2023北京平谷高二（上）期末

数　　学

2023.1

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共4页，共150分，考试时间为120分钟．

2．试题所有答案必须书写在答题纸上，在试卷上作答无效．

3．考试结束后，将答题纸交回，试卷按学校要求保存好．

第I卷　选择题（共40分）

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分；在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上．）

1. 直线$3x+2y+1=0$在x轴上的截距为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{3}$

2. 在空间直角坐标系中，已知点$A(1,1,1)$，$B(3,1,1)$，则线段AB的中点的坐标是（　　）

A. $(1,0,1)$　　B. $(2,1,1)$　　C. $(1,1,2)$　　D. $(1,2,3)$

3. 一个袋中装有四个形状大小完全相同　球，球的编号分别为1，2，3，4．从袋中随机抽取两个球，那么取出的球的编号之和不大于4的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

4. 已知圆$x^2+y^2-3x+my+1=0$关于$y=x$对称，则实数m等于（　　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. -3　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

5. 已知平面α，β，直线m，n，下列命题中真命题是（　　）

A. 若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$　　B. 若$m\,/\!/\,n$，$m\perp\alpha$，则$n\perp\alpha$

C. 若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则$\alpha/\!/\beta$　　D. 若$m\parallel\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，$n\subset\beta$，则$m\,/\!/\,n$

6. 已知圆C：$x^2+y^2-2y-4=0$，直线l：$3x+y-6=0$，则直线l被圆C所截得的弦长为（　　）

A. $\sqrt{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. 5　　D. 10

7. "$m>0$"是"方程$x^2-my^2+m=0$表示双曲线"　（　　）

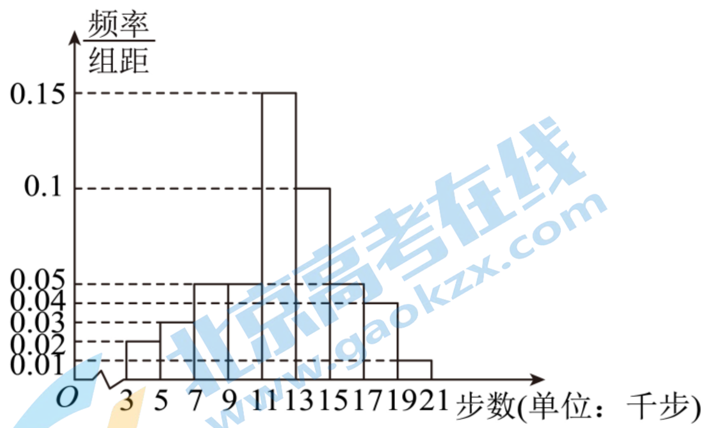
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知半径为 2 圆经过点 $(1,1)$，其圆心到直线 $3x+4y+13=0$ 的距离的最小值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 6

9. 某地区工会利用"健步行 APP"开展健步走活动．为了解会员的健步走情况，工会在某天从系统中随机抽取了 1000 名会员，统计了当天他们的步数（千步为单位），并将样本数据分为 $[3,5)$，$[5,7)$，$[7,9)$，$[9,11)$，$[11,13)$，$[13,15)$，$[15,17)$，$[17,19)$，$[19,21]$ 九组，整理得到频率分布直方图如图所示，则当天这 1000 名会员中步数少于 11 千步的人数为（　　）



A. 100　　B. 200　　C. 260　　D. 300

10. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，$P$ 是椭圆上一点，且 PF_2 垂直于 x 轴，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 2

第II卷　非选择题（共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请把答案填在答题卡中相应题中横线上.）

11. 直线 $x+\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角为____________.

12. 北京市某高中有高一学生 300 人，高二学生 250 人，高三学生 275 人，现对学生关于消防安全知识了解情况进行分层抽样调查，若抽取了一个容量为 n 的样本，其中高三学生有 11 人，则 n 的值等于______.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$（$a>0$）的焦距为 $8\sqrt{5}$，则 a 的值为______；此双曲线的渐近线方程是______.

14. 已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 $F(1,0)$，则抛物线 C 的方程是______；若 M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N，且 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$______.

