x}{1+ae^x}$，$f(-x)=\frac{a-e^{-x}}{1+ae^{-x}}$，

令 $f(x)=f(-x)$，解得 $a=\pm 1$，④正确.

17．关于函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^x$，有以下三个结论：

①函数恒有两个零点，且两个零点之积为 -1；

②函数的极值点不可能是 -1；

③函数必有最小值;

④函数在 $(-\infty,-\frac{a}{2})$ 上单调递减.

其中正确结论的序号有________.

答案：①②③

【解析】函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^x$ 的零点，即为函数 $y=x^2+ax-1$ 的零点，

令 $x^2+ax-1=0$，则$\triangle=a^2+4>0$，$\therefore$方程必有两个不等实根 x_1， x_2，设 $x_1<x_2$，

由韦达定理可得 $x_1x_2=-1$，故①正确；

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax-1)e^x=[x^2+(a+2)x+a-1]e^x$，

当 $x=-1$ 时， $f'(x)=(1-a-2+a-1)e^{-1}=-2e^{-1}\neq 0$，故 -1 不可能是函数 $f(x)$ 的极值点，故②正确；

令 $f'(x)=0$ 即 $x^2+(a+2)x+a-1=0$，$\triangle=(a+2)^2-4(a-1)=a^2+8>0$，

设 $x^2+(a+2)x+a-1=0$ 的两个实数根为 x_3， x_4 且 $x_3<x_4$，

则当 $x\in(-\infty,x_3)$， $x\in(x_4$， $+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_3$， $x_4)$ 时， $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，$\therefore f(x_4)$ 为函数极小值；

由①知，当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时，函数 $f(x)>0$，$\therefore$当 $x\in(-\infty,x_3)$ 时， $f(x)>0$，

又 $f(0)=-e^x<0$，$\therefore 0\in(x_3$， $+\infty)$，$\therefore f(x_4)\leqslant f(0)<0$，

$\therefore f(x_4)$ 为函数的最小值，故③正确.

④由②知，令 $f'(x)=0$ 两个实数根为 x_3， x_4 且 $x_3<-\frac{a+2}{2}<x_4$， $x_3<-\frac{a}{2}-1<-\frac{a}{2}$

则当 $x\in(-\infty,x_3)$， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in(-\infty,-\frac{a}{2})$ 必不是单调递减，故④错误.

18．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|lnx|,x>0\\x^2+2x-1,x\leqslant 0\end{cases}$，

（1） $f(x)$ 的零点是____；

（2）若 $f(x)$ 的图象与直线 $y=ax-1$ 有且只有三个公共点，则实数 a 的取值范围是________.

答案：（1）1，$-1-\sqrt{2}$；（2）$(0,2)$

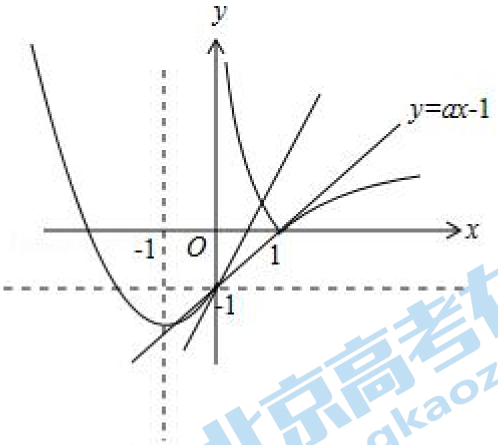
【解析】（1）当 $x>0$ 时，由 $f(x)=0$，求得 $x=1$；

当 $x \leqslant 0$ 时，由 $f(x)=x^2+2x-1=0$，求得 $x=-1-\sqrt{2}$，

故 $f(x)$ 的零点是 $1,-1-\sqrt{2}$；

（2）直线 $y=ax-1$ 恒过 $(0,-1)$，

作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=ax-1$ 的图象，如图：



联立 $\begin{cases} y=ax-1 \\ y=x^2+2x-1 \end{cases}$，得 $x^2+(2-a)x=0$，

由 $\triangle=(2-a)^2=0$，得 $a=2$，

$\therefore$ 要使 $f(x)$ 的图象与直线 $y=ax-1$ 有且只有三个公共点，

则实数 a 的取值范围是 $(0,2)$．

三、解答题（5 小题，共 70 分，19 题 12 分，20 题 12 分，21 题 13 分，22 题 17 分，23 题 16 分）

19. （本小题 12 分）已知 $f(x)=4^x+a\cdot 2^x-2$．

（1）（6 分）当 $a=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 在（0，$+\infty$）上的值域；

