2020年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分．

1． 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_9=13, a_{13}=1$，则$\log_{a_1}13$的值为_________．

答案： $\frac{1}{3}$．

解： 由等比数列的性质知$\frac{a_1}{a_9}=\left(\frac{a_9}{a_{13}}\right)^2$，故$a_1=\frac{a_9^3}{a_{13}^2}=13^3$．所以$\log_{a_1}13=\frac{1}{3}$．

2． 在椭圆Γ中，A为长轴的一个端点，B为短轴的一个端点，F_1,F_2为两个焦点．若$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，则$\frac{|AB|}{|F_1F_2|}$的值为________．

答案： $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

解： 不妨设Γ的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$A(a,0), B(0,b)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$．由条件知

$$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=(-c-a)(c-a)+(-c^2+b^2)=a^2+b^2-2c^2=0.$$

所以$\frac{|AB|}{|F_1F_2|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2c}=\frac{\sqrt{2c^2}}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

3． 设$a>0$，函数$f(x)=x+\frac{100}{x}$在区间$(0,a]$上的最小值为m_1，在区间$[a,+\infty)$上的最小值为m_2．若$m_1m_2=2020$，则a的值为_________．

答案： 1或100．

解： 注意到$f(x)$在$(0,10]$上单调减，在$[10,+\infty)$上单调增．当$a\in(0,10]$时，$m_1=f(a), m_2=f(10)$；当$a\in[10,+\infty)$时，$m_1=f(10), m_2=f(a)$．因此总有

$$f(a)f(10)=m_1m_2=2020,$$

即$a+\frac{100}{a}=\frac{2020}{20}=101$，解得$a=1$或$a=100$．

4． 设z为复数．若$\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}$为实数（i为虚数单位），则$|z+3|$的最小值为_________．

答案：$\sqrt{5}$．

解法 1：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，由条件知

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-2}{z-\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{(a-2)+b\mathrm{i}}{a+(b-1)\mathrm{i}}\right)=\frac{-(a-2)(b-1)+ab}{a^2+(b-1)^2}=\frac{a+2b-2}{a^2+(b-1)^2}=0,$$

故 $a+2b=2$．从而

$$\sqrt{5}\left|z+3\right|=\sqrt{(1^2+2^2)((a+3)^2+b^2)}\geq\left|(a+3)+2b\right|=5,$$

即 $\left|z+3\right|\geq\sqrt{5}$．当 $a=-2,\ b=2$ 时，$\left|z+3\right|$ 取到最小值 $\sqrt{5}$．

解法 2：由 $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}\in\mathbf{R}$ 及复数除法的几何意义，可知复平面中 z 所对应的点在 2 与 i 所对应的点的连线上（i 所对应的点除外），故 $\left|z+3\right|$ 的最小值即为平面直角坐标系 xOy 中的点 $(-3,0)$ 到直线 $x+2y-2=0$ 的距离，即 $\dfrac{\left|-3-2\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$．

5. 在 ΔABC 中，$AB=6,\ BC=4$，边 AC 上的中线长为 $\sqrt{10}$，则 $\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$ 的值为________．

答案：$\dfrac{211}{256}$．

解：记 M 为 AC 的中点，由中线长公式得

$$4BM^2+AC^2=2(AB^2+BC^2),$$

可得 $AC=\sqrt{2(6^2+4^2)-4\cdot 10}=8$．

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{CA^2+AB^2-BC^2}{2CA\cdot AB}=\dfrac{8^2+6^2-4^2}{2\cdot 8\cdot 6}=\dfrac{7}{8}$，所以

$$\begin{aligned}\sin^6\frac{A}{2}+\cos^6\frac{A}{2}&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\sin^4\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^4\frac{A}{2}\right)\\&=\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)^2-3\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2 A\\&=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 A=\frac{211}{256}.\end{aligned}$$

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长均为 1，L,M,N 分别为棱 PA,PB,PC 的中点，则该正三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的截面面积为_________．

答案：$\dfrac{\pi}{3}$．

解：由条件知平面 LMN 与平面 ABC 平行，且点 P 到平面 LMN,ABC 的距离之比为 $1:2$．设 H 为正三棱锥 $P-ABC$ 的面 ABC 的中心，PH 与平面 LMN 交于点 K，则 $PH\perp$ 平面 ABC，$PK\perp$ 平面 LMN，故 $PK=\dfrac{1}{2}PH$．

正三棱锥 $P-ABC$ 可视为正四面体，设 O 为其中心（即外接球球心），则 O 在 PH 上，且由正四面体的性质知 $OH=\dfrac{1}{4}PH$．结合 $PK=\dfrac{1}{2}PH$ 可知 $OK=OH$，

即点O到平面LMN, ABC等距. 这表明正三棱锥的外接球被平面LMN, ABC所截得的截面圆大小相等.

