天一大联考

2022—2023 学年广东高三年级模拟考试(二)

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查复数的运算和基本概念.

解析 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,由题意,$(a+bi)^2+5=2a+2bi$,则有 $\begin{cases}a^2-b^2+5=2a,\\2ab=2b,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

2. 答案 A

命题意图 本题考查奇函数的概念.

解析 对于 A,$f(x)+f(-x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}+\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{2^x-1+1-2^x}{2^x+1}=0$,满足条件,其他均不满足条件.

3. 答案 D

命题意图 本题考查集合中非空子集的求法.

解析 由题意,集合 $A\cup B$ 中有无数个元素,故集合 $A\cup B$ 有无数个非空子集,集合 $A\cap B$ 中有 2 个元素(易知直线与圆相交),故集合 $A\cap B$ 有 $2^2-1=3$ 个非空子集.

4. 答案 B

命题意图 本题考查圆台的相关性质.

解析 设沙漏下半部分的圆锥的容积为 V,沙子堆成的圆台体积为 V_1,该圆锥内沙子上方的剩余空间体积为 $V_2=V-V_1$. 由题意可知 $\dfrac{V_1}{2V}=\dfrac{7}{16}$,即 $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{7}{8}$,则 $\dfrac{V_2}{V}=\dfrac{1}{8}$,则剩余空间的高为圆锥高的一半,即沙子堆成的圆台的高为圆锥高的一半,即圆台的高为 $\dfrac{3}{2}$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查辅助角公式和诱导公式.

解析 由题可知 $\dfrac{1}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=-1$,$\therefore\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$,$\therefore\alpha-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\alpha=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,$\cos(\pi-2\alpha)=-\cos2\alpha=-\cos\left(4k\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$.

6. 答案 A

命题意图 本题考查数列的单调性.

解析 设 $\dfrac{a_n+n}{2^n}=k$(k 为常数),$\therefore a_n=k\cdot2^n-n$,$\because a_n>0$,$\therefore k>\dfrac{n}{2^n}$,易得 $k>\dfrac{1}{2}$. $a_n-a_{n-1}=k\cdot2^n-n-k\cdot2^{n-1}+n-1=k\cdot2^{n-1}-1>\dfrac{1}{2}\times2^1-1=0(n\geqslant2)$,$\therefore a_n-a_{n-1}>0$,数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

7. 答案 B

命题意图 本题考查构造函数比较大小.

解析 令 $h(x)=\frac{3}{2}x-\tan x$，则 $h'(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}-\tan^2 x$，易知当 $x\in(0,0.01)$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,0.01)$ 上单调递增，$h(0.01)>h(0)=0$，$\therefore 0.015>\tan 0.01$，即 $c>a$. 易知 $\tan x>x>\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，令 $l(x)=x^2+\cos x-1$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $l'(x)=2x-\sin x>x-\sin x>0$，$\therefore l(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$l(0.01)>l(0)=0$，$\therefore 0.01^2>1-\cos 0.01$，$\therefore \tan 0.01>0.01>\sqrt{1-\cos 0.01}$，即 $a>b$. 综上可得 $c>a>b$.

8. **答案** D

命题意图 本题考查求双曲线的离心率.

解析 由题意知 $AF_1\perp AF_2$，$3|AF_2|=|F_2B|$，且 A,B 都在双曲线的右支上. 设 $|AF_2|=x$，则 $|AF_1|=2a+x$，$|F_2B|=3x$，$|F_1B|=2a+3x$. 在 Rt$\triangle F_1AB$ 中，$(3x+2a)^2=(4x)^2+(x+2a)^2$，得 $x=a$，在 Rt$\triangle AF_1F_2$ 中，$4c^2=(3a)^2+a^2$，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案** ACD

命题意图 本题考查正四棱锥的相关性质.

解析 设正方形 $ABCD$ 的中心为 O.

对于 A，$PA=\sqrt{PO^2+OA^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，故 A 正确；

对于 B，易知 $\angle PAO$ 为所求角，由选项 A 知，$\sin\angle PAO=\frac{PO}{PA}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 B 错误；

对于 C，取 AB 的中点 H，则 $\angle PHO$ 为所求角，$\tan\angle PHO=2$，故 C 正确；

对于 D，$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PO=\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$，故 D 正确.