15. 在直角坐标系中，O 为坐标原点，曲线 W 的方程是 $\sqrt{x^2+y^2}+|y|=1$，P 为 W 上的任意一点．给出下面四个命题：

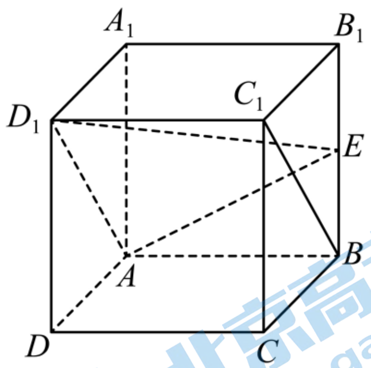
①曲线W上的点关于x轴，y轴对称；　　②曲线W上两点间的最大距离为$2\sqrt{2}$；

③$|OP|$的取值范围为$\left[\frac{1}{2},1\right]$；　　④曲线$W$围成的图形的面积小于$\frac{2}{3}$.

则以上命题中正确的序号有______.

三、解答题（本大题共6小题，共85分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

16. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，正方体的棱长为2，E为BB_1的中点.



（1）求证：$AB\perp AD_1$；

（2）求直线AA_1与平面AD_1E所成角的正弦值；

（3）求BC_1到平面AD_1E的距离.

17. 某公司招聘员工，指定三门考试课程，有两种考试方案．

方案一：考试三门课程，至少有两门及格为考试通过；

方案二：在三门课程中，随机选取两门，这两门都及格为考试通过．

假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是0.5，0.6，0.9，且三门课程考试是否及格相互之间没有影响．求：

（1）该应聘者用方案一考试通过的概率；

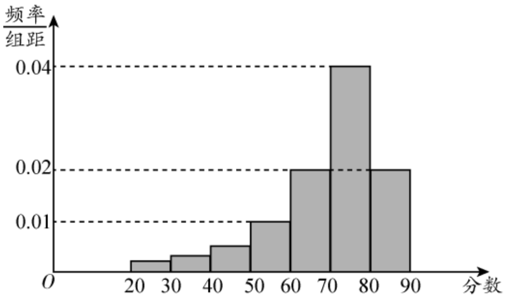
（2）该应聘者用方案二考试通过　概率．

18. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的短轴长为4，离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$．点$P$为圆$M$：$x^2+y^2=16$上任意一点，$O$为坐标原点.

（1）求椭圆C　标准方程；

（2）记线段OP与椭圆C交点为Q，求$|PQ|$的取值范围.

19. 某高中高一500名学生参加某次测评，根据男女学生人数比例，使用分层抽样的方法从中随机抽取了100名学生，记录他们的分数，将数据分成7组：$[20,30)$，$[30,40)$，…，$[80,90]$，并整理得到频率分布直方图如图所示.



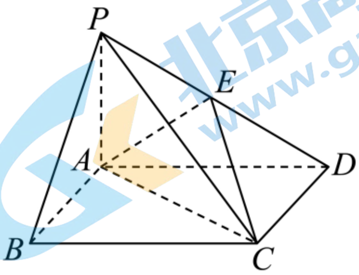
（1）从总体的 500 名学生中随机抽取一人，估计其分数小于 60 的概率；

（2）已知样本中分数小于 40 的学生有 5 人，试估计总体中分数在区间 $[40,50)$ 内的人数；

（3）估计随机抽取的 100 名学生分数的众数，估计测评成绩的 75%分位数；

（4）已知样本中有一半男生的分数不小于 70，且样本中分数不小于 70 的男女生人数相等．试估计总体中男生和女生人数的比例．

20. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点．



（1）求证：PB // 平面 AEC；

（2）求证：平面 $PCD\perp$ 平面 APD；

（3）设平面 DAE 与平面 AEC 夹角为 60°，$AP=1$，$AD=\sqrt{3}$，求 AB 长．

21. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点是 F_1，F_2，点 $M\left(\sqrt{2},1\right)$ 在椭圆 C 上，且右焦点 $F_2\left(\sqrt{2},0\right)$．$O$ 为坐标原点，直线 l 与直线 OM 平行，且与椭圆交于 A，B 两点．连接 MA、MB 与 x 轴交于点 D，E．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）求证：$\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|=2\sqrt{2}$．

参考答案

第Ⅰ卷　选择题（共40分）

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分；在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题意，请将正确选项填涂在答题卡上.）

1. 【答案】D

【解析】

【分析】令直线方程中的 $y=0$ 得出的 x 值即是直线在 x 轴上的截距.