从而所求截面的面积等于ΔABC的外接圆面积，即$\pi\cdot\left(\dfrac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{\pi}{3}$.

7. 设$a, b>0$，满足：关于x的方程$\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$恰有三个不同的实数解$x_1, x_2, x_3$，且$x_1<x_2<x_3=b$，则$a+b$的值为________.

答案：144.

解：令$t=x+\dfrac{a}{2}$，则关于t的方程$\sqrt{\left|t-\dfrac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\dfrac{a}{2}\right|}=b$恰有三个不同的实数解$t_i=x_i+\dfrac{a}{2}\,(i=1,2,3)$.

由于$f(t)=\sqrt{\left|t-\dfrac{a}{2}\right|}+\sqrt{\left|t+\dfrac{a}{2}\right|}$为偶函数，故方程$f(t)=b$的三个实数解关于数轴原点对称分布，从而必有$b=f(0)=\sqrt{2a}$. 以下求方程$f(t)=\sqrt{2a}$的实数解.

当$|t|\le\dfrac{a}{2}$时，$f(t)=\sqrt{\dfrac{a}{2}-t}+\sqrt{\dfrac{a}{2}+t}=\sqrt{a+\sqrt{a^2-4t^2}}\le 2a$，等号成立当且仅当$t=0$；当$t>\dfrac{a}{2}$时，$f(t)$单调增，且当$t=\dfrac{5a}{8}$时$f(t)=\sqrt{2a}$；当$t<-\dfrac{a}{2}$时，$f(t)$单调减，且当$t=-\dfrac{5a}{8}$时$f(t)=\sqrt{2a}$.

从而方程$f(t)=\sqrt{2a}$恰有三个实数解$t_1=-\dfrac{5}{8}a, t_2=0, t_3=\dfrac{5}{8}a$.

由条件知$b=x_3=t_3-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{8}$，结合$b=\sqrt{2a}$得$a=128$.

于是$a+b=\dfrac{9a}{8}=144$.

8. 现有10张卡片，每张卡片上写有$1, 2, 3, 4, 5$中两个不同的数，且任意两张卡片上的数不完全相同. 将这10张卡片放入标号为$1, 2, 3, 4, 5$的五个盒子中，规定写有i, j的卡片只能放在i号或j号盒子中. 一种放法称为“好的”，如果1号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数. 则“好的”放法共有________种.

答案：120.

解：用$\{i, j\}$表示写有i, j的卡片. 易知这10张卡片恰为$\{i, j\}\ (1\le i<j\le 5)$.

考虑“好的”卡片放法. 五个盒子一共放有10张卡片，故1号盒至少有3张卡片. 能放入1号盒的卡片仅有$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}$.

情况一：这4张卡片都在1号盒中，此时其余每个盒中已经不可能达到4张卡片，故剩下6张卡片无论怎样放都符合要求，有$2^6=64$种好的放法.

情况二：这4张卡片恰有3张在1号盒中，且其余每盒最多仅有2张卡片.

考虑$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$在1号盒，且$\{1,5\}$在5号盒的放法数N.

卡片$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$的放法有8种可能，其中6种是在$2,3,4$号的某个盒中放两张，其余2种则是在$2,3,4$号盒中各放一张.

若$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$有两张在一个盒中，不妨设$\{2,3\},\{2,4\}$在2号盒，则

$\{2,5\}$只能在 5 号盒，这样 5 号盒已有$\{1,5\},\{2,5\}$，故$\{3,5\},\{4,5\}$分别在 3 号与 4 号盒，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$的放法唯一；

若$\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$在$2,3,4$号盒中各一张，则$2,3,4$号盒均至多有2张卡片，仅需再使 5 号盒中不超过 2 张卡片，即$\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\}$有 0 张或 1 张在 5 号盒中，对应$\mathrm{C}_3^0+\mathrm{C}_3^1=4$种放法.

因此$N=6\times1+2\times4=14$．由对称性，在情况二下有$4N=56$种好的放法.

综上，好的放法共有$64+56=120$种.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分） 在ΔABC中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．求$\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围.

解：记$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$.