10. **答案** BD

命题意图 本题考查三角函数的相关性质.

解析 对于 A，$\because$ 曲线 $y=\sin(2x+\varphi)$ 关于 y 轴对称，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 A 错误；

对于 B，易知最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 正确；

对于 C，$f(x)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，故 C 错误；

对于 D，当 k 为奇数时，$f(x)=-\cos 2x-\sin 2x=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，当 k 为偶数时，$f(x)=\cos 2x-\sin 2x=-\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\therefore$ 无论 k 为奇数还是偶数，$f(x)$ 均单调递减，故 D 正确.

11. **答案** CD

命题意图 本题考查随机变量的分布列与数学期望.

解析 由已知得 $\begin{cases}\frac{2-a}{3}>0,\\ \frac{a}{3}>0,\end{cases}$ 且 $\begin{cases}\frac{1-a}{2}>0,\\ \frac{a}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<1$.

对于 A,因为 X,Y 的取值互不影响,所以 $P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)=\frac{1}{4}$,所以 $P(X=1)=\frac{1}{2}=\frac{a}{3}$,所以 $a=\frac{3}{2}$,不符合条件,故 A 错误;

对于 B,$EX=-\frac{1}{3}+\frac{a}{3}=\frac{a-1}{3}$,$EY=\frac{1-a}{2}+2\times\frac{a}{2}=\frac{a+1}{2}$,$EY-EX=\frac{5+a}{6}<1$,故 B 错误;

对于 C,设 $Y\sim B(2,p)$,则 $(1-p)^2=\frac{1}{2}$,得 $p=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,再由 $\frac{a}{2}=p^2$,可得 $a=3-2\sqrt{2}$,故 C 正确;

对于 D,$P(X+Y=-1)=\frac{1}{6}$,$P(X+Y=0)=\frac{3-2a}{6}$,$P(X+Y=1)=\frac{a^2-a+2}{6}$,$P(X+Y=2)=\frac{-2a^2+3a}{6}$,$P(X+Y=3)=\frac{a^2}{6}$,所以 $E(X+Y)=\frac{5a+1}{6}$,又 $EX+EY=\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}=\frac{5a+1}{6}$,所以 $E(X+Y)=EX+EY$,故 D 正确.

12. **答案** ABC

命题意图 本题考查抛物线的综合性质.

解析 对于 A,$p=2$ 时,$C:y^2=4x$,$k_{DM}=\frac{y_0}{x_0+1}=\frac{y_0}{\frac{y_0^2}{4}+1}=\frac{4}{y_0+\frac{4}{y_0}}$,由题可知 $y_0>2$,$\therefore k_{DM}\in(0,1)$,故 A 正确;

对于 B,$\tan\angle MNF=\frac{|y_0|}{\left|2x_0+\frac{p}{2}-x_0\right|}=\frac{|y_0|}{\left|x_0+\frac{p}{2}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,又 $x_0+\frac{p}{2}=|MF|$,$\therefore \sin\angle MFN=\frac{|y_0|}{|MF|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 B 正确;

对于 C,设直线 MF 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$,$P(x_1,y_1)$,联立 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2pmy-p^2=0$,则 $y_1+y_0=2pm$,$y_1y_0=-p^2$,$S_{\triangle OMP}=\frac{1}{2}|y_1-y_0|\cdot\frac{p}{2}=\sqrt{4p^2m^2+4p^2}\times\frac{p}{4}=\frac{p^2}{2}\sqrt{1+m^2}\geqslant\frac{p^2}{2}$,当 $m=0$ 时取等号,又 $\because m\neq0$,$\therefore S_{\triangle OMP}>\frac{p^2}{2}$,故 C 正确;

对于 D,设 $A(x_2,y_2)$,$B(x_3,y_3)$,$k_{AB}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{y_2-y_3}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_3^2}{2p}}=\frac{2p}{y_2+y_3}$,设直线 MA 的方程为 $x=ty+n$,联立 $\begin{cases}x=ty+n,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 可得 $y^2-2pty-2pn=0$,则 $y_0+y_2=2pt$,同理 $y_0+y_3=-2pt$,$\therefore y_2+y_3=2pt-y_0+(-2pt-y_0)=-2y_0$,$\therefore k_{AB}=\frac{2p}{-2y_0}=-\frac{p}{y_0}$,当且仅当 $p=y_0$ 时,$k_{AB}=-1$,而当 $y_0=p$ 时,$x_0=\frac{p}{2}$,不满足题意,$\therefore k_{AB}\neq-1$,故 D 错误.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $3x-y+2=0$

