北京师范大学附属实验中学

2019-2020 学年度第一学期高三月考数学试卷（191202）

试卷说明：
1. 本试卷考试时间为 120 分钟；
2. 本试卷共 3 个大题，共 22 个小题，满分 150 分.

一、选择题：本题共 10 题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x^2-2x<0\}$，$B=\{x|x-1\geq 0\}$，那么 $A\cap \complement_U B=$（　　）

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|x<0\}$　　C. $\{x|x>2\}$　　D. $\{x|1<x<2\}$

2. “$x<1$” 是 “$\log_{\frac{1}{2}} x>0$” 的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3.函数 $y=2^{-|x|}$ 的单调递增区间为（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

4.$\triangle ABC$ 的两个顶点为 $A(-4,0)$，$B(4,0)$，$\triangle ABC$ 周长为 18，则 C 点轨迹方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\ (y\neq 0)$　　B. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1\ (y\neq 0)$

C. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\ (y\neq 0)$　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1\ (y\neq 0)$

5.已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\angle ABC$ 等于（　　）

A. 120°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

6.若圆 C 经过 $(1,0)$，$(3,0)$ 两点，且与 y 轴相切，则圆 C 的方程为（　　）

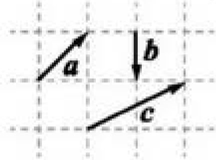
A. $(x-2)^2+(y\pm 2)^2=3$　　B. $(x-2)^2+(y\pm\sqrt{3})^2=3$

C. $(x-2)^2+(y\pm 2)^2=4$　　D. $(x-2)^2+(y\pm\sqrt{3})^2=4$

7.向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示. 若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则实数 $\lambda=$（　）

A. -2　　B. 2

C. 1　　D. -1



8.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 若 $a_7>0, a_8<0$，则下列结论正确的是（　）

A. $S_7<S_8$　　B. $S_{15}<S_{16}$　　C. $S_{13}>0$　　D. $S_{15}>0$

9.在△ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，如果 a，b，c 成等差数列，$B=30°$，△ABC 的面积为 $\frac{3}{2}$，则 b 为（　）

A. $1+\sqrt{3}$　　B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　C. $2+\sqrt{3}$　　D. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

10.若 $a>1$，设函数 $f(x)=a^x+x-4$ 的零点为 m，$g(x)=\log_a x+x-4$ 的零点为 n，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的取值范围是（　）

A. $(\frac{7}{2},+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(4,+\infty)$　　D. $(\frac{9}{2},+\infty)$

二、填空题：本题共 6 题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是互相垂直的单位向量，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直，则实数 $\lambda=$____.

12. 已知点 $A(-2,0)$，$B(0,2)$，若点 C 是圆 $x^2-2x+y^2=0$ 上的动点，则△ABC 面积的最大值是____.

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=4$，公比为 q，前 n 项和为 S_n，若数列 $\{S_n+2\}$ 也是等比数列，则 $q=$____.

14. 若圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 上存在两点关于直线 $ax+by-2=0(a>0,\ b>0)$ 对称，则 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}$ 的最小值为____.

15. 已知点$A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{4},1\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, 若三个点中有且仅有两个点在函数$f(x)=\sin\omega x$的图象上, 则正数$\omega$的最小值为____.

16. 已知双曲线C:$\frac{x^2}{2}-y^2=1$, 点M的坐标为$(0,1)$. 设P是双曲线C上的点, Q是点P关于原点的对称点. 记$\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$, 则$\lambda$的取值范围是____.

三、解答题：本题共 6 个小题，共 80 分.

17.（13 分）已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$, $\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3})$, $x\in[0,\pi]$.

（Ⅰ）若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 求$x$的值;

（Ⅱ）记$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 求$f(x)$的最大值和最小值以及对应的$x$的值.

18.（13 分）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_4+2=b_3$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）如果$a_m=b_n\ (n\in \mathrm{N}^*)$，写出$m,n$的关系式$m=f(n)$，并求$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$

19.（13 分）已知点 $C(4,0)$，点 A、B 是圆 O：$x^2+y^2=20$ 上任意两个不同点，

且满足$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，点 P 是弦 AB 的中点.

（Ⅰ）求点 P 的轨迹Γ方程；

（Ⅱ）已知直线 l_1:$y=\sqrt{3}x$，l_2:$y=kx-1$，若 l_1，l_2 被Γ所截得的线段长之比为$\sqrt{3}$：1，求 k 的值.