由条件知$A=\dfrac{\pi}{4}$或$A=\dfrac{3\pi}{4}$. ……………………4 分

当$A=\dfrac{\pi}{4}$时，$B=\dfrac{3\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{3\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C=\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)\in(0,1].$$

……………………8 分

当$A=\dfrac{3\pi}{4}$时，$B=\dfrac{\pi}{4}-C$，其中$0<C<\dfrac{\pi}{4}$，此时

$$f=\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)+\sqrt{2}\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos C=\sqrt{5}\sin(C+\varphi),$$

其中$\varphi=\arctan 3$. ……………………12 分

注意到$\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，函数$g(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right]$上单调增，在$\left[\dfrac{\pi}{2}-\varphi,\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调减，又$g(0)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2=g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sqrt{5}$，故$f\in(2,\sqrt{5}]$.

综上所述，$f=\cos B+\sqrt{2}\cos C$的取值范围是$(0,1]\cup(2,\sqrt{5}]$.

……………………16 分

10.（本题满分 20 分） 对正整数n及实数$x\,(0\le x<n)$，定义

$$f(n,x)=(1-\{x\})\cdot\mathrm{C}_n^{[x]}+\{x\}\cdot\mathrm{C}_n^{[x]+1},$$

其中$[x]$表示不超过实数x的最大整数，$\{x\}=x-[x]$．若整数$m,n\ge2$满足

$$f\left(m,\frac{1}{n}\right)+f\left(m,\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m,\frac{mn-1}{n}\right)=123,$$

求$f\left(n,\dfrac{1}{m}\right)+f\left(n,\dfrac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n,\dfrac{mn-1}{m}\right)$的值.

解：对$k=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k+\frac{i}{n}\right)=\mathrm{C}_m^k \cdot \sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)+\mathrm{C}_m^{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}=\frac{n-1}{2} \cdot\left(\mathrm{C}_m^k+\mathrm{C}_m^{k+1}\right) .$$

…………………5 分

所以

$$\begin{aligned} f\left(m, \frac{1}{n}\right)+f\left(m, \frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(m, \frac{mn-1}{n}\right) &=\sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{C}_m^j+\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(m, k+\frac{i}{n}\right) \\ &=2^m-2+\frac{n-1}{2} \cdot\left(\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^k+\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^{k+1}\right) \\ &=2^m-2+\frac{n-1}{2} \cdot\left(2^m-1+2^m-1\right)=\left(2^m-1\right) n-1 . \end{aligned}$$

……………10 分

同理得 $f\left(n, \frac{1}{m}\right)+f\left(n, \frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n, \frac{mn-1}{m}\right)=\left(2^n-1\right) m-1$.

由条件知 $\left(2^m-1\right) n-1=123$，即 $\left(2^m-1\right) n=124$，故 $\left(2^m-1\right) \mid 124$. 又 $m \geq 2$，所以 $2^m-1 \in\{3,7,15,31,63,127, \cdots\}$，仅当 $m=5$ 时，$2^m-1=31$ 为 124 的约数，进而有 $n=\frac{124}{31}=4$. 进而

$$f\left(n, \frac{1}{m}\right)+f\left(n, \frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(n, \frac{mn-1}{m}\right)=\left(2^4-1\right) \cdot 5-1=74 .$$

…………………20 分

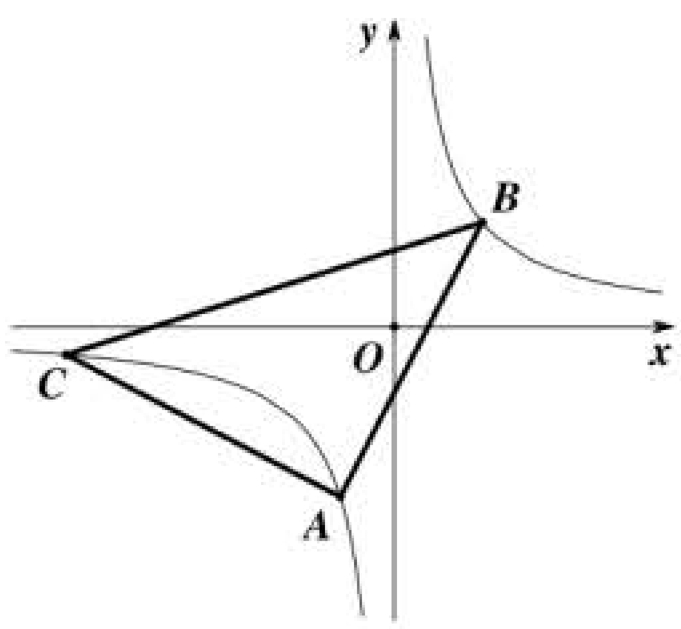
11. （本题满分 20 分） 在平面直角坐标系中，点 A, B, C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 ΔABC 为等腰直角三角形. 求 ΔABC 的面积的最小值.