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 $y'=(2e^{2x}+e^x)\cos x+(-\sin x)(e^{2x}+e^x)$,$\therefore y'|_{x=0}=3$,又因为 $x=0$ 时 $y=2$,故切线方程为 $y-2=3x$,即 $3x-y+2=0$.

14. 答案　10

命题意图　本题考查二项式定理的应用.

解析　$(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(\sqrt{x})^r=2^{5-r}C_5^r x^{5-\frac{r}{2}}$，令 $5-\frac{r}{2}=3$，得 $r=4$，则 x^3 的系数为 $2C_5^4=10$.

15. 答案　$\frac{7+2\sqrt{10}}{2}$

命题意图　本题考查基本不等式.

解析　由题意 $a+1+2b=2$，则 $\frac{5}{a+1}+\frac{1}{b}=\frac{5}{a+1}+\frac{2}{2b}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{a+1}+\frac{2}{2b}\right)(a+1+2b)=\frac{1}{2}\times\left[7+\frac{5\times 2b}{a+1}+\frac{2(a+1)}{2b}\right]\geqslant\frac{1}{2}\times(7+2\sqrt{10})$，当且仅当 $\begin{cases}a=\frac{7-2\sqrt{10}}{3},\\ b=\frac{\sqrt{10}-2}{3}\end{cases}$ 时取等号，故 $\frac{5}{a+1}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{7+2\sqrt{10}}{2}$.

16. 答案　$\frac{7}{3}$

命题意图　本题考查三角换元求最值.

解析　易知点 M 的轨迹方程为 $x^2+(y-2)^2=1$，设 $M(x,y)$，则 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta+2\end{cases}$（$\theta$ 为参数且 $\theta\in[0,2\pi)$），

$\therefore\left(\frac{|MA|}{|MO|}\right)^2=\frac{(\cos\theta+2)^2+(\sin\theta+2)^2}{\cos^2\theta+(\sin\theta+2)^2}=\frac{9+4(\sin\theta+\cos\theta)}{5+4\sin\theta}$. 当 $\theta=\pi$ 时，$\left(\frac{|MA|}{|MO|}\right)^2=\frac{9-4}{5}=1$，当 $\theta\neq\pi$ 时，

$\begin{cases}\sin\theta=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\\ \cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\end{cases}$ 令 $\tan\frac{\theta}{2}=t\ (t\in\mathbf{R})$，$\therefore\begin{cases}\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\\ \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\end{cases}$ $\therefore\left(\frac{|MA|}{|MO|}\right)^2=$

$\frac{9(1+t^2)+4(2t+1-t^2)}{5(1+t^2)+8t}=\frac{5t^2+8t+13}{5t^2+8t+5}=1+\frac{8}{5t^2+8t+5}\leqslant1+\frac{40}{9}\left(t=-\frac{4}{5}\text{时取等号}\right)$，即 $\left(\frac{|MA|}{|MO|}\right)^2\leqslant\frac{49}{9}$，故 $\frac{|MA|}{|MO|}$ 的最大值为 $\frac{7}{3}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查等差、等比数列的通项和性质.

解析　（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，易知 $q\neq\pm1$. ……………………………………（1 分）

由题意可得 $\begin{cases}a_1q^4-a_1=2\frac{a_1(1-q^4)}{1-q},\\ a_1q\cdot a_1q^2=a_1q^3,\end{cases}$ ……………………………………（3 分）

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ q=3.\end{cases}$ ……………………………………（4 分）

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$. ……………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题可知 $b_m=\dfrac{a_{m+1}-a_m}{m+1}=\dfrac{3^m-3^{m-1}}{m+1}=\dfrac{2\times3^{m-1}}{m+1}$. ……………………………………………………（6 分）

