高 二 数 学

（试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟）

卷（I）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确。）

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2$，且$a_1=2$，那么$a_3=$

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

2. 函数$y=x+\cos x$的导数为

（A）$y'=1+\sin x$　　（B）$y'=1-\sin x$　　（C）$y'=x+\sin x$　　（D）$y'=x-\sin x$

3. 生物实验室有 5 只兔子，其中只有 3 只测量过某项指标. 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只，则恰有 2 只测量过该指标的概率为

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{2}{5}$　　（D）$\frac{1}{5}$

4. 函数$y=\sqrt{x}$在$x=1$处的瞬时变化率为

（A）2　　（B）1　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

5. 投掷一枚质地均匀的骰子两次，记事件A：两次的点数均为奇数，事件B：两次的点数之和为4，则$P(B|A)=$

（A）$\frac{1}{12}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{2}{9}$　　（D）$\frac{2}{3}$

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_1+a_2+a_3=9$，则$a_4+a_5+a_6$等于

（A）9　　（B）72　　（C）9或72　　（D）9或-72

7. 有甲、乙两个袋子，甲袋中有 2 个白球和 1 个红球，乙袋中有 2 个红球和 1 个白球，这 6 个球手感上不可区别. 现从甲袋中任取一球放入乙袋，搅匀后再从乙袋中任取一球，则取到红球的概率是

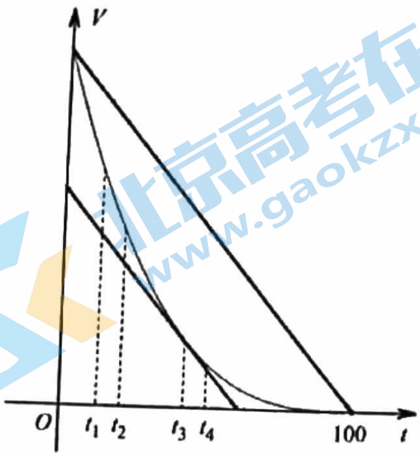
（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{7}{12}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{4}{7}$

8. 设$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，S_n为其前n项和，则“$d>0$”是“数列$\{S_n\}$为递增数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9. 某堆雪在融化过程中，其体积V（单位：m^3）与融化时间t（单位：h）近似满足函数关系：$V(t)=H(10-\frac{1}{10}t)^3$（$H$为常数），其图象如图所示. 记此堆雪从融化开始到结束的平均融化速度为$\bar{v}$（单位：m^3/h），则瞬时融化速度等于$\bar{v}$（单位：m^3/h）的时刻是图中的



(A) t_1　　(B) t_2　　(C) t_3　　(D) t_4

10. 已知常数$k\in(0,1)$，数列$\{a_n\}$满足$a_n=n\cdot k^n$（$n\in N^*$）. 现给出下列四个命题：

① 当$k=\frac{1}{2}$时，数列$\{a_n\}$为递减数列；

② 当$0<k<\frac{1}{2}$时，数列$\{a_n\}$为递减数列；

③ 当$\frac{1}{2}<k<1$时，数列$\{a_n\}$不一定有最大项；

④ 当$\frac{k}{1-k}$为正整数时，数列$\{a_n\}$必有两项相等的最大项.

其中正确命题的序号是

(A) ①②　　(B) ③④　　(C) ②③④　　(D) ②④

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。）

11. 已知随机变量X的分布列如下：

X	0	1	2
P	0.4	p	0.4

则$p=$______；$E(X)=$______.

12. 已知甲、乙两人投篮的命中率分别为0.5和0.8，且两人投篮相互没有影响. 若投进一球得 2 分，未进得 0 分，则每人投篮一次，得分相等的概率为______.

13. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p，各成员的支付方式相互独立. 设 X 为该群体的10位成员中使用移动支付的人数，$D(X)=2.4$，$P(X=4)<P(X=6)$，则 $p=$_____.

