2019 北京石景山区高三一模

数　　学（文）

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟．请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.　已知集合 $P=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 1\}$，$Q=\{1,2\}$，则下列关系中正确的是

A. $P=Q$　　　B. PÜQ　　　C. QÜP　　　D. $P\cup Q=\mathbf{R}$

2.　设 i 是虚数单位，若复数 $z=1+\mathrm{i}$，则复数 z 的模为

A. 1　　　B. $\sqrt{2}$　　　C. $\sqrt{3}$　　　D. 2

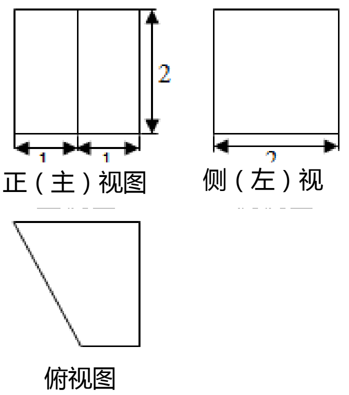
3.　某几何体的三视图如右图所示，该几何
何
体的体积为

A. 2

B. 4

C. 6

D. 12



4.　若 $x>0>y$，则下列各式中一定正确的是

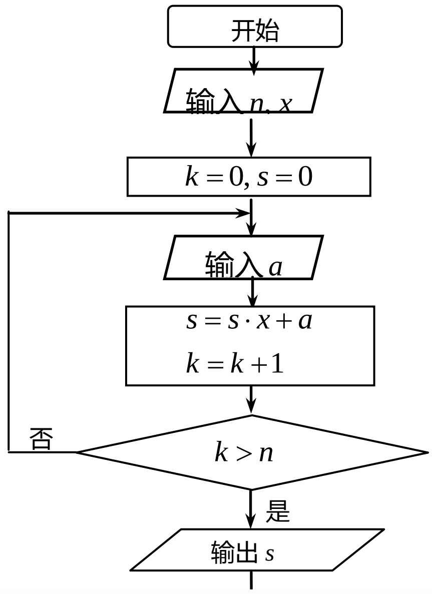
A. $\sin x>\sin y$　　　B. $\ln x<\ln(-y)$　　　C. $\mathrm{e}^x<\mathrm{e}^y$　　　D. $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$

5.　中国南宋时期的数学家秦九韶提出了一种多项式简化算法，右图是实现该算法的程序框图，如输入的 $n=2,x=1$，依次输入的 a 为 1，2，3，运行程序，输出的 s 的值为

A. 1

B. 2

C. 3



D. 6

6. 已知平面向量 $\vec{a}=(k,2),\vec{b}=(1,1),k\in\mathbf{R}$，则 $k=2$ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $f(x)=\sin(\dfrac{2\pi}{5}x)$，则 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=$

A. 0　　B. 505　　C. 1010　　D. 2020

8. 当 $x\in[0,1]$ 时，下列关于函数 $y=(mx-1)^2$ 的图象与 $y=\sqrt{x+m}$ 的图象交点个数说法正确的是

A. 当 $m\in[0,1]$ 时，有两个交点

B. 当 $m\in(1,2]$ 时，没有交点

C. 当 $m\in(2,3]$ 时，有且只有一个交点

D. 当 $m\in(3,+\infty)$ 时，有两个交点

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 和角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 x 轴对称.

若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\beta=$__________.

10. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\ y-x\leqslant 1,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值为_________.

11. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线为 l，l 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线分别交于 A,B 两点．若 $|AB|=4$，则 $p=$______ .

12. 九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏．在某种玩法中，用 a_n 表示解下 $n(n\leqslant 9,n\in\mathbf{N}^*)$ 个圆环所需的最少移动次数，已知 $a_1=1$，

$a_n=\begin{cases}2a_{n-1}-1, & n\text{ 为偶数}\\ 2a_{n-1}+2, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$，则解下 4 个圆环所需的最少移动次数 a_4 为______.

13. 已知集合 $A=\{-5,-1,2,4,5\}$，请写出一个一元二次不等式，使得该不等式的解集

与集合 A 有且只有一个公共元素，这个不等式可以是______________.

14. 在直角坐标系 xOy 中，点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上两点，

$|AB|=1$，则 $\angle AOB=$______；$|y_1+2|+|y_2+2|$ 的最大值为____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. （本小题 13 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=2$ 且 $S_n=S_{n-1}+2n$（$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$）.

（Ⅰ）求 S_n；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

16.（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b=2\sqrt{3}$，$c=3$，$\cos B=-\dfrac{1}{3}$.

（Ⅰ）求 $\sin C$ 的值；

（Ⅱ）求 $\triangle ABC$ 的面积.