（2）（6 分）若不等式 $f(x)\le 2$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：（1）当 $a=-2$ 时，$f(x)=4^x-2\cdot 2^x-2$

方法一：令 $t=2^x$，则 $g(t)=t^2-2t-2$， ………………1′

且由 $x\in(0,+\infty)$ 得 $t\in(1,+\infty)$ ………………2′

又 $g(t)=(t-1)^2-3$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， ………………4′

所以 $g(t)>g(1)=-3$ ………………5′

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-3,+\infty)$． ………………6′

方法二： $f'(x)=4^x\ln 4-2\times 2^x\ln 2=2\times 2^x\ln 2(2^x-1)$ ………………2′

当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $2^x-1>0$， ………………3′

$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ………………4′

所以 $f(x) > f(0) = 4^0 - 2\cdot 2^0 - 2 = -3$ ………………5′

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-3,+\infty)$. ………………6′

（2）**方法一：** 由题意可知 $4^x + a\cdot 2^x - 2 \le 2$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 时恒成立，

因为 $2^x > 0$， ………………1′

所以 $a \le \dfrac{4}{2^x} - 2^x$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 时恒成立 ………………3′

令 $h(x) = \dfrac{4}{2^x} - 2^x$，

因为 $y = \dfrac{4}{2^x}$ 与 $y = -2^x$ 均为减函数，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数， ………………4′

所以 $h(x) > h(0) = \dfrac{4}{2^0} - 2^0 = 4 - 1 = 3$ ………………5′

所以 $a \le 3$ ………………6′

方法二： 当 $a \le 0$ 时 $f(x) = 4^x + a\cdot 2^x - 2 \le 4^x - 2$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $4^x - 2 < 4^0 - 2 = -1$，

所以对 $x\in(-\infty,0)$， $f(x) \le 2$ 恒成立 ………………3′

当 $a > 0$ 时， $f(x) = 4^x + a\cdot 2^x - 2$ 单调递增，

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f(x) < f(0) = a - 1$

要使对 $x\in(-\infty,0)$， $f(x) \le 2$ 恒成立，只需 $a - 1 \le 2$， 即 $0 < a \le 3$ ………………5′

综上可得 $a \le 3$ ………………6′

方法三： 令 $t = 2^x$， 则 $4^x + a\cdot 2^x - 2 = t^2 + at - 2$， ………………1′

且 $x\in(-\infty,0)$ 时， $t\in(0,1)$ ………………2′

所以 $f(x) \le 2$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立等价于 $t^2 + at - 4 \le 0$ 对 $t\in(0,1)$ 恒成立