【详解】令直线 $3x+2y+1=0$ 中的 $y=0$，

得 $x=-\dfrac{1}{3}$，

即直线 $3x+2y+1=0$ 在 x 轴上的截距为 $-\dfrac{1}{3}$，

故选：D

2. 【答案】B

【解析】

【分析】通过空间直角坐标系已知线段两端点坐标求中点坐标，只需将各坐标相加并除以2，即可得出中点坐标.

【详解】$\because$ 在空间直角坐标系中，点 $A(1,1,1)$，$B(3,1,1)$，

$\therefore$ 线段 AB 的中点的坐标是 $\left(\dfrac{1+3}{2},\dfrac{1+1}{2},\dfrac{1+1}{2}\right)$，

即线段 AB 的中点的坐标是 $(2,1,1)$，

故选：B.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】利用列举法列出所有可能情况，再根据古典概型的概率公式计算可得；

【详解】从编号为1、2、3、4的4个球中随机抽取两个球，

其可能结果有 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$ 共6个，

其中满足编号之和不大于4的有，$(1,2)$ $(1,3)$ 共2个，

所以取出的球的编号之和不大于4的概率 $P=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

故选：C

4. 【答案】B

【解析】

【分析】把圆关于直线对称转化为直线过圆心,点代入直线计算即可.

【详解】因为圆 $x^2+y^2-3x+my+1=0$ 关于 $y=x$ 对称,

所以直线 $y=x$ 过圆 $x^2+y^2-3x+my+1=0$ 的圆心 $\left(\frac{3}{2},-\frac{m}{2}\right)$

即得 $\frac{3}{2}=-\frac{m}{2}$,解得 $m=-3$，经检验，$m=-3$ 满足题意，

故选: B .

5. 【答案】B

【解析】

【分析】根据线面垂直和面面垂直的性质与判定定理、线面平行的判定定理和性质依次判断选项即可.

【详解】对于 A：$\because m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$\therefore \alpha//\beta$，故 A 错误，

对于 B：$\because m//n$，$m\perp\alpha$，$\therefore n\perp\alpha$，由平行线中的一条直线垂直于一个平面，

则另一条也垂直于这个平面可知，故 B 正确；

对于 C：$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$

若 $m\subset\beta$，由面面垂直判定定理可知 $\alpha\perp\beta$，故 C 错误；

对于 D：$\because m//\alpha,\alpha//\beta,n\subset\beta$，$\therefore m//n$ 或 m 与 n 互为异面直线或 m 与 n 相交，故 D 错误.

故选： B .

6. 【答案】A

【解析】

【分析】先根据圆的一般方程求圆心和半径,再结合半径,弦长和圆心到直线距离的关系式,计算即可.

【详解】已知圆 C：$x^2+y^2-2y-4=0$,所以圆心 $C(0,1)$,半径为 $r=\frac{\sqrt{4+0-4\times(-4)}}{2}=\sqrt{5}$，

圆心 $C(0,1)$ 到直线 l：$3x+y-6=0$ 的距离 $d=\frac{|3\times0+1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

所以直线 l 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5-\frac{10}{4}}=2\sqrt{\frac{10}{4}}=\sqrt{10}$

故选: A .

7. 【答案】C

【解析】

【分析】根据题意求出方程表示双曲线的条件，即可判断出结论.

【详解】若 $m=0$ 时，方程 $x^2-my^2=-m$ 不表示双曲线；

若 $m\neq0$ 时，方程 $x^2-my^2=-m\Leftrightarrow\frac{x^2}{-m}+y^2=1$ 为双曲线，则 $m>0$，

$\therefore m>0$ 是方程 $x^2-my^2=-m$ 表示双曲线的充分必要条件，

故选：C.