14. 德国数学家科拉茨 1937 年提出了一个著名的猜想：任给一个正整数 n，如果 n 是偶数，就将它减半（即 $\frac{n}{2}$）；如果 n 是奇数，则将它乘3加1（即 $3n+1$）. 不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到1.对于科拉茨猜想，目前既也不能证明，也不能否定. 现在请你研究：如果对正整数 n（首项） 按照上述规则施行变换后的第8项为1（注：1可以多次出现），则 n 的所有不同值的个数为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n（$S_n\neq 0$），T_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项之积，满足 $S_n+T_n=S_n\cdot T_n$（$n\in \mathbf{N}^*$）. 给出下列四个结论：

① $a_1=2$； ② $a_n=\dfrac{2}{n(2n-1)}$； ③ $\{T_n\}$ 为等差数列； ④ $S_n=\dfrac{n+1}{n}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本题共 2 个小题，共 25 分，需要写出详细的演算过程和推理过程。）

16.（本题满分 13 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=3$，$a_4=7$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $\{b_n-a_n\}$ 是公比为2 的等比数列，$b_1=3$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

17.（本小题满分 12 分）

某高校学生社团为了解“大数据时代”下大学生就业情况的满意情况，对 20 名学生进行问卷计分调查（满分100分），得到如图所示的茎叶图：

女生打分		男生打分
	5	5 3
9 8	6	2 5
8 9 0 6 5	7	1 0 3 4
7 2	8	6 1
6	9	

（Ⅰ）计算男生打分的平均分. 再观察茎叶图，设女生分数的方差为 s_1^2，男生分数的方差为 s_2^2，直接指出 s_1^2 与 s_2^2 的大小关系（结论不需要证明）；

（Ⅱ）从这 20 名学生中打分在 80 分以上的同学中随机抽取 3 人，求被抽到的女生人数 X 的分布列和数学期望.

高 二 数 学

卷（Ⅱ）

四、解答题（本题共 4 个小题，共 50 分，需要写出详细的演算过程和推理过程。）

18.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-2x+2$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率；

（Ⅱ）设 $g(x)=2x+\frac{k}{x}$，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线平行，求实数 k 的值；

（Ⅲ）求过点 $(2,f(2))$ 且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线方程.

19.（本题满分 13 分）

随着人民生活水平的提高，人们对牛奶品质要求越来越高. 某牛奶企业针对生产的鲜奶和酸奶，在一地区进行了质量满意调查. 现从消费者人群中随机抽取 500 人作为样本，得到下表（单位：人）

	老年人		中年人		青年人	
	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶
满意	100	120	120	100	150	120
不满意	50	30	30	50	50	80

（Ⅰ）从样本中任意取1人，求这个人恰好对生产的酸奶质量满意的概率；

（Ⅱ）从该地区青年人中随机选取3人，以频率估计概率，记这3人中对酸奶满意的人数为 X，求 X 的分布列与期望；

（Ⅲ）依据表中三个年龄段的数据，你认为哪一个消费群体鲜奶的满意度提升0.1，使得整体对鲜奶的满意度提升最大？（直接写出结果）

注：本题中的满意度是指消费群体中满意的人数与该消费群体总人数的比值.

20.（本题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2$（$n\in\mathbf{N}^*$），数列$\{b_n\}$的前n项和为A_n，且满足$b_1=a_1$，$b_{n+1}=A_n+1$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和T_n；

（Ⅲ）求使不等式$T_n>2023$成立的最小正整数n的值.

21.（本题满分 13 分）

数列$A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n$（$n\geq 2$）满足：$a_k<1$（$k=1,2,\cdots,n$）. 记A_n的前k项和为S_k，并规定$S_0=0$. 定义集合$E_n=\{k\in\mathbf{N}^*,k\leq n\,|\,S_k>S_j,j=0,1,\cdots,k-1\}$.

（Ⅰ）对数列$A_n:-0.3$，0.7，-0.1，0.9，0.1，求集合E_5；

（Ⅱ）若集合$E_n=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$（$m>1$，$k_1<k_2<\cdots<k_m$），证明：$S_{k_{i+1}}-S_{k_i}<$

（$i=1$，2，$\cdots$，$m-1$）；

（Ⅲ）给定正整数C，对所有满足$S_n>C$的数列A_n，求集合E_n的元素个数的最小值.