20.（13 分）设函数 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot e^{-x}(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=x^2-x-1$，若对任意的 $t\in[0,2]$，存在 $s\in[0,2]$，使得 $f(s)\geq g(t)$ 成立，求 a 的取值范围.

21.（14 分）已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过椭圆 G 右焦点 F 的直线 $m:x=1$ 与椭圆 G 交于点 M（点 M 在第一象限）.

（Ⅰ）求椭圆 G 的方程；

（Ⅱ）已知 A 为椭圆 G 的左顶点，平行于 AM 的直线 l 与椭圆相交于 B,C 两点. 判断直线 MB,MC 是否关于直线 m 对称，并说明理由.

22.（14 分）对于由有限个自然数组成的集合 A，定义集合 $S(A)=\{a+b|\ a\in A,b\in A\}$，记集合 $S(A)$ 的元素个数为 $d(S(A))$．定义变换 T，变换 T 将集合 A 变换为集合 $T(A)=A\cup S(A)$．

（Ⅰ）若 $A=\{0,1,2\}$，求 $S(A),T(A)$；

（Ⅱ）若集合 A 有 n 个元素，证明："$d(S(A))=2n-1$" 的充要条件是 "集合 A 中的所有元素能组成公差不为 0 的等差数列"；

（Ⅲ）若 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 且 $\{1,2,3,\cdots,25,26\}\subseteq T(T(A))$，求元素个数最少的集合 A．

北京师范大学附属实验中学

2019-2020 学年度第一学期高三月考数学试卷（191202）

参考答案

一、选择题（共 10 题，每题 4 分，共 40 分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	A	C	D	D	B	C	A	B

二、填空题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

11. -2　　12. $3+\sqrt{2}$　　13. 3

14. 16　　15. 4　　16. $(-\infty,\ -1]$

三、解答题（共 6 题）

17.（三角函数 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{a}=(cosx,sinx)$，$\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3})$，$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，

所以$-\sqrt{3}cosx=3sinx$. ……………………………………2

若$cosx=0$，则$sinx=0$，与$sin^2x+cos^2x=1$矛盾，故$cosx\neq 0$. ……………………………

3

则$tanx=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　又$x\in[0,\pi]$，所以$x=\frac{5\pi}{6}$. ……………………………………5

（Ⅱ）$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3cosx-\sqrt{3}sinx=2\sqrt{3}sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ ……………………………………

6

$0\le x\le\pi$　　$\frac{2\pi}{3}\le x+\frac{2\pi}{3}\le\frac{5\pi}{3}$……………………………………8

$-1\le sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$……………………………………9

当$x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即$x=0$时，$f(x)$取得最大值 3；

当$x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即$x=\frac{5\pi}{6}$时，$f(x)$取得最小值$-2\sqrt{3}$. ……………………………………13

18.（数列 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

则$\begin{cases}1+d=q\\1+3d+2=q^2\end{cases}$，……………………………………………2

解得$\begin{cases}d=2\\q=3\end{cases}$或$\begin{cases}d=-1\\q=0\end{cases}$（舍）……………………………………………4

则 $a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$．……………………………………………6

（Ⅱ）因为 $a_m=b_n$，所以 $2m-1=3^{n-1}$，即 $m=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$ ……………………………………………7

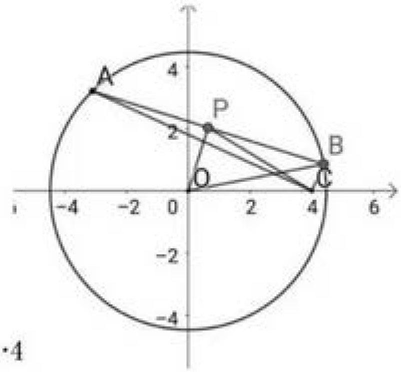
则 $f(1)+f(2)+\cdots f(n)=\frac{1}{2}(3^0+1+3^1+1+\cdots+3^{n-1}+1)$

$=\frac{1}{2}(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1}+n)$ ……………………………………………9

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-3^n}{1-3}+n\right)$……………………………………………11

$=\frac{3^n+2n-1}{4}$ ……………………………………………13

19.（直线与圆 13 分）



解：（Ⅰ）设点 P 坐标为(x,y)