8. 【答案】C

【解析】

【分析】设圆心坐标得到圆的圆心的轨迹方程，再利用点到线的距离公式求解.

【详解】半径为 2 的圆经过点$(1,1)$，设圆心坐标为(a,b)，则$(a-1)^2+(b-1)^2=4$

所以该圆的圆心的轨迹是以$(1,1)$为圆心，2 为半径的圆

故圆心到直线$3x+4y+13=0$的距离的最小值为点$(1,1)$到直线的距离减半径，即

$$\frac{|3\times1+4\times1+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}-2=\frac{|20|}{5}-2=2$$

故选：C.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】分别求出健步走的步数在$[3,5)$，$[5,7)$，$[7,9)$，$[9,11)$的人数，即得解.

【详解】这 1000 名会员中健步走的步数在$[3,5)$内的人数为$0.02\times2\times1000=40$；

健步走的步数在$[5,7)$内的人数为$0.03\times2\times1000=60$；

健步走的步数在$[7,9)$内的人数为$0.05\times2\times1000=100$；

健步走的步数在$[9,11)$内的人数为$0.05\times2\times1000=100$；

$40+60+100+100=300$.

所以这 1000 名会员中健步走的步数少于 11 千步的人数为 300 人.

故选：D.

10. 【答案】A

【解析】

【分析】在直角$\triangle PF_2F_1$中，由$\cos\angle F_1PF_2$得到a,b,c的等量关系，结合$a^2=b^2+c^2$计算即可得到离心率.

【详解】由已知$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，且$PF_2$垂直于$x$轴

又在椭圆中通径的长度为$|PF_2|=\dfrac{b^2}{a}$，$|F_1F_2|=2c$，

所以$\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{4}{5},\tan\angle F_1PF_2=\dfrac{4}{3}$

故$\tan\angle F_1PF_2=\dfrac{4}{3}=\dfrac{|F_1F_2|}{|PF_2|}=\dfrac{2c}{\frac{b^2}{a}}$，

即$\dfrac{2ac}{a^2-c^2}=\dfrac{2e}{1-e^2}=\dfrac{4}{3},2e^2+3e-2=0$，

$(2e-1)(e+2)=0$,又因为$0<e<1$

解得$e=\dfrac{1}{2}$

故选： A

第II卷 非选择题（共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请把答案填在答题卡中相应题中横线上.）

11. 【答案】150°

【解析】

【分析】由直线$x+\sqrt{3}y-1=0$的斜率为$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得到$\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\alpha\in[0^0,180^0)$，即可求解.

【详解】由题意，可知直线$x+\sqrt{3}y-1=0$的斜率为$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

设直线的倾斜角为α，则$\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\alpha\in[0^0,180^0)$，解得$\alpha=150^0$，

即换线的倾斜角为150^0.

【点睛】本题主要考查直线的倾斜角的求解问题，其中解答中熟记直线的倾斜角与斜率的关系，合理准确计算是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

12. 【答案】33

【解析】

【分析】根据分层抽样的性质进行求解即可.

【详解】因为抽取了一个容量为n的样本，其中高三学生有 11 人，

所以有$\dfrac{11}{n}=\dfrac{275}{300+250+275}\Rightarrow n=33$，

故答案为：33.

13. 【答案】 ①. 8 ②. $y=\pm\dfrac{1}{2}x$

【解析】

【分析】根据双曲线标准方程求出a,b,c,再求渐近线方程即可.

【详解】因为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16}=1$（$a>0$）的焦距为$8\sqrt{5}$,所以$2c=8\sqrt{5}$,即

又因为$c^2=a^2+b^2$,所以$16\times5=a^2+16$,即$a^2=64$,可得$a=8$；

因为双曲线渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$,又因为$a=8,b=4$,所以双曲线渐近线方程为$y=\pm\dfrac{1}{2}x$

故答案为: 8; $y=\pm\frac{1}{2}x$

14. 【答案】 ①. $y^2=4x$ ②. 3

【解析】

【分析】利用C: $y^2=2px(p>0)$的焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$,已知焦点坐标求得$p$,

得到抛物线的方程；利用中点坐标公式求得M的横坐标，

利用抛物线的定义求得M到焦点的距离，进而得到所求.