高二数学参考答案及评分标准

卷（I）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	B	C	C	D	B	D	C	D

二、填空题

题号	11	12	13	14	15
答案	0.2；1	0.5	0.6	6	①③④

三、解答题

16.（本题满分 13 分）

解：（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由题设，得$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 3, \\ a_4 = a_1 + 3d = 7, \end{cases}$

解得$a_1 = 1$，$d = 2$.

所以$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$.　　　………6 分

（II）因为$\{b_n - a_n\}$是公比为2的等比数列，且$b_1 = 3$，

所以$b_n - a_n = (b_1 - a_1)\cdot 2^{n-1} = 2^n$.

所以$b_n = a_n + 2^n = 2n-1+2^n$，

所以$S_n = \dfrac{n[1+(2n-1)]}{2} + \dfrac{2(1-2^n)}{1-2} = n^2 + 2^{n+1} - 2$　　　………13 分

17.（本小题满分 12 分）

解：（I）男生打的平均分为：

$\dfrac{1}{10}(55+53+62+65+71+70+73+74+86+81) = 69$，$s_1^2 < s_2^2$　　………5 分

（II）X 的取值范围是$\{1,2,3\}$

$P(X=1) = \dfrac{C_3^1C_2^2}{C_5^3} = \dfrac{3}{10}$，　$P(X=2) = \dfrac{C_3^2C_2^1}{C_5^3} = \dfrac{3}{5}$，　$P(X=3) = \dfrac{C_3^3C_2^0}{C_5^3} = \dfrac{1}{10}$，

所以X 的分布列为：

X	1	2	3

P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

所以 $E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$. ………12 分

卷（II）

四、解答题

18.（本题满分 12 分）

解：（I）$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2^3-2\times2+2-0^3+2\times0-2}{2-0}=2$ ………3 分

（II）$f'(x)=3x^2-2$，$g'(x)=2-\frac{k}{x^2}$.

由题意可知 $f'(1)=g'(1)$，所以 $3-2=2-k$，解得 $k=1$.

又当 $k=1$ 时，

曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线分别是 $y=x$，$y=x+2$ 它们相互平行，所以 $k=1$ 满足题意. ………6 分

（III）设切点为 $P(x_0,x_0^{\ 3}-2x_0+2)$，$f'(x_0)=3x_0^{\ 2}-2$，

所以所求切线为 $y-x_0^{\ 3}+2x_0-2=(3x_0^{\ 2}-2)(x-x_0)$，

因为此切线过点 $(2,f(2))$，即过点 $(2,6)$，

所以 $6-x_0^{\ 3}+2x_0-2=(3x_0^{\ 2}-2)(2-x_0)$，

所以 $x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 2}+4=0$，

即 $(x_0-2)^2(x_0+1)=0$，

所以 $x_0=2$ 或 $x_0=-1$.

当 $x_0=2$ 时，所求切线为 $y=10x-14$，

当 $x_0=-1$ 时，所求切线为 $y=x+4$，

综合上述，所求切线为 $y=10x-14$ 或 $y=x+4$. ………12 分

19.（本题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设这个人恰好对生产的酸奶满意人数事件为 A.

样本总人数为 500 人，其中对酸奶满意人数为 $100+120+150=370$ 人，

所以 $P(A)=\frac{370}{500}=\frac{37}{50}$.　　　　………3 分

（Ⅱ）用样本频率估计总体概率，青年人对酸奶满意的概率 $p=\frac{150}{150+50}=\frac{3}{4}$，

X 的取值范围为 $\{0,1,2,3\}$，则

$P(X=0)=C_3^0(\frac{3}{4})^0(1-\frac{3}{4})^3=\frac{1}{64}$，$P(X=1)=C_3^1(\frac{3}{4})^1(1-\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$，

$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{4})^2(1-\frac{3}{4})^1=\frac{27}{64}$，$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{4})^3(1-\frac{3}{4})^0=\frac{27}{64}$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

X 的期望是 $E(X)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{9}{64}+2\times\frac{27}{64}+3\times\frac{27}{64}=\frac{9}{4}$.　　　　………10 分

（Ⅲ）青年人.　　　　………13 分

20.（本题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由已知 $S_n=n^2$，得 $a_1=S_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

所以 $a_n=2n-1$.