解：不妨设等腰直角 ΔABC 的顶点 A, B, C 逆时针排列，A 为直角顶点.

设 $\overrightarrow{AB}=(s, t)$，则 $\overrightarrow{AC}=(-t, s)$，且 ΔABC 的面积

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{s^2+t^2}{2} .$$

…………………5 分



注意到 A 在双曲线 $xy=1$ 上，设 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$，则 $B\left(a+s, \frac{1}{a}+t\right), C\left(a-t, \frac{1}{a}+s\right)$.

由 B, C 在双曲线 $xy=1$ 上，可知

$$(a+s)\left(\frac{1}{a}+t\right)=(a-t)\left(\frac{1}{a}+s\right)=1,$$

这等价于

$$\frac{s}{a}+at=-st , \quad ①$$

$$-\frac{t}{a}+as=st . \quad ②$$

由①、②相加，得 $\frac{s-t}{a}+a(t+s)=0$，即

$$a^2=\frac{t-s}{t+s}. \qquad ③$$

由①、②相乘，并利用③，得

$$\begin{aligned}-s^2t^2&=\left(\frac{s}{a}+at\right)\left(-\frac{t}{a}+as\right)=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)st+s^2-t^2\\&=\left(\frac{t-s}{t+s}-\frac{t+s}{t-s}\right)\cdot st+s^2-t^2=\frac{4st}{s^2-t^2}\cdot st+s^2-t^2\\&=\frac{(s^2+t^2)^2}{s^2-t^2}.\end{aligned}$$

…………………10 分

所以由基本不等式得

$$\begin{aligned}(s^2+t^2)^4&=-s^2t^2(s^2-t^2)^2=\frac{1}{4}\cdot 2s^2t^2\cdot 2s^2t^2\cdot(s^2-t^2)^2\\&\le\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2s^2t^2+2s^2t^2+(s^2-t^2)^2}{3}\right)^3=\frac{(s^2+t^2)^6}{108},\end{aligned} \qquad ④$$

故 $s^2+t^2\ge\sqrt{108}=6\sqrt{3}$. …………………15 分

以下取一组满足条件的实数 (s,t,a)，使得 $s^2+t^2=6\sqrt{3}$（进而由 s,t,a 可确定一个满足条件的 ΔABC，使得 $S_{\Delta ABC}=\frac{s^2+t^2}{2}=3\sqrt{3}$）.

考虑④的取等条件，有 $2s^2t^2=(s^2-t^2)^2$，即 $\frac{s^2}{t^2}=2\pm\sqrt{3}$.

不妨要求 $0<s<t$，结合 $s^2+t^2=6\sqrt{3}$，得 $s=\sqrt{3(\sqrt{3}-1)},\ t=\sqrt{3(\sqrt{3}+1)}$.

由①知 $a<0$，故由③得 $a=-\sqrt{\frac{t-s}{t+s}}$，其中 $t=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}s=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s$，从而有