【详解】抛物线C: $y^2=2px(p>0)$的焦点为$F(1,0)$，可得$p=2$，则抛物线C的方程是$y^2=4x$.

由M为FN的中点，N在y轴上，N的横坐标为0，F的横坐标为1，得M的横坐标为$\frac{1}{2}$，

$\because$抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，

M是抛物线上的点，F是抛物线的焦点，抛物线C: $y^2=2px(p>0)$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}=-1$，

$\therefore |MF|=x_M+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，

$\therefore |FN|=2|FM|=3$.

故答案为: $y^2=4x$； 3.

15. 【答案】①③

【解析】

【分析】根据对称性,最值及图像特征分别判断命题即可.

【详解】对于①,设$P(x,y)$在曲线W的方程上,因为$P'(x,-y)$也在曲线W的方程上,

$P''(-x,y)$也在曲线W的方程上,所以曲线W上的点关于x轴，y轴对称;故①正确

对于③$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=1-|y|$,又因为曲线$W$的方程是$\sqrt{x^2+y^2}+|y|=1$,

所以$\sqrt{x^2+y^2}=1-|y|$,即得$x^2+y^2=1-2|y|+y^2$,$x^2=1-2|y|\geq 0$,

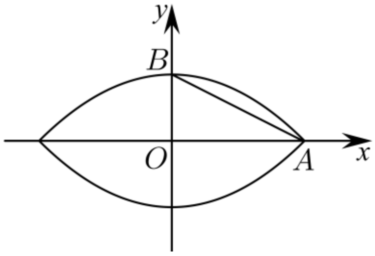
得$0\leq|y|\leq\frac{1}{2}$,所以$|OP|=1-|y|\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,故③正确

对于④当$y\geq 0$时，曲线W的方程为$y=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)$，曲线$W$与$x$轴交点$A$ $1,0$ 与y轴交点$B\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

曲线W上的点关于x轴对称可以得到曲线W的大致图像,

曲线W围成的图形的面积大于$4S_{\triangle OAB}=4\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=1$,故④错误;

对于②，如图及曲线W的对称性可知，曲线W上两点间的最大距离为$2|OA|=2\times1=2$,故②错误;



故答案 :①③

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

16. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{2}{3}$

（3）$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）以 A 为原点，AD, AB, AA_1 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，向量法即可证出；

（2）求出平面 AD_1E 的一个法向量，再根据线面角的向量公式即可求出；

（3）根据点到平面的距离向量公式即可求出．

【小问 1 详解】

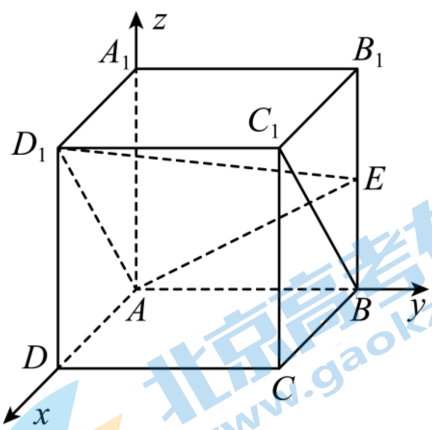
以 A 为原点，AD, AB, AA_1 所在的直线分别为 x, y, z 轴如图建立空间直角坐标系，则

$A(0,0,0), B(0,2,0), D_1(2,0,2)$,

$\overrightarrow{AB}=(0,2,0), \overrightarrow{AD_1}=(2,0,2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD_1}=2\times0+0\times2+2\times0=0$

$\therefore AB\perp AD_1$



【小问 2 详解】

因为正方体的棱长为 2，$A(0,0,0), A_1(0,0,2), D_1(2,0,2), E(0,2,1)$

$\therefore \overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，

设平面 AD_1E 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=2x+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2y+z=0\end{cases}$，