所以 $b_1=a_1=1$.

由已知 $b_{n+1}=A_n+1$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$b_n=A_{n-1}+1$，

两式相减可得 $b_{n+1}=2b_n$（$n\geq 2$）.

又因为 $b_2=A_1+1=2=2b_1$，

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$（$n\geq 1$），

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，

所以$b_n=2^{n-1}$. ………4 分

（Ⅱ）设数列$\{a_nb_n\}$的前n项和为T_n，

则$T_n=1\times1+3\times2+5\times2^2+\ldots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$，

$2T_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\ldots+(2n-1)\cdot2^n$，

两式相减得$-T_n=1\times1+2\times2+2\times2^2+\ldots+2\times2^{n-1}-(2n-1)\cdot2^n$

$=1+2(2+2^2+\ldots+2^{n-1})-(2n-1)\cdot2^n$

$=1+4(2^{n-1}-1)-(2n-1)\cdot2^n$

$=-(2n-3)\cdot2^n-3$

所以$T_n=(2n-3)2^n+3$. ………8 分

（Ⅲ）由$T_n=(2n-3)2^n+3$，

因为$T_7=11\times2^7+3=11\times128+3<2023$，$T_8=13\times256+3>2023$，

又因为$T_{n+1}-T_n=(2n-1)2^{n+1}+3-(2n-3)2^n-3=(2n+1)\cdot2^n>0$，

所以数列$\{T_n\}$是递增数列，

所以当$n<8$时，$T_n<2023$，

所以使$T_n>2023$的最小正整数$n=8$. ………12 分

21.（本题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为$S_0=0$，$S_1=-0.3$，$S_2=0.4$，$S_3=0.3$，$S_4=1.2$，$S_5=1.3$，

所以$E_5=\{2,4,5\}$. ………3 分

（Ⅱ）由集合E_n的定义知$S_{k_{i+1}}>S_{k_i}$，且k_{i+1}是使得$S_k>S_{k_i}$成立的最小的k，

所以$S_{k_{i+1}-1}\le S_{k_i}$.

又因为 $a_{k_{i+1}}<1$，所以$S_{k_{i+1}}=S_{k_{i+1}-1}+a_{k_{i+1}}<S_{k_i}+1$.所以$S_{k_{i+1}}-S_{k_i}<1$. ………6 分

（III）因为$S_n > S_0$，所以E_n非空.

设集合$E_n=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$，不妨设$k_1<k_2<\cdots<k_m$，

则由（II）可知$S_{k_{i+1}}-S_{k_i}<1\left(i=1,2,\cdots,m-1\right)$，

同理$S_{k_1}-S_0<1$，且$S_n\le S_{k_m}$.

$$S_n=\left(S_n-S_{k_m}\right)+\left(S_{k_m}-S_{k_{m-1}}\right)+\cdots+\left(S_{k_2}-S_{k_1}\right)+\left(S_{k_1}-S_0\right)$$
$$<0+\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{m\text{个}1}=m.$$

因为$S_n>C$，所以E_n的元素个数$m\ge C+1$.

取常数数列A_n：$a_i=\dfrac{C+1}{C+2}\left(i=1,2,\cdots,C+1\right)$，并令$n=C+1$，

则$S_n=\dfrac{(C+1)^2}{C+2}=\dfrac{C^2+2C+1}{C+2}>C$，适合题意，且$E_n=\{1,2,\cdots,C+1\}$，其元素个数恰为$C+1$.

综上，E_n的元素个数的最小值为$C+1$.　　　　　　　　………13 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。