

数 学

2022. 3

本试卷共 4 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题: 本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{4-x}\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知复数 z 满足 $z + 3 = 4\bar{z} + 5i$, 则在复平面内复数 z 对应的点在
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知 $a > 0$, 则“ $a^a > a^3$ ”是“ $a > 3$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 以边长为 2 的正方形一边所在直线为轴旋转一周, 所得到的几何体的体积为
 A. 2π B. 8π C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{8\pi}{3}$
5. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $3\cos 2\alpha + \sin \alpha = 1$, 则
 A. $\sin(\pi - \alpha) = \frac{2}{3}$ B. $\cos(\pi - \alpha) = -\frac{2}{3}$
 C. $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
6. 如图, 某建筑物白色的波浪形屋顶像翅膀一样漂浮, 建筑师通过双曲线的设计元素赋予了这座建筑以轻盈, 极简和雕塑般的气质. 该建筑物外形弧线的一段可以近似看成焦点在 y 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上支的一部分. 已知该双曲线的上焦点 F 到下顶点的距离为 36, F 到渐近



的距离为 12, 则该双曲线的离心率为

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

7. 第十三届冬残奥会于 2022 年 3 月 4 日至 3 月 13 日在北京举行, 现从 4 名男生, 2 名女生中选中 3 人分别担任冬季两项、单板滑雪、轮椅冰壶志愿者, 且至多有 1 名女生被选中, 不同的选择方案共有

- A. 72 种 B. 84 种 C. 96 种 D. 124 种

8. 设函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 在区间 $[t, t + \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $g_1(t)$, 最小值为 $g_2(t)$, 则 $g_1(t) - g_2(t)$ 的最小值为

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

二、多项选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某市共青团委统计了甲、乙两名同学近十期“青年大学习”答题得分情况, 整理成如图所示的茎叶图. 则下列说法中正确的是

甲		乙	
7	8	2	9 8
9	1	3	4 5
2	5	4	8 2 8
5	8 5	5	3 5
6		6	7

- A. 甲得分的 30% 分位数是 31
 B. 乙得分的众数是 48
 C. 甲得分的中位数小于乙得分的中位数
 D. 甲得分的极差等于乙得分的极差

10. 已知向量 $\vec{OP} = (1, 2)$, 将 \vec{OP} 绕原点 O 旋转 $-30^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 到 $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ 的位置, 则

- A. $\vec{OP}_1 \cdot \vec{OP}_3 = 0$ B. $|\vec{PP}_1| = |\vec{PP}_2|$
 C. $\vec{OP} \cdot \vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 \cdot \vec{OP}_2$ D. 点 P_1 坐标为 $(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2})$

11. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, 一条光线从点 $P(2, 1)$ 射出经 x 轴反射, 下列结论正确的是

- A. 圆 C 关于 x 轴的对称圆的方程为 $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$
 B. 若反射光线平分圆 C 的周长, 则入射光线所在直线方程为 $3x - 2y - 4 = 0$
 C. 若反射光线与圆 C 相切于点 A , 与 x 轴相交于点 B , 则 $|PB| + |BA| = 2$
 D. 若反射光线与圆 C 交于 M, N 两点, 则 $\triangle CNM$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}$

12. 已知同底面的两个正三棱锥 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 均内接于球 O , 且正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 则下列说法正确的是

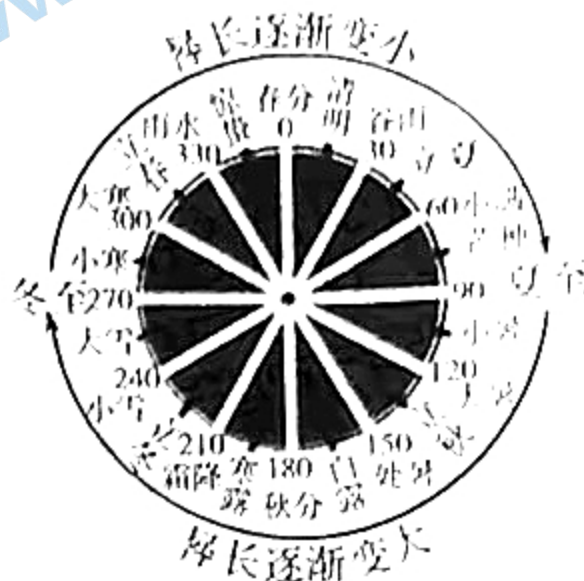
- A. $PA \parallel$ 平面 QBC
 B. 设三棱锥 $Q-ABC$ 和 $P-ABC$ 的体积分别为 V_{Q-ABC} 和 V_{P-ABC} , 则 $V_{Q-ABC} = 4V_{P-ABC}$
 C. 平面 ABC 截球 O 所得的截面面积是球 O 表面积的 $\frac{4}{25}$ 倍
 D. 二面角 $P-AB-Q$ 的正切值为 $-\frac{5}{3}$

三、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 抛物线 $C: x^2 = 4ay$ 的焦点坐标为 $(0, 2)$ ，则 C 的准线方程为 _____。