$$a=-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}}.$$

综上，ΔABC 的面积的最小值为 $3\sqrt{3}$. …………………20 分

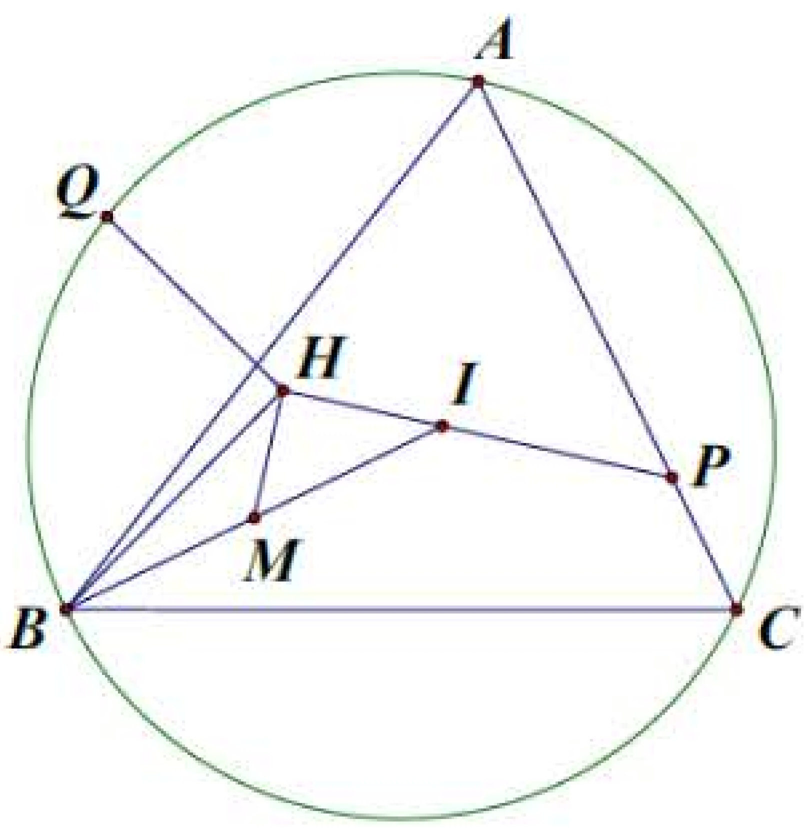
2020 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一．**（本题满分 40 分）**如图，在等腰ΔABC中，$AB=BC$，I为内心，M为BI的中点，P为边AC上一点，满足$AP=3PC$，PI延长线上一点H满足$MH\perp PH$，Q为ΔABC的外接圆上劣弧AB的中点．证明：$BH\perp QH$．

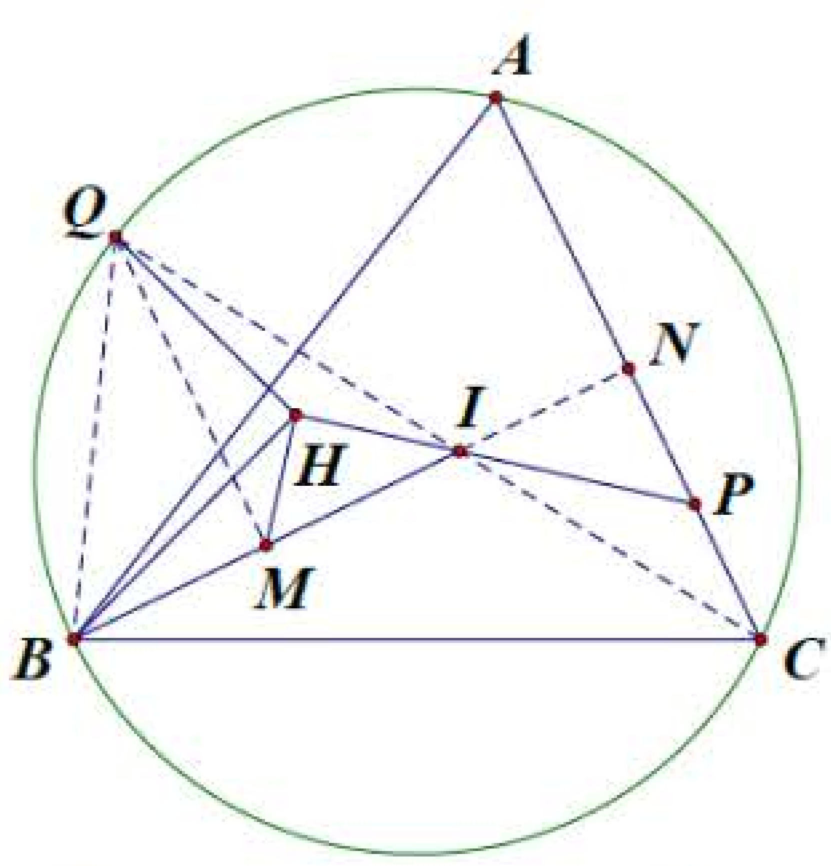


证明：取AC的中点N．由$AP=3PC$，可知P为NC的中点．易知B,I,N共线，$\angle INC=90^\circ$．

由I为ΔABC的内心，可知CI经过点Q，且

$$\angle QIB=\angle IBC+\angle ICB=\angle ABI+\angle ACQ=\angle ABI+\angle ABQ=\angle QBI,$$