令 $z=2$，则 $x=-2,y=-1$，$\therefore\vec{n}=(-2,-1,2)$，

设直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}\right|=$

$\left|\dfrac{4}{2\times\sqrt{4+1+4}}\right|=\dfrac{2}{3}$，故直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

【小问 3 详解】

$\because C(2,2,0)$，$\therefore\overrightarrow{BC_1}=(2,0,2)$ 由（2）知，平面 AD_1E 所的法向量为 $\vec{n}=(-2,-1,2)$，

$\therefore\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{n}=0\therefore BC_1//$ 平面 AD_1E，

所以 BC_1 到平面 AD_1E 距离可以转化为点 B 到平面 AD_1E 的距离，

$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$d=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{2}{3}$

17. 【答案】（1）0.75；（2）0.43；

【解析】

【分析】（1）利用相互独立事件概率乘法公式及互斥事件的加法公式直接计算即可；

（2）分情况结合乘法公式即互斥事件加法公式即可得解.

【详解】（1）记该应聘者对三门指定课程考试及格的事件分别为 A，B，C，

则 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(C)=0.9$，

应聘者用方案一考试通过的概率：

$p_1=P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})$

$=0.5\times0.6\times0.9+(1-0.5)\times0.6\times0.9+0.5\times(1-0.6)\times0.9+0.5\times0.6\times(1-0.9)$

$=0.27+0.27+0.18+0.03$

$=0.75$；

（2）应聘者用方案二选择任意两科的概率为 $\dfrac{1}{3}$，

考试通过的概率：

$p_2=\dfrac{1}{3}P(AB)+\dfrac{1}{3}P(BC)+\dfrac{1}{3}P(AC)$

$=\dfrac{1}{3}\times0.5\times0.6+\dfrac{1}{3}\times0.6\times0.9+\dfrac{1}{3}\times0.5\times0.9$

$=0.1+0.18+0.15$

$=0.43$.

18. 【答案】（1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

（2）$[1,2]$

【解析】

【分析】（1）根据椭圆的离心率公式及$b^2=a^2-c^2$，即可求得a和b的值，求得椭圆方程；

（2）根据两点之间的距离公式$|OQ|=\sqrt{4+\frac{5x_1^2}{9}}$，根据$x_1\in[-3，3]$，即可求得$|PQ|$的取值范围；

【小问 1 详解】

由题意可知：$2b=4$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$b^2=a^2-c^2=4$，则$a=3$，$c=\sqrt{5}$

$\therefore$椭圆的标准方程：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；

【小问 2 详解】

由题意可知：$|PQ|=|OP|-|OQ|=4-|OQ|$，

设$Q(x_1,y_1)$，则$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$，

$\therefore |OQ|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+\left(4-\frac{4}{9}x_1^2\right)}=\sqrt{4+\frac{5x_1^2}{9}}$，

由$x_1\in[-3,3]$，当$x_1=0$时，$|OQ|_{\min}=2$，当$x_1=\pm3$时，$|OQ|_{\max}=3$，

$\therefore |PQ|$的取值范围$[1,2]$；

19. 【答案】（1）0.2

（2）25 人

（3）众数为75；测评成绩的 75%分位数为78.75

（4）$3:2$

【解析】

【分析】（1）由对立事件结合频率分布直方图先得出数不小于 60 的频率，即可得出分数小于 60 的频率，则可得出总体的 500 名学生中随机抽取一人，其分数小于 60 的概率估计值；

（2）先由频率分布直方图可得分数不小于 50 的频率，即可得出分数不小于 50 的人数，在集合题意即可得出总体中分数在区间$[40,50)$内的人数；

（3）总数为频率分布直方图中频率最高的分数区间的中间值，测评成绩的 75%分位数先得出从前到后的频率之和为 0.75 时在那个区间，在通过频率求出；

（4）先由频率分布直方图可得分数不小于 70 的学生人数，在通过已知得出样本中的男女生比例，即可得出总体中男女生的比例估计.