因为 $b_{m+1}-b_m=\dfrac{2\times3^m}{m+2}-\dfrac{2\times3^{m-1}}{m+1}=\dfrac{(4m+2)\times3^{m-1}}{(m+1)(m+2)}>0$,

故 $\{b_m\}$ 是递增数列, ……………………………………………………………………………………（7 分）

又因为 $b_5=\dfrac{2\times3^4}{6}=27<50$, $b_6=\dfrac{2\times3^5}{7}=\dfrac{486}{7}>50$, ……………………………………………………（9 分）

故满足条件的 m 的最小值为 6. ………………………………………………………………………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 （Ⅰ）由条件可得$\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{b}{2c}$,整理可得 $2(c\cos A+a\cos C)=ab$, ……………………（1 分）

由正弦定理可得 $2(\sin C\cos A+\sin A\cos C)=a\sin B$, ……………………………………………………（3 分）

即 $2\sin(C+A)=a\sin B$. ……………………………………………………………………………………（4 分）

又因为 $A+B+C=\pi$,所以 $2\sin B=a\sin B$, ………………………………………………………………（5 分）

因为 $B\in(0,\pi)$, $\sin B\neq0$,所以 $a=2$. ……………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）**方法一**:由已知得△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times a\times AP=\sqrt{3}$,所以 $bc=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin A}$. …………（8 分）

由余弦定理及基本不等式可得 $2^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant2bc(1-\cos A)$, ……………………………（9 分）

所以 $bc(1-\cos A)\leqslant2$,即$\dfrac{2\sqrt{3}(1-\cos A)}{\sin A}\leqslant2$,所以$\dfrac{2\sqrt{3}\times2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\leqslant2$,即 $\tan\dfrac{A}{2}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……（10 分）

又因为 $A\in(0,\pi)$,所以$\dfrac{A}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{6}$,所以 A 的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………（12 分）

方法二:设 $\angle BAP=\theta_1$, $\angle CAP=\theta_2$, $BP=x$, $CP=2-x$, ……………………………………………（7 分）

则 $\tan A=\tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2}=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2-x}{\sqrt{3}}}{1-\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2-x}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2-2x+3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{(x-1)^2+2}$, ……………（9 分）

当 $x=1$ 时 $\tan A$ 有最大值$\sqrt{3}$, ……………………………………………………………………………（11 分）

又因为 $A\in(0,\pi)$,

所以 A 的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查超几何分布以及全概率公式的应用.

解析 （Ⅰ）依题意,从盒中取出的 3 个球中旧球的个数 X 的所有可能取值为 0,1,2,3, ……………（1 分）

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_9^3C_3^0}{C_{12}^3}=\dfrac{84}{220}=\dfrac{21}{55}$, $P(X=1)=\dfrac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\dfrac{108}{220}=\dfrac{27}{55}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}=\dfrac{27}{220}$, $P(X=3)=\dfrac{C_9^0C_3^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{220}$, ……………………………………………（3 分）

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

…………………………………………………………………………………………（4 分）

所以 $EX=0\times\frac{21}{55}+1\times\frac{27}{55}+2\times\frac{27}{220}+3\times\frac{1}{220}=\frac{165}{220}=\frac{3}{4}$. ………………（6 分）

另解：X 服从参数为 12，3，3 的超几何分布，故 $EX=\frac{3\times3}{12}=\frac{3}{4}$.

（Ⅱ）设事件 A 表示第二次比赛时取出的球为新球，事件 B_i 为第一次比赛时取出的 3 个球中有 i 个新球，其中 $i=0,1,2,3$，

由（Ⅰ）可得 $P(B_0)=\frac{1}{220}$，$P(B_1)=\frac{27}{220}$，$P(B_2)=\frac{27}{55}$，$P(B_3)=\frac{21}{55}$，………………（7 分）

根据题意，$P(A|B_0)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$，$P(A|B_1)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，$P(A|B_2)=\frac{7}{12}$，$P(A|B_3)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，

…………………………………………………………………………………………（9 分）

所以根据全概率公式可得

$P(A)=\sum\limits_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$ ………………………………………………（10 分）

$=\frac{1}{220}\times\frac{3}{4}+\frac{27}{220}\times\frac{2}{3}+\frac{27}{55}\times\frac{7}{12}+\frac{21}{55}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{9}{16}$. ………………………………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明以及利用空间向量计算二面角.