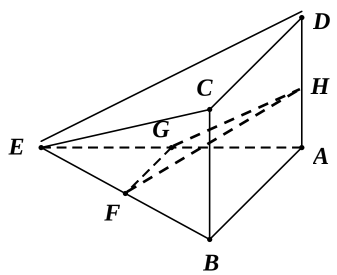
17. （本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 AEB，且四边形 $ABCD$ 为矩形．$\angle BAE=90°$，$AE=4$，$AD=2$，F,G,H 分别为 BE, AE, AD 的中点.

（Ⅰ）求证：CD // 平面 FGH；

（Ⅱ）求证：平面 $FGH\perp$ 平面 ADE；

（Ⅲ）在线段 DE 求一点 P，使得 $AP\perp FH$，并求出 AP 的值.

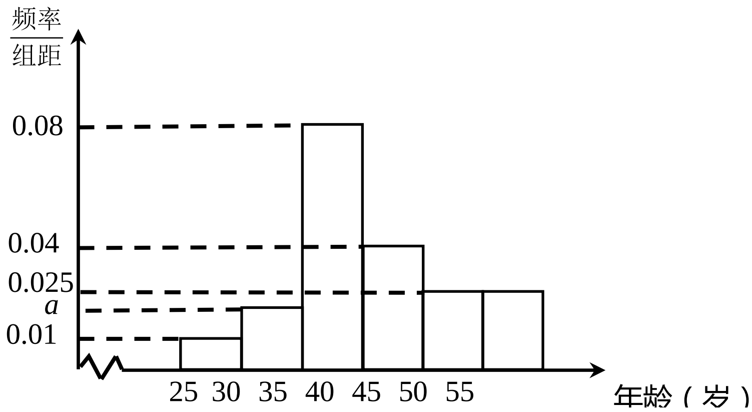


18. （本小题 13 分）

已知某单位全体员工年龄频率分布表为:

年龄（岁）	[25, 30）	[30, 35）	[35, 40）	[40, 45）	[45, 50）	[50, 55）	合计
人数（人）	6	18	50	31	19	16	140

经统计，该单位 35 岁以下的青年职工中，男职工和女职工人数相等，且男职工的年龄频率分布直方图和如下：



（Ⅰ）求 a；

（Ⅱ）求该单位男女职工的比例;

（Ⅲ）若从年龄在[25，30）岁的职工中随机抽取两人参加某项活动，求恰好抽取一名男职工和一名女职工的概率.

19.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+\dfrac{a}{2}$， $a>0$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a；

（Ⅱ）当 $x<1$ 时，函数 $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方，求 a 的最大值.

20．（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，右焦点为 $F(c,0)$，左顶点为 A，右顶点 B 在直线 $l:x=2$ 上．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）设点 P 是椭圆 C 上异于 A， B 的点，直线 AP 交直线 l 于点 D，当点 P 运动时，判断以 BD 为直径的圆与直线 PF 的位置关系，并加以证明．

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	D	D	C	A	B

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$-\frac{1}{3}$；　　10．-1；　　11．8；

12．7；　　13．$(x+4)(x-6)>0$；（答案不唯一）　　14．$\frac{\pi}{3}$，$\sqrt{3}+4$．

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $S_n = S_{n-1} + 2n$（$n \geqslant 2$，$n \in \mathbf{N}^*$），

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$（$n \geqslant 2$，$n \in \mathbf{N}^*$）．

又因为 $a_1 = 2$，

所以 $a_n = 2n$（$n \in \mathbf{N}^*$）．

所以 $S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n^2 + n$．

（Ⅱ）$b_n = 2^{a_n} = 4^n$，

所以 $T_n = \frac{4-4^n}{1-4} = \frac{4^n-4}{3}$．

16．（本小题 13 分）

解：(Ⅰ)在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B = -\frac{1}{3}$，

$\therefore \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\because b = 2\sqrt{3}$，$c = 3$，

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3}{\sin C}$，

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得 $12=a^2+9-2\times 3a\times(-\frac{1}{3})$，

$\therefore a^2+2a-3=0$，

解得 $a=1$ 或 $a=-3$（舍）

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.

17．（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：在矩形 $ABCD$ 中，$CD\parallel AB$，

$\because F$，G 分别为 BE，AE 的中点，

$\therefore FG\parallel AB$，且 $FG=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore CD\parallel FG$，

$\because CD\not\subset$ 平面 FGH，$FG\subset$ 平面 FGH，

$\therefore CD\parallel$ 平面 FGH .