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 + \log_2(1-x), & x < 1, \\ 3^{x-1}, & x \geq 1. \end{cases}$ 则 $f(-1) + f(\log_3 12) =$ _____。

15. 2022 年北京冬奥会开幕式始于 24 节气倒计时，它将中国人的物候文明、传承久远的诗歌、现代生活的画面和谐统一起来。我国古人将一年分为 24 个节气，如图所示，相邻两个节气的日晷长变化量相同，冬至日晷长最长，夏至日晷长最短，周而复始。已知冬至日晷长为 13.5 尺，芒种日晷长为 2.5 尺，则一年中夏至到大雪の日晷长的和为 _____ 尺。



16. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0$ ，且 $f(x+1)$ 为偶函数，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = \sqrt{x}$ 。若关于 x 的方程 $|f(x)| + f(|x|) = ax$ 有 4 个不同实根，则实数 a 的取值范围是 _____。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 2, S_3 = a_3 + 6$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$ ，求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分)

在① $a = \sqrt{7}$ ，② AC 边上的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，③ $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中并完成解答。

问题：记 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\angle A = 60^\circ, c = b + 1$ ，_____。

(1) 求 c 的值；

(2) 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，求 AD 的长。

注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分。

19. (12 分)

根据国家部署，2022 年中国空间站“天宫”将正式完成在轨建造任务，成为长期有人照料的国家级太空实验室，支持开展大规模、多学科交叉的空间科学实验。为普及空间站相关知识，某部门组织了空间站建造过程 3D 模拟编程闯关活动，它是由太空发射、自定义漫游、全尺寸太阳能、空间运输等 10 个相互独立的程序题目组成。规则是：编写程序能够正常运行即为程序正确。每位参赛者从 10 个不同的题目中随机选择 3 个进行编程，全部正确即通关。北京高考在线官方微信（微信号：bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

结束后提交评委测试,若其中2个及以上程序正确即为闯关成功. 现已知10个程序中,甲只能正确完成其中6个,乙正确完成每个程序的概率均为 $\frac{3}{5}$,每位选手每次编程都互不影响.

(1) 求乙闯关成功的概率;

(2) 求甲编写程序正确的个数 X 的分布列和数学期望,并判断甲和乙谁闯关成功的可能性更大.

20. (12分)

图1是由矩形 ACC_1A_1 、等边 $\triangle ABC$ 和平行四边形 ABB_1A_2 组成的一个平面图形,其中 $AB=2$, $AA_1=AA_2=1$, N 为 A_1C_1 的中点. 将其沿 AC, AB 折起使得 AA_1 与 AA_2 重合, 连结 B_1C_1, BN , 如图2.

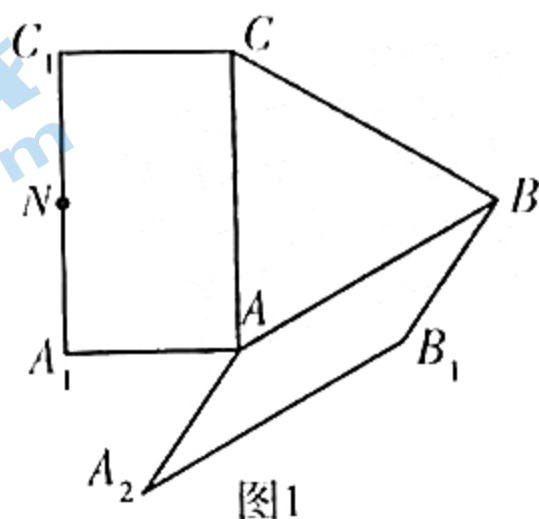


图1

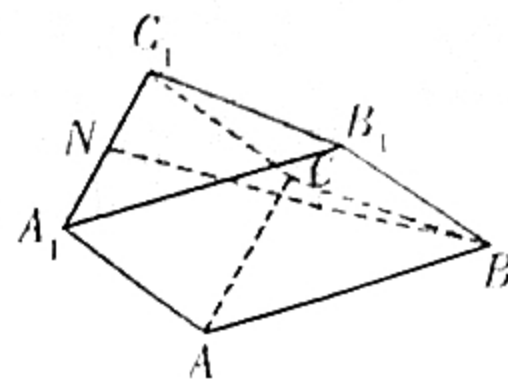


图2

(1) 证明: 在图2中, $AC \perp BN$, 且 B, C, C_1, B_1 四点共面;

(2) 在图2中, 若二面角 A_1-AC-B 的大小为 θ , 且 $\tan\theta = -\frac{1}{2}$, 求直线 AB 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为2, 点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若过动点 P 的两条直线 l_1, l_2 均与 C 相切, 且 l_1, l_2 的斜率之积为 -1 , 点 $A(-\sqrt{3}, 0)$, 问是否存在定点 B , 使得 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$? 若存在, 求出点 B 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - a, a \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a=1$ 时, 令 $g(x) = \frac{2f(x)}{x^2}$.

① 证明: 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 1$;

② 若数列 $\{x_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足 $x_1 = \frac{1}{3}, e^{x_{n+1}} = g(x_n)$, 证明: $2^n(e^{x_n} - 1) < 1$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018