因为 P 为弦 AB 的中点，则 OP⊥AB

因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 AC⊥BC，

所以 $OP^2+PC^2=OB^2$……………………………………………2

即$(x^2+y^2)+[(x-4)^2+y^2]=20$……………………………………………4

整理得$(x-2)^2+y^2=6$

点 P 的轨迹Γ是以点（2, 0）为圆心，半径长为$\sqrt{6}$的圆，

方程为$(x-2)^2+y^2=6$……………………………………………6

（Ⅱ）Γ的圆心（2, 0）到 l_1 距离 $d_1=\sqrt{3}$

Γ被 l_1 截得的弦长为$2\sqrt{r^2-{d_1}^2}=2\sqrt{3}$……………………………………………8

Γ的圆心（2, 0）到 l_2 距离 $d_2=\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$

Γ被 l_2 截得的弦长为$2\sqrt{r^2-{d_2}^2}=2\sqrt{6-\frac{(2k-1)^2}{k^2+1}}$……………………………………………10

由题可知$2\sqrt{3}=\sqrt{3}\times2\sqrt{6-\frac{(2k-1)^2}{k^2+1}}$

解得$k=-2$……………………………………………13

20.（导数 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，因为$f(x)=x^2e^{-x}$，

所以$f'(x)=(-x^2+2x)e^{-x}$，$f'(1)=\dfrac{1}{e}$． ……………………2 分

又因为 $f(1)=\dfrac{1}{e}$， 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$y-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}(x-1)$，即 $y=\dfrac{1}{e}x$． ……………………4 分

（Ⅱ）“对任意的$t\in[0,2]$，存在$s\in[0,2]$使得$f(s)\ge g(t)$成立”

等价于“在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)$ 的最大值大于或等于 $g(x)$ 的最大值”．………5 分

因为 $g(x)=x^2-x-1=(x-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{5}{4}$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(2)=1$． ……………………………………6 分

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax-a)e^{-x}$

$=-e^{-x}[x^2+(a-2)x-2a]=-e^{-x}(x-2)(x+a)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$ 或 $x=-a$．

① 当$a\ge 0$时，$f'(x)\ge 0$在 $[0,2]$ 上恒成立，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上为单调递增函数，

$f(x)$ 的最大值为$f(2)=(4+a)\frac{1}{e^2}$，

由$(4+a)\frac{1}{e^2}\ge 1$，得$a\ge e^2-4$． ……………………………………8 分

② 当 $0<-a<2$，即 $-2<a<0$时，

当 $x\in(0,-a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为单调递减函数，

当 $x\in(-a,2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为单调递增函数．

所以 $f(x)$ 的最大值为$f(2)=(4+a)\frac{1}{e^2}$或 $f(0)=-a$，

由$-a\ge 1$，得$a\le -1$；由$(4+a)\frac{1}{e^2}\ge 1$，得$a\ge e^2-4$．

又因为 $-2<a<0$，所以$-2<a\le 1$． ……………………………………10 分

③ 当$-a\ge 2$，即$a\le -2$时，

$f'(x)\le 0$在 $[0,2]$ 上恒成立，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上为单调递减函数，

$f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-a$，

由$-a \geq 1$，得$a \leq -1$，又因为$a \leq -2$，所以$a \leq -2$. ……………………12 分

综上所述，实数 a 的值范围是$a \leq -1$或$a \geq e^2 - 4$. ……………………13 分

21.（椭圆 14 分）

（Ⅰ）由题意得 $c=1$ ……………………1 分

由$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$可得 $a=2$, ……………………2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$, ……………………3 分

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………4 分

（Ⅱ）对称； ……………………5 分

由题意可得点 A（-2, 0），M（1，$\frac{3}{2}$），

所以由题意可设直线$l: y=\frac{1}{2}x+n, n \neq 1$. ……………………7 分

设 B（x_1，y_1），C（x_2，y_2），

由$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \\ y=\frac{1}{2}x+n \end{cases}$得$x^2+nx+n^2-3=0$.