令 $h(t) = t^2 + at - 4$，其图像为开口向上的抛物线，

所以 $\begin{cases} h(0) \le 0 \\ h(1) \le 0 \end{cases}$， ………………5′

即 $\begin{cases} -4 \le 0 \\ a - 3 \le 0 \end{cases}$， 解得 $a \le 3$ ………………6′

方法四： 在方法 3 的基础上进行分类讨论

$h(t) = t^2 + at - 4$ 的对称轴为 $t = -\dfrac{a}{2}$ ………………2′

分三种情况讨论$-\frac{a}{2}\le 0$或$0<-\frac{a}{2}<1$或$-\frac{a}{2}\ge 1$

或分两种情况讨论$-\frac{a}{2}\le\frac{1}{2}$或$-\frac{a}{2}>\frac{1}{2}$ ………………6′

20. （本小题 12 分）若函数$f(x)=ax^3-(a^2-4)x+4$，当$x=1$时，函数$f(x)$有极大值．

（1）（6 分）求函数的解析式；

（2）（6 分）若存在$x\in[-3，2]$，使得$f(x)+m\geqslant 0$能成立，求m的取值范围．

解：（1）$f'(x)=3ax^2-(a^2-4)$， ………………1′

$\because$当$x=1$时，函数$f(x)$有极大值，

$\therefore f'$（1）$=3a-(a^2-4)=0$， ………………2′

解得：$a=4$，或-1． ………………3′

若$a=4$，$f'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$，

可得$-1<x<1$时，$f'(x)<0$，此时函数$f(x)$单调递减；$x>1$时，$f'(x)<0$，此时函数$f(x)$单调递增．

$\therefore$当$x=1$时，函数$f(x)$有极小值，不符合题意，舍去． ………………4′

若$a=-1$，$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$，

可得$-1<x<1$时，$f'(x)>0$，此时函数$f(x)$单调递增；$x>1$时，$f'(x)<0$，此时函数$f(x)$单调递减．

$\therefore$当$x=1$时，函数$f(x)$有极大值． ………………5′

解析式为$f(x)=-x^3+3x+4$； ………………6′

（2）$f(x)=-x^3+3x+4$，

存在$x\in[-3，2]$，使得$f(x)+m\geqslant 0$能成立，则$-m\leqslant f(x)_{max}$． ………………2′

由（1）可得：

函数$f(x)$在$[-3，-1)$上单调递减，在$(-1,1)$上单调递增，在$(1，2]$上单调递减． ……………3′

而$f(-3)=22$， ………………4′

f（1）$=6$， ………………5′

或列表：

x	-3	$(-3，-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	22	↘	极小值 2	↗	极大值 6	↘	2

$\therefore f(x)_{max}=22$．

$\therefore -m\leqslant 22$，解得 $m\geqslant -22$．

$\therefore m$ 的取值范围是 $[-22,\ +\infty)$．　………………6′

21．（本小题 13 分）由于新冠肺炎疫情造成医用防护服短缺，某地政府决定为防护服生产企业 A 公司扩大生产提供 $x(x\in[0,10])$（万元）的专项补贴，并以每套 80 元的价格收购其生产的全部防护服：A 公司在收到政府 x（万元）补贴后，防护服产量将增加到 $t=k\cdot(6-\dfrac{12}{x+4})$（万件），其中 k 为工厂工人的复工率 $(k\in[0.5,1])$；A 公司生产 t 万件防护服需投入成本 $(20+9x+50t)$（万元）．

（1）（6 分）将 A 公司生产防护服的利润 y（万元）表示为补贴 x（万元）的函数（政府补贴 x 万元计入公司收入）；

（2）（7 分）对任意的 $x\in[0,\ 10]$（万元），当复工率 k 达到多少时，A 公司才能不产生亏损？（精确到 0.01）．

解：（1）由题意可得，$y=80t-(20+9x+50t)+x$ ………………………………………2′

$=80k\cdot(6-\dfrac{12}{x+4})-20-8x-50k\cdot(6-\dfrac{12}{x+4})$

$=30k\cdot(6-\dfrac{12}{x+4})-20-8x$

$=180k-\dfrac{360k}{x+4}-8x-20$，　………………………………………5′

所以 A 公司生产防护服的利润 y（万元）与补贴 x（万元）的函数关系为：

$y=180k-\dfrac{360k}{x+4}-8x-20\quad(x\in[0,\ 10],\ k\in[0.5,\ 1])$；　定义域 1 分…………………6′

（2）**方法一：**

由题意可知，问题可转化为 $y\geqslant 0$ 对所有的 $x\in[0,\ 10]$ 恒成立，

即 $180k-\dfrac{360k}{x+4}-8x-20\geqslant 0$ 在 $x\in[0,\ 10]$ 恒成立，　…………………………1′

即 $k\geqslant\dfrac{1}{45}\cdot\dfrac{(x+4)(2x+5)}{x+2}$，　…………………………3′

令 $t=x+2$，则 $t\in[2,\ 12]$，

此时 $\dfrac{(x+4)(2x+5)}{x+2}=\dfrac{(t+2)(2t+1)}{t}=2t+\dfrac{2}{t}+5$，

因为函数 $f(t)=2t+\dfrac{2}{t}+5$ 在 $t\in[2,\ 12]$ 上单调递增，　…………………………5′

所以 $f(t)$ 的最大值为 $f(12)=29+\dfrac{1}{6}\approx 29.167$，

故 $k\geqslant\dfrac{1}{45}\times 29.167\approx 0.648$，　…………………………6′

所以复工率 k 达到 0.65 时，对任意的 $x\in[0,\ 10]$，A 公司才能不产生亏损．…………7′

方法二：

设 $g(x)=180k-\dfrac{360k}{x+4}-8x-20$，使得 $g(x)$ 在 $x\in[0，10]$ 上最小值≥0 即可…………1′

$g'(x)=\dfrac{360k}{(x+4)^2}-8$，令 $g'(x)=0$，则 $(x+4)^2=45k$，即 $x=-4\pm\sqrt{45k}$

又因为 $k\in[0.5,1]$，且需要 $x\in[0，10]$，知 $x=-4+\sqrt{45k}\in[0,10]$ 满足

在 $[0,\sqrt{45k}-4]$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增

在 $[\sqrt{45k}-4,10]$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减 ………………………………3′