【小问 1 详解】

由频率分布直方图可得分数不小于 60 的频率为：$(0.02+0.04+0.02)\times 10=0.8$，

则分数小于 60 的频率为：$1-0.8=0.2$，

故从总体的 500 名学生中随机抽取一人，其分数小于 60 的概率估计为0.2；

【小问 2 详解】

由频率分布直方图可得分数不小于 50 的频率为：$(0.01+0.02+0.04+0.02)\times 10=0.9$，

则分数在区间$[40,50)$内的人数为：$100-100\times 0.9-5=5$人，

则总体中分数在区间$[40,50)$内的人数为：$500\times \frac{5}{100}=25$人；

【小问 3 详解】

由频率分布直方图可得分数在区间$[70,80)$的频率最高，

则随机抽取的 100 名学生分数的众数估计为75，

由频率分布直方图可得分数小于 70 的频率为0.4，分数小于 80 的频率为0.8，

则测评成绩的 75%分位数落在区间$[70,80)$上，

则测评成绩的 75%分位数为$70+10\times \frac{0.35}{0.4}=78.75$；

【小问 4 详解】

由频率分布直方图可得分数不小于 70 的学生人数为$(0.02+0.04)\times 10\times 100=60$人，

因为样本中分数不小于 70 的男女生人数相等

所以样本中分数不小于 70 的男生人数为$60\times \frac{1}{2}=30$人，

又因为样本中有一半男生的分数不小于 70，

所以样本中的男生共有$30\times 2=60$人，

则样本中的女生共有$100-60=40$人，

所以总体中男生和女生人数的比例估计为$60:40=3:2$.

20. 【答案】（1）答案见解析

（2）答案见解析　　（3）$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】（1）连 BD 交 AC 于 O 点，连接 OE，由线面平行判定定理可证；

（2）证明 $CD\perp$平面 PAD,则应用面面垂直的判定定理证明即可；

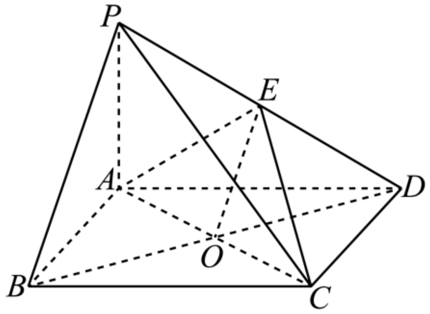
（3）建立空间坐标系，求出两平面的法向量，利用法向量的夹角公式运算得出 AB 的长.

【小问 1 详解】

连 BD 交 AC 于 O 点，连接 OE，

$\because O$ 为 BD 中点，E 为 PD 中点. $\therefore PB//OE$，$OE\subset$平面 AEC，$PB\not\subset$平面 AEC

$\therefore PB//$ 平面 AEC



【小问 2 详解】

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$ ， $CD\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp CD$,

$\because ABCD$ 为矩形， $\therefore DA\perp CD$,

又 $PA\cap AD=A$, $PA\subset$ 平面 PAD , $DA\subset$ 平面 PAD

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD ，又 $CD\subset$ 平面 PCD .

$\therefore$ 平面 $PCD\perp$ 平面 APD ;

【小问 3 详解】

以A 原点，以 AB，AD，AP 为坐标轴建立空间坐标系如图所示，

设 $AB=a$，则 A（0，0，0），C（a，$\sqrt{3}$，0），D（0，$\sqrt{3}$，0），P（0，0，1），E（0，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$），

$\therefore \overrightarrow{AC}=$（$a$，$\sqrt{3}$，0），$\overrightarrow{AE}=$（0，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$），$\overrightarrow{AP}=$（0，0，1），

显然 $\vec{m}=$（1，0，0）为平面 AED 的一个法向量，

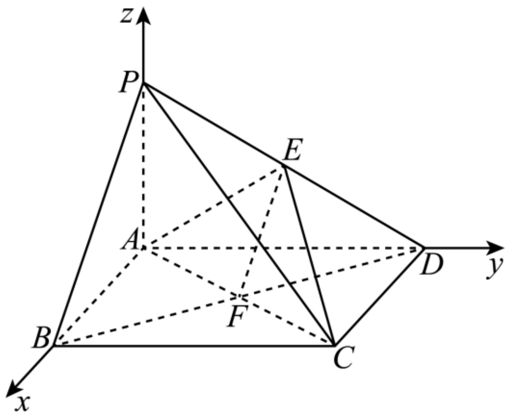
设平面 ACE　法向量为 $\vec{n}=$（x，y，z），则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}ax+\sqrt{3}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=\sqrt{3}$ 得 $\vec{n}=$（$\frac{\sqrt{3}}{a}$，－1，$\sqrt{3}$），