解析 （Ⅰ）由于正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$，所以 $AC=2$. ………………………（1 分）

取 AC 的中点 O，连接 PO，BO，

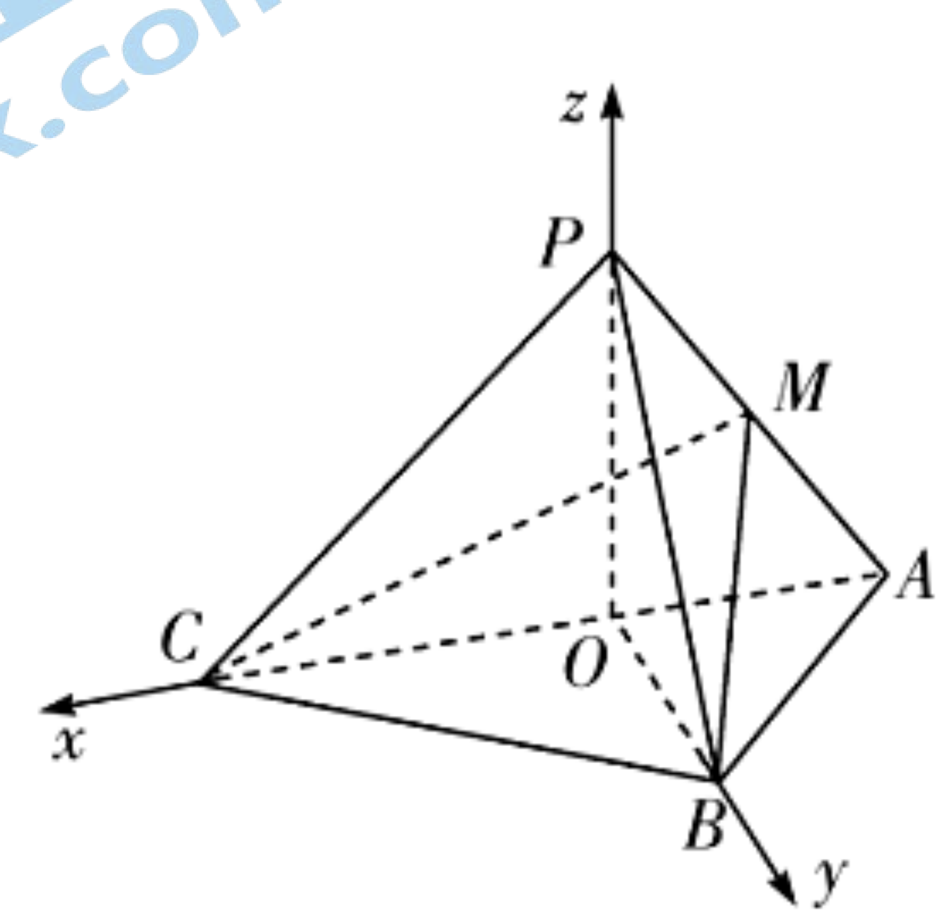
由题意，得 $PO=BO=\frac{1}{2}AC=1$， ………………………………………………（2 分）

再由 $PB=\sqrt{2}$，可得 $PO^2+BO^2=PB^2$，即 $PO\perp BO$. ……………………………（3 分）

由题易知 $PO\perp AC$，又 $AC\cap BO=O$，所以 $PO\perp$ 平面 ABC，……………………（4 分）

又 $PO\subset$ 平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $PO\perp OB$，$PO\perp OC$，又 $OB\perp AC$，于是可分别以 OC，OB，OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



…………………………………………………………………………………………（6 分）

则 $C(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $A(-1,0,0)$, $P(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AP}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$, $\overrightarrow{PC}=(1,0,-1)$,

由题意知 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}=(\lambda,0,\lambda)$, 所以 $M(\lambda-1,0,\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{MC}=(2-\lambda,0,-\lambda)$. …………………………………………………………………(7 分)

设平面 MBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=x_1-y_1=0,\\ \overrightarrow{MC}\cdot\boldsymbol{m}=(2-\lambda)x_1-\lambda z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$, 得 $\boldsymbol{m}=\left(1,1,\dfrac{2-\lambda}{\lambda}\right)$. ……………………………………(9 分)