又M为BI的中点，所以$QM\perp BI$．进而$QM\parallel CN$．……………10 分



考虑ΔHMQ与ΔHIB．由于$MH\perp PH$，故$\angle HMQ=90^\circ-\angle HMI=\angle HIB$．

又$\angle IHM=\angle INP=90^\circ$，故$\dfrac{HM}{HI}=\dfrac{NP}{NI}$，于是

$$\frac{HM}{HI}=\frac{NP}{NI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{NC}{NI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{MQ}{MI}=\frac{MQ}{IB}.$$

所以$\Delta HMQ\backsim\Delta HIB$，得$\angle HQM=\angle HBI$．……………30 分

从而H,M,B,Q四点共圆．于是有$\angle BHQ=\angle BMQ=90^\circ$，即$BH\perp QH$．

……………40 分

二．（本题满分 40 分）给定整数 $n \geq 3$．设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}, b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$ 是 $4n$ 个非负实数，满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} > 0,$$

且对任意 $i = 1, 2, \cdots, 2n$，有 $a_i a_{i+2} \geq b_i + b_{i+1}$（这里 $a_{2n+1} = a_1, a_{2n+2} = a_2, b_{2n+1} = b_1$）.

求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ 的最小值.

解：记 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n}$.

不失一般性，设 $T = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} \leq \dfrac{S}{2}$.

当 $n = 3$ 时，因为

$$T^2 - 3 \cdot \sum_{k=1}^{3} a_{2k-1} a_{2k+1} = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_3)^2 + (a_3 - a_5)^2 + (a_5 - a_1)^2\right] \geq 0,$$

故结合条件可知

$$\frac{S^2}{4} \geq T^2 \geq 3 \cdot \sum_{k=1}^{3} a_{2k-1} a_{2k+1} \geq 3 \cdot \sum_{k=1}^{3} (b_{2k-1} + b_{2k}) = 3S.$$

又 $S > 0$，所以 $S \geq 12$.

当 $a_i = b_i = 2\ (1 \leq i \leq 6)$ 时，S 取到最小值 12. ……………10 分

当 $n \geq 4$ 时，一方面有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} a_{2k+1} \geq \sum_{k=1}^{n} (b_{2k-1} + b_{2k}) = S.$$

另一方面，若 n 为偶数，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} a_{2k+1} \leq (a_1 + a_5 + \cdots + a_{2n-3})(a_3 + a_7 + \cdots + a_{2n-1}) \leq \frac{T^2}{4},$$

其中第一个不等式是因为 $(a_1 + a_5 + \cdots + a_{2n-3})(a_3 + a_7 + \cdots + a_{2n-1})$ 展开后每一项均非负，且包含 $a_{2k-1} a_{2k+1} (1 \leq k \leq n)$ 这些项，第二个不等式利用了基本不等式.

……………20 分

若 n 为奇数，不妨设 $a_1 \leq a_3$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} a_{2k+1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} a_{2k+1}\right) + a_{2n-1} a_3$$

$$\leq (a_1 + a_5 + \cdots + a_{2n-1})(a_3 + a_7 + \cdots + a_{2n-3}) \leq \frac{T^2}{4}.$$

从而总有 $S \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} a_{2k+1} \leq \frac{T^2}{4} \leq \frac{S^2}{16}$. 又 $S > 0$，所以 $S \geq 16$.

……………30 分

当 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4, a_i = 0 (5 \leq i \leq 2n), b_1 = 0, b_2 = 16, b_i = 0 (3 \leq i \leq 2n)$ 时，S 取到最小值 16.

综上，当 $n = 3$ 时，S 的最小值为 12；当 $n \geq 4$ 时，S 的最小值为 16.

……………40 分

三．（本题满分 50 分）设 $a_1=1, a_2=2, a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}, n=3,4,\cdots$．证明：对整数 $n\geq 5$，a_n 必有一个模 4 余 1 的素因子．

证明：记 $\alpha=1+\sqrt{2}, \beta=1-\sqrt{2}$，则易求得 $a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$．

记 $b_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$，则数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n=2b_{n-1}+b_{n-2}\,(n\geq 3)\,. \qquad ①$$

因 $b_1=1, b_2=3$ 均为整数，故由①及数学归纳法，可知 $\{b_n\}$ 每项均为整数．

……………10 分

由 $\left(\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2=(\alpha\beta)^n$，可知

$$b_n^2-2a_n^2=(-1)^n\,(n\geq 1)\,. \qquad ②$$

……………20 分

当 $n>1$ 为奇数时，由于 a_1 为奇数，故由 $\{a_n\}$ 的递推式及数学归纳法，可知 a_n 为大于 1 的奇数，所以 a_n 有奇素因子 p．由②得 $b_n^2\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,p)$，故

$$b_n^{p-1}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,(\mathrm{mod}\,p)\,.$$