因此 $g(\sqrt{45k}-4)$ 为最大值，最小值为 $g(0)$ 与 $g(10)$ 中较小的，因此只需满足

$g(0)=90k-20\geq0$ 且 $g(10)=180\times\dfrac{6}{7}k-100\geq0$， ………………………………5′

解得 $k\geq\dfrac{35}{54}\approx0.648$ ………………………………6′

所以复工率 k 达到 0.65 时，对任意的 $x\in[0，10]$，A 公司才能不产生亏损．…………7′

方法三（转变为二次函数）：

设 $g(x)=180k-\dfrac{360k}{x+4}-8x-20$，使得 $g(x)$ 在 $x\in[0，10]$ 上最小值≥0 即可…………1′

即 $180k(x+4)-360k-8x(x+4)-20(x+4)\geq0$，在 $x\in[0，10]$ 上恒成立

整理得 $h(x)=2x^2+(13-45k)x+20-90k\leq0$，在 $x\in[0，10]$ 上恒成立，求最大值即可…2′

二次函数对称轴为 $x=-\dfrac{13-45k}{4}=\dfrac{45k-13}{4}$

由 $k\in[0.5,1]$，可得 $\dfrac{45k-13}{4}\in[\dfrac{19}{8},8]\subseteq[0,10]$ ………………………………3′

因此最大值为 $h(0)$ 与 $h(10)$ 中较大的

$h(0)=20-90k\leq0$，$h(10)=350-540k\leq0$ ………………………………5′

解得 $k\geq\dfrac{35}{54}\approx0.648$ ………………………………6′

所以复工率 k 达到 0.65 时，对任意的 $x\in[0，10]$，A 公司才能不产生亏损．…………7′

22. （本小题 17 分）已知函数 $f(x)=lnx-(a+2)x+ax^2(a\in R)$．

（1）（4 分）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

（2）（7 分）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）（6 分）已知 $a<0$，且函数 $f(x)$ 恰有两个零点，求实数 a 的取值范围．

解：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=lnx-2x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$， ………………1′

所以 f（1）$=-2$， ………………2′

f'（1）$=-1$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………3′

所以曲线在点$(1$，f（1）$)$处的切线方程为$y+2=-(x-1)$，即$x+y+1=0$．…………4′

（2）因为$f(x)=lnx-(a+2)x+ax^2$，定义域为$(0,+\infty)$，

所以$f'(x)=\dfrac{1}{x}-(a+2)+2ax=\dfrac{2ax^2-(a+2)x+1}{x}=\dfrac{(2x-1)(ax-1)}{x}$．

①当$a\leqslant 0$时，$f(x)$与$f'(x)$在$(0,+\infty)$上的变化情况如下：　………………1′（列表）

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	最大值 $f(\frac{1}{2})=-ln2-1-\frac{a}{4}$	↘

所以$f(x)$的单调递增区间是$(0,\frac{1}{2})$，单调递减区间是$(\frac{1}{2},+\infty)$．　………………2′

②当$0<a<2$时，$f(x)$与$f'(x)$在$(0,+\infty)$上的变化情况如下：　………………3′（列表）

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(\frac{1}{2})=-ln2-1-\frac{a}{4}$	↘	极小值 $f(\frac{1}{a})=-lna-1-\frac{1}{a}$	↗

所以$f(x)$的单调递增区间是$(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是$(\frac{1}{2},\frac{1}{a})$．　………………4′

③当$a=2$时，$f'(x)\geqslant 0$，所以$f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$．　………………5′

④当$a>2$时，$f(x)$与$f'(x)$在$(0,+\infty)$上的变化情况如下：………………6′（列表）

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 $f(\frac{1}{a})=-lna-1-\frac{1}{a}$	↘	极小值 $f(\frac{1}{2})=-ln2-1-\frac{a}{4}$	↗

所以$f(x)$的单调递增区间是$(0,\frac{1}{a})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$，单调递减区间是$(\frac{1}{a},\frac{1}{2})$．　………………7′

（3）由（Ⅰ）可知：当$a<0$时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{2})$内单调递增，在$(\frac{1}{2},+\infty)$内单调递减，…………1′

当$x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$取得最大值$f(\frac{1}{2})=-ln2-1-\frac{a}{4}=\dfrac{-4ln2-4-a}{4}$．　………………2′

(i)当$-4ln2-4\leqslant a<0$时，$f(\frac{1}{2})\leqslant 0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上至多有一个零点，不符合题意．

(ii)当$a<-4ln2-4$时，$f(\frac{1}{2})>0$．因为$f(\frac{1}{2})>0$，f（1）$=-2<0$，………………3′

$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内有唯一零点.