同理可得平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

$$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{\left|2+\dfrac{2-\lambda}{\lambda}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\left(\dfrac{2-\lambda}{\lambda}\right)^2}}=\frac{7}{9},$$ ……………………………………………(10 分)

设 $t=\dfrac{2-\lambda}{\lambda}$, $t\in(1,+\infty)$, 则上式可化为 $11t^2-54t-5=0$,

即 $(t-5)(11t+1)=0$, 所以 $t=5\left(t=-\dfrac{1}{11}\text{舍去}\right)$,

所以 $\dfrac{2-\lambda}{\lambda}=5$, 解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………………………(12 分)

21. **命题意图** 本题考查椭圆的综合性质.

解析 (Ⅰ)$\because A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$ 上,

$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4(a^2-1)}=1$, 解得 $a^2=4$ 或 $\dfrac{1}{4}$(舍去), ……………………………………………(2 分)

$\therefore C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………………(3 分)

$\therefore C$ 的离心率为 $\sqrt{\dfrac{4-3}{4}}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)设 $l:y=kx+m$,

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+m,\\ 3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$ 消去 y 可得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$. ………………(6 分)

$\therefore \begin{cases}x_M+x_N=\dfrac{-8km}{3+4k^2},\\ x_Mx_N=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}.\end{cases}$ (*)……………………………………………………………(7 分)

$\because k_{BM}=\dfrac{kx_M+m}{x_M+2}$, $k_{BN}=\dfrac{kx_N+m}{x_N+2}$,

$\therefore k_{BM}+k_{BN}=\dfrac{(kx_M+m)(x_N+2)+(kx_N+m)(x_M+2)}{(x_M+2)(x_N+2)}=\dfrac{2kx_Mx_N+(2k+m)(x_M+x_N)+4m}{x_Mx_N+2(x_M+x_N)+4}$, …………(8 分)

将(*)代入其中可得

$k_{BM}+k_{BN}=\dfrac{2k(4m^2-12)+(2k+m)(-8km)+12m+16mk^2}{4m^2-12-16km+12+16k^2}=\dfrac{3m-6k}{4k^2-4km+m^2}$. ……………………(9 分)

由题意知 $k\cdot\dfrac{3m-6k}{4k^2-4km+m^2}=-3\Rightarrow 2k^2-3km+m^2=0$,

$\therefore k=\dfrac{m}{2}$ 或 $k=m$. ……………………………………………………………………………………（10 分）

$\because l:y=kx+m$ 不过点 $B(-2,0)\Rightarrow k\neq\dfrac{m}{2}$, $\therefore k=m$.

$\therefore l:y=mx+m$ 过定点 $(-1,0)$. ……………………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查利用放缩法证明不等式.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=\cos x-a$, …………………………………………………………………………………（1 分）

若 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$ 即 $a\leqslant\cos x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，

又因为当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\cos x\in[0,1]$, ……………………………………………………（2 分）

所以 $a\leqslant 0$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$. ……………………………………………………（3 分）

（Ⅱ）若 $a=\dfrac{1}{2}$，则 $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$，$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}$,

当 $x\in[0,\pi]$ 时，令 $f'(x)=0$，可得 $x=\dfrac{\pi}{3}$, ……………………………………………………（4 分）

所以当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减， ……………………………………………（5 分）

又因为 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$，$f(\pi)=-\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right]$. ……………………………………………（7 分）

（Ⅲ）当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，$1<1+\dfrac{4}{k^2+2k}<\pi$,

由（Ⅱ）可知 $\sin\left(1+\dfrac{4}{k^2+2k}\right)-\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{4}{k^2+2k}\right)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$, ……………………………（8 分）

所以 $\sin\left(1+\dfrac{4}{k^2+2k}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{k^2+2k}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{k^2+2k}$,

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(1+\dfrac{4}{k^2+2k}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}n+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k^2+2k}$. ……………………………………………（9 分）

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k^2+2k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{3}{2}$, ………（11 分）

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(1+\dfrac{4}{k^2+2k}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}n+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(n+\sqrt{3})$. ……………………………………（12 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。