又上式表明 $(p,b_n)=1$，故由费马小定理得 $b_n^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$，从而

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)\,.$$

因 $p>2$，故必须 $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$，因此 $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$．……………30 分

另一方面，对正整数 m,n，若 $m\,|\,n$，设 $n=km$，则

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\cdot\left(\alpha^{(k-1)m}+\alpha^{(k-2)m}\beta^m+\cdots+\alpha^m\beta^{(k-2)m}+\beta^{(k-1)m}\right)\\&=\begin{cases}a_m\cdot\displaystyle\sum_{i=0}^{l-1}(\alpha\beta)^{im}\left(\alpha^{(2l-1-2i)m}+\beta^{(2l-1-2i)m}\right), & k=2l,\\ a_m\cdot\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l-1}(\alpha\beta)^{im}\left(\alpha^{(2l-2i)m}+\beta^{(2l-2i)m}\right)+(\alpha\beta)^{lm}\right), & k=2l+1.\end{cases}\end{aligned}$$

因 $\alpha^s+\beta^s=2b_s$ 为整数（对正整数 s），$\alpha\beta=-1$ 为整数，故由上式知 a_n 等于 a_m 与一个整数的乘积，从而 $a_m\,|\,a_n$．

因此，若 n 有大于 1 的奇因子 m，则由前面已证得的结论知 a_m 有素因子 $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$，而 $a_m\,|\,a_n$，故 $p\,|\,a_n$，即 a_n 也有模 4 余 1 的素因子．

……………40 分

最后，若 n 没有大于 1 的奇因子，则 n 是 2 的方幂．设 $n=2^l\,(l\geq 3)$，因 $a_8=408=24\times 17$ 有模 4 余 1 的素因子 17，对于 $l\geq 4$，由 $8\,|\,2^l$ 知 $a_8\,|\,a_{2^l}$，从而 a_{2^l} 也有素因子 17．证毕．……………50 分

四.（本题满分 50 分）给定凸 20 边形P．用P的 17 条在内部不相交的对角线将P分割成 18 个三角形，所得图形称为P的一个三角剖分图．对P的任意一个三角剖分图T，P的 20 条边以及添加的 17 条对角线均称为T的边．T的任意10条两两无公共端点的边的集合称为T的一个完美匹配．当T取遍P的所有三角剖分图时，求T的完美匹配个数的最大值．

解：将 20 边形换成$2n$边形，考虑一般的问题．

对凸$2n$边形P的一条对角线，若其两侧各有奇数个P的顶点，称其为奇弦，否则称为偶弦．首先注意下述基本事实：

对P的任意三角剖分图T，T的完美匹配不含奇弦．（*）

如果完美匹配中有一条奇弦e_1，因为T的一个完美匹配给出了P的顶点集的一个配对划分，而e_1两侧各有奇数个顶点，故该完美匹配中必有T的另一条边e_2，端点分别在e_1的两侧，又P是凸多边形，故e_1与e_2在P的内部相交，这与T是三角剖分图矛盾． ……………10 分

记$f(T)$为T的完美匹配的个数．设$F_1=1$，$F_2=2$，对$k\ge 2$，$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$，是 Fibonacci 数列．

下面对n归纳证明：若T是凸$2n$边形的任意一个三角剖分图，则$f(T)\le F_n$．

设$P=A_1A_2\cdots A_{2n}$是凸$2n$边形．从P的$2n$条边中选n条边构成完美匹配，恰有两种方法，$A_1A_2,A_3A_4,\cdots,A_{2n-1}A_{2n}$或$A_2A_3,A_4A_5,\cdots,A_{2n-2}A_{2n-1},A_{2n}A_1$．

当$n=2$时，凸四边形P的三角剖分图T没有偶弦，因此T的完美匹配只能用P的边，故$f(T)=2=F_2$．

当$n=3$时，凸六边形P的三角剖分图T至多有一条偶弦．若T没有偶弦，同上可知$f(T)=2$．若T含有偶弦，不妨设是A_1A_4，选用A_1A_4的完美匹配是唯一的，另两条边只能是A_2A_3,A_5A_6，此时$f(T)=3$．总之$f(T)\le 3=F_3$．