由题意可得$\Delta= n^2-4(n^2-3)=12-3n^2>0$, $n \in (-2,2)$且$n \neq$

1. ……………………8 分

$x_1+x_2=-n$, $x_1x_2=n^2-3$. ……………………9 分

因为k_{AB} + 可 $k_{MC}=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$ ……………………10 分

$=\frac{\frac{1}{2}x_1+n-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{\frac{1}{2}x_2+n-\frac{3}{2}}{x_2-1}=1+\frac{n-1}{x_1-1}+\frac{n-1}{x_2-1}$

$=1+\frac{(n-1)(x_1+x_2-2)}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=1-\frac{(n-1)(n+2)}{n^2+n-2}=0$

所以直线 AB、MC 关于直线 m 对称. ……………………14 分

22.（14 分）

（Ⅰ）若集合$A=\{0,1,2\}$，则$S(A)=T(A)=\{0,1,2,3,4\}$. ……………………3 分

（II）令 $A=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$. 不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

充分性：设 $\{x_k\}$ 是公差为 d $(d\neq 0)$ 的等差数列.

则 $x_i+x_j=x_1+(i-1)d+x_1+(j-1)d=2x_1+(i+j-2)d$ $(1\leq i,j\leq n)$

且 $2\leq i+j\leq 2n$. 所以 x_i+x_j 共有 $2n-1$ 个不同的值. 即 $d(S(A))=2n-1$.

必要性：若 $d(S(A))=2n-1$.

因为 $2x_i<x_i+x_{i+1}<2x_{i+1}$，$(i=1,2,\cdots,n-1)$. 所以 $S(A)$ 中有 $2n-1$ 个不同的元素：

$2x_1,2x_2,\cdots,2x_n,x_1+x_2,x_2+x_3,\cdots,x_{n-1}+x_n$.

任意 x_i+x_j（$1\leq i,j\leq n$）的值都与上述某一项相等.

又 $x_i+x_{i+1}<x_i+x_{i+2}<x_{i+1}+x_{i+2}$，且 $x_i+x_{i+1}<2x_{i+1}<x_{i+1}+x_{i+2}$，$i=1,2,\cdots,n-2$.

所以 $x_i+x_{i+2}=2x_{i+1}$，所以 $\{x_k\}$ 是等差数列，且公差不为 0. ………………………………… 8 分

（III）首先证明：$1\in A$.

假设 $1\notin A$，A 中的元素均大于1，从而 $1\notin S(A)$，因此 $1\notin T(A)$，

$1\notin S(T(A))$，故 $1\notin T(T(A))$，与 $\{1,2,3,...,25,26\}\subseteq T(T(A))$ 矛盾，因此 $1\in A$.

设 A 的元素个数为 n，$S(A)$ 的元素个数至多为 C_n^2+n，

从而 $T(A)$ 的元素个数至多为 $C_n^2+n+n=\frac{n(n+3)}{2}$.

若 $n=2$，则 $T(A)$ 元素个数至多为5，从而 $T(T(A))$ 的元素个数至多为 $\frac{5\times 8}{2}=20$，

而 $T(T(A))$ 中元素至少为 26，因此 $n\geq 3$.

假设 A 有三个元素，设 $A=\{1,a_2,a_3\}$，且 $1<a_2<a_3\leq 8$，

则 $1,2,a_2,a_2+1,a_3,a_3+1,2a_2,a_2+a_3,2a_3\in T(A)$，

从而$1,2,3,4\in T(T(A))$. 若$a_2>5$，$T(T(A))$中比 4 大的最小数为a_2，则$5\notin T(T(A))$，

与题意矛盾，故$a_2\le 5$.

集合$T(T(A))$中最大数为$4a_3$，由于$26\in T(T(A))$，故$4a_3\ge 26$，从而$a_3\ge 7$.

(i)若$A=\{1,a_2,7\}$且$a_2\le 5$. 此时，$1,2,a_2,a_2+1,7,8,2a_2,7+a_2,14\in T(A)$，

则有$8+14=22,2\times 14=28\in T(T(A))$，

在 22 与 28 之间可能的数为 $14+2a_2,21+a_2$.

此时 23, 24, 25, 26 不能全在$T(T(A))$中，不满足题意.

(ii)若$A=\{1,a_2,8\}$且$a_2\le 5$. 此时，$1,2,a_2,a_2+1,8,9,2a_2,8+a_2,16\in T(A)$，

则有$16+9=25\in T(T(A))$，

若$26\in T(T(A))$，则$16+2a_2=26$或$16+(8+a_2)=26$，

解得$a_2=5$或$a_2=2$.

当$A=\{1,2,8\}$时，$15,21,22,23\notin T(T(A))$，不满足题意.

当$A=\{1,5,8\}$时，

$T(T(A))=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,29,32\}$，

满足题意.

故元素个数最少的集合A为$\{1,5,8\}$　　　　　…………………………14分