$\because$ 平面 DAE 与平面 AEC 夹角为 60°，

$\therefore |\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}|\frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{4+\frac{3}{a^2}}}=\frac{1}{2}$，

解得 $a=\frac{3}{2}$，即 $AB=\frac{3}{2}$.



21. 【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）通过 $M\left(\sqrt{2},1\right)$ 且 $F_2\left(\sqrt{2},0\right)$ 即可得出 $MF_2\perp x$ 轴，再通过勾股定理即可得出 $\left|MF_1\right|$，再结合 $\left|MF_2\right|$ 通过椭圆的定义得出 a 的值，通过焦点得出 c 的值，即可得出 b 的值，即得出椭圆的标准方程；

（2）根据直线 l 与直线 OM 平行得出直线 l 的斜率即可设出直线 l 的的方程，设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，通过直线 l 与椭圆 C 方程的联立即可得出 x_1+x_2，x_1x_2 的值，列出直线 MA 的方程令 $y=0$，可得点 D 的横坐标，同理列出直线 MB 的方程令 $y=0$，可得点 E 的横坐标，由点 D，E 的坐标得出 $\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|$ 并化简代入 x_1+x_2，x_1x_2 的值即可证明.

【小问 1 详解】

$\because M\left(\sqrt{2},1\right)$ 且 $F_2\left(\sqrt{2},0\right)$，

$\therefore MF_2\perp x$ 轴，且 $\left|MF_2\right|=1$，$\left|F_1F_2\right|=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$

$\therefore \left|MF_1\right|=\sqrt{1+8}=3$，

$\therefore \left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=4$，

$\therefore a=2$，

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

【小问 2 详解】

证明：设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

$\because$ 直线 l 与直线 OM 平行，且直线 OM 的斜率为 $\frac{1-0}{\sqrt{2}-0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+t$，

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+t \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去 y，

得 $x^2+\sqrt{2}tx+t^2-2=0$，

令 $\Delta=2t^2-4\left(t^2-2\right)>0$，得 $t^2<4$，

且 $x_1+x_2=-\sqrt{2}t$，$x_1x_2=t^2-2$，

直线 MA 的方程为：$y-1=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right)$，

令 $y=0$，可得点 D 的横坐标为 $x_D=-\frac{x_1-\sqrt{2}}{y_1-1}+\sqrt{2}$，

同理可得点 E 的横坐标为 $x_E=-\frac{x_2-\sqrt{2}}{y_2-1}+\sqrt{2}$，

$\therefore \left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|=\left|\left(x_D,0\right)+\left(x_E,0\right)\right|=\left|\left(x_D+x_E,0\right)\right|=\left|x_D+x_E\right|$，

$=\left|-\frac{x_1-\sqrt{2}}{y_1-1}+\sqrt{2}-\frac{x_2-\sqrt{2}}{y_2-1}+\sqrt{2}\right|$，

$=\left|2\sqrt{2}-\frac{x_1-\sqrt{2}}{y_1-1}-\frac{x_2-\sqrt{2}}{y_2-1}\right|$，

$\because A$，B 两点均在直线 l 上，

$\therefore y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+t$，$y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+t$，

代入 $\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|$ 可得，

$$\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|=\left|2\sqrt{2}-\frac{x_1-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+t-1}-\frac{x_2-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+t-1}\right|,$$

$$=\left|2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}(1-t)-\left(x_1+x_2\right)+(t-1)\left(x_1+x_2\right)+\sqrt{2}x_1x_2}{(1-t)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{2}x_1x_2}\right|,$$

代入$x_1+x_2=-\sqrt{2}t$，$x_1x_2=t^2-2$，

化简得：$\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|=2\sqrt{2}$，

$\therefore\left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|=2\sqrt{2}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。