因为 $a<-4ln2-4<-e$，

所以 $-a>e$ 且 $0<-\frac{1}{a}<\frac{1}{4ln2+4}<\frac{1}{2}$. ················4′

因为 $f(-\frac{1}{a})=-ln(-a)+1+\frac{3}{a}<1-ln(-a)<1-lne=0$， $f(\frac{1}{2})>0$， ················5′

且 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内有唯一零点.

所以当 $a<-4ln2-4$ 时， $f(x)$ 恰有两个零点.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-4ln2-4)$. ················6′

23. （本小题 16 分）设集合 $A_{2n}=\{1，2，3，\ldots，2n\}(n\in N^*，n\geqslant 2)$. 如果对于 A_{2n} 的每一个含有 $m(m\geqslant 4)$ 个元素的子集 P， P 中必有 4 个元素的和等于 $4n+1$，称正整数 m 为集合 A_{2n} 的一个“相关数”.

（1）（4 分）当 $n=3$ 时，判断 5 和 6 是否为集合 A_6 的“相关数”，说明理由；

（2）（6 分）若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，证明： $m-n-3\geqslant 0$；

（3）（6 分）给定正整数 n. 求集合 A_{2n} 的“相关数” m 的最小值.

解：（1）当 $n=3$ 时， $A_6=\{1，2，3，4，5，6\}$， $4n+1=13$，

①对于 A_6 的含有 5 个元素的子集 $\{2，3，4，5，6\}$，

因为该集合中四个元素的和的最小值为 $2+3+4+5>13$， ············1′(如果没有说明理由，该步骤分不得)

所以 5 不是集合的“相关数”； ············2′(结论分 1 分)

② A_6 的含有 6 个元素的子集只有 $\{1，2，3，4，5，6\}$，

因为 $1+3+4+5=13$， ············3′（必须指出存在 4 个数的和为 13，写 1+2+4+6=13 也可以）

所以 6 是集合 A_6 的“相关数”. ············4′ （结论分 1 分）

（2）考察集合 A_{2n} 的含有 $n+2$ 个元素的子集 $B=\{n-1，n，n+1，\ldots，2n\}$， ············2′ （不写集合这两分不得）

B 中任意 4 个元素之和一定不小于 $(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=4n+2$. ············3′

所以 $n+2$ 一定不是集合 A_{2n} 的“相关数”； ············4′

当 $m\leqslant n+1$ 时，可以删去子集 B 中的若干元素，使得元素个数为 m，此时最小的四个元素之和一定大于 $4n+1$，因此 m 一定不是集合 A_{2n} 的“相关数”， ············5′(只说明 $n+2$ 不是集合 A_{2n} 的“相关数”而没有说明更小的数不是，扣 1 分)

因此若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，必有 $m \geqslant n+3$，

即若 m 为集合 A_{2n} 的“相关数”，必有 $m-n-3 \geqslant 0$； …………6′

（3）一方面由（2）得 $m \geqslant n+3$，另一方面，以下证明 $n+3$ 是集合 A_{2n} 的“相关数”．

将集合 A_{2n} 的元素剔除 n 和 $2n$ 后，分成如下 $n-1$ 组：

$D_j=(j,2n-j)$，$(1 \leqslant j \leqslant n-1)$，

对于 A_{2n} 的任意一个含有 $n+3$ 个元素的子集 P，必有一组 $D_{j_1}=(j_1,2n-j_1)$ 中两个元素同时属于集合 P，…………2′

将 P 中的元素 $j_1,2n-j_1$ 删去，剩余元素组成的集合记为 Q，则 Q 中有 $n+1$ 个元素.

再将集合 A_{2n} 的元素分成如下 n 组：

$C_i=(i,2n+1-i)$，$(1 \le i \le n)$，

对 A_{2n} 的含有 $n+1$ 个元素的子集 Q，

必有一组 $C_{i_2}=(i_2,2n+1-i_2)$ 同中两个元素同时属于集合 Q， …………4′

此时集合 P 中 4 个不同元素 $j_1,2n-j_1$，$i_2,2n+1-i_2$ 之和为 $j_1+(2n-j_1)+j_2+(2n+1-j_2)=4n+1$， …………5′

所以集合 A_{2n} 的“相关数” m 的最小值为 $n+3$． …………6′（结论分 1 分，必须明确指出最小值为 $n+3$）