结论在$n=2,3$时成立．假设$n\ge 4$，且结论在小于n时均成立．考虑凸$2n$边形$P=A_1A_2\cdots A_{2n}$的一个三角剖分图T．若T没有偶弦，则同上可知$f(T)=2$．

对于偶弦e，记e两侧中P的顶点个数的较小值为$w(e)$．若T含有偶弦，取其中一条偶弦e使$w(e)$达到最小．设$w(e)=2k$，不妨设e为$A_{2n}A_{2k+1}$，则每个$A_i\ (i=1,2,\cdots,2k)$不能引出偶弦．

事实上，假设A_iA_j是偶弦，若$j\in\{2k+2,2k+3,\cdots,2n-1\}$，则$A_iA_j$与$e$在$P$的内部相交，矛盾．若$j\in\{1,2,\cdots,2k+1,2n\}$，则$w(A_iA_j)<2k$，与$w(e)$的最小性矛盾．

又由（*）知完美匹配中没有奇弦，故$A_1,A_2,\cdots,A_{2k}$只能与其相邻顶点配对，特别地，A_1只能与A_2或A_{2n}配对．下面分两种情况．

情形 1：选用边A_1A_2．则必须选用边$A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$．注意到$A_{2n}A_{2k+1}$的两侧分别有$2k,2n-2k-2$个顶点，$2n-2k-2\ge w(A_{2n}A_{2k+1})=2k$，而$n\ge 4$，因此

$2n-2k\geq 6$．在凸 $2n-2k$ 边形 $P_1=A_{2k+1}A_{2k+2}\cdots A_{2n}$ 上，T 的边给出了 P_1 的三角剖分图 T_1，在 T 中再选取 $n-k$ 条边 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$，与 $A_1A_2,A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$ 一起构成 T 的完美匹配，当且仅当 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$ 是 T_1 的完美匹配．故情形 1 中的 T 的完美匹配个数等于 $f(T_1)$．

……………20 分

情形 2：选用边 A_1A_{2n}．则必须选用边 $A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$．在凸 $2n-2k-2$ 边形 $P_2=A_{2k+2}A_{2k+3}\cdots A_{2n-1}$ 中构造如下的三角剖分图 T_2：对 $2k+2\leq i<j\leq 2n-1$，若线段 A_iA_j 是 T 的边，则也将其作为 T_2 的边，由于这些边在内部互不相交，因此可再适当地添加一些 P_2 的对角线，得到一个 P_2 的三角剖分图 T_2，它包含了 T 的所有在顶点 $A_{2k+2},A_{2k+3},\cdots,A_{2n-1}$ 之间的边．因此每个包含边 $A_{2n}A_1,A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$ 的 T 的完美匹配，其余的边必定是 T_2 的完美匹配．故情形 2 中的 T 的完美匹配个数不超过 $f(T_2)$．

由归纳假设得 $f(T_1)\leq F_{n-k}$，$f(T_2)\leq F_{n-k-1}$，结合上面两种情形以及 $k\geq 1$，有

$$f(T)\leq f(T_1)+f(T_2)\leq F_{n-k}+F_{n-k-1}=F_{n-k+1}\leq F_n.$$

……………40 分

下面说明等号可以成立．考虑凸 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的三角剖分图 Δ_n：添加对角线 $A_2A_{2n},A_{2n}A_3,A_3A_{2n-1},A_{2n-1}A_4,A_4A_{2n-2},\cdots,A_{n+3}A_n,A_nA_{n+2}$．重复前面的论证过程，$f(\Delta_2)=2$，$f(\Delta_3)=3$．对 Δ_n，$n\geq 4$，考虑偶弦 A_nA_3．情形 1，用 A_1A_2，由于在凸 $2n-2$ 边形 $A_3A_4\cdots A_{2n}$ 中的三角剖分图恰是 Δ_{n-1}，此时有 $f(\Delta_{n-1})$ 个 T 的完美匹配．情形 2，用 A_1A_{2n}，由于在凸 $2n-4$ 边形 $A_4A_5\cdots A_{2n-1}$ 中 T 的边恰构成三角剖分图 Δ_{n-2}，不用添加任何对角线，故这一情形下 T 的完美匹配个数恰为 $f(\Delta_{n-2})$ ．从而对 $n\geq 4$，有

$$f(\Delta_n)=f(\Delta_{n-1})+f(\Delta_{n-2}).$$

由数学归纳法即得 $f(\Delta_n)=F_n$．结论得证．

因此，对凸 20 边形 P，$f(T)$ 的最大值等于 $F_{10}=89$．

……………50 分