（Ⅱ）证明：在矩形 $ABCD$ 中，$AD\perp AB$，

又 $\because \angle BAE=90^\circ$，

$\therefore AB\perp AE$，又 $AD\cap AE=A$

$\therefore AB\perp$ 平面 ADE，

又 $GF//AB$

$\therefore GF\perp$ 平面 ADE，

$\because GF\subset$ 平面 FGH，

$\therefore$平面 $FGH \perp$ 平面 ADE .

（III）解：作 $AP \perp DE$ 于 P，

$\because GF \perp$ 平面 ADE，

且 $AP \subset$ 平面 ADE，

$\therefore GF \perp AP$，

$\because G, H$ 分别为 AE, AD 的中点，

$\therefore GH \perp AP$

$\because GF \cap GH = G$，

$\therefore AP \perp$ 平面 FGH，

$\because FH \subset$ 平面 FGH，

$\therefore AP \perp FH$，

$\because$矩形 $ABCD \perp$ 平面 AEB，且平面 $ABCD \cap$ 平面 $AEB = AB$，

$\therefore AE \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore AE \perp$ 平面 AD，

在直角三角形 AED 中，$AE = 4$，$AD = 2$，可求得 $AP = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

18．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由男职工的年龄频率分布直方图可得：

$(a + 0.01 + 0.04 + 0.08 + 0.025 + 0.025) \times 5 = 1$.

所以 $a = 0.02$.

（Ⅱ）该单位[25, 35)岁职工共 24 人，由于[25, 35)岁男女职工人数相等，所以[25, 35)岁的男职工共 12 人.

由（Ⅰ）知，男职工年龄在[25, 35)岁的频率为 0.15，

所以男职工共有 $\dfrac{12}{0.15} = 80$ 人，

所以女职工有 $140 - 80 = 60$ 人，

所以男女比例为$4:3$.

（III）由男职工的年龄频率分布直方图可得：男职工年龄在[25, 30)岁的频率为0.05.

由（II）知，男职工共有80人，所以男职工年龄在[25, 30)岁的有4人，分别记为A_1, A_2, A_3, A_4.

又全体员工年龄在[25, 30)岁的有6人，所以女职工年龄在[25, 30)岁的有2人，分别记为B_1, B_2.

从年龄在25~30岁的职工中随机抽取两人的结果共有$(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4)$, $(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, A_4), (A_3, B_1), (A_3, B_2)$, $(A_4, B_1), (A_4, B_2), (B_1, B_2)$ 15种情况，

其中一男一女的有$(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_1), (A_3, B_2)$,

$(A_4, B_1), (A_4, B_2)$ 8种情况，

所以恰好抽取一名男职工和一名女职工的概率为$\frac{8}{15}$.

19. （本小题13分）

解：（I）$\because f(x)=e^x-ax+\frac{a}{2}$,

$\therefore f'(x)=e^x-a$,

$\therefore f'(1)=e-a$,

由题设知$\therefore f'(1)=0$，即$e-a=0$，解得$a=e$.

经验证$a=e$满足题意。

（II）方法一：

令$f'(x)=0$，即$e^x=a$，则$x=\ln a$，

（1）当$\ln a<1$时，即$0<a<e$

对于任意$x\in(-\infty,\ln a)$有$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$单调递减；

对于任意$x\in(\ln a,1)$有$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(\ln a,1)$单调递增，

因此当$x=\ln a$时，$f(x)$有最小值为$a-a\ln a+\frac{a}{2}=a\left(\frac{3}{2}-\ln a\right)>0$成立.

（2）当$\ln a\ge 1$时，即$a\ge e$

对于任意$x\in(-\infty,1)$有$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减，

所以 $f(x) > f(1)$.

因为 $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方，

所以 $f(1) \geq 0$，

因为 $f(x) > 0$，所以 $f(1) \geq 0$，即 $a \leq 2e$，

综上，a 的最大值为 $2e$.

方法二：由题设知，当 $x < 1$ 时，$f(x) = e^x - ax + \frac{a}{2} > 0$，

（1）当 $\frac{1}{2} < x < 1$时，$a < \dfrac{e^x}{x - \frac{1}{2}}$.

设 $g(x) = \dfrac{e^x}{x - \frac{1}{2}}$，则 $g'(x) = \dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)e^x - e^x}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\left(x - \frac{3}{2}\right)e^x}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} < 0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，

因此，$g(x)$ 的最小值大于 $g(1) = 2e$，所以 $a \leq 2e$.

（2）当 $x = \frac{1}{2}$ 时，$f(x) = e^{\frac{1}{2}} > 0$ 成立.

（3）当 $x < \frac{1}{2}$ 时，$a > \dfrac{e^x}{x - \frac{1}{2}}$，

因为 $\dfrac{e^x + 1}{x - \frac{1}{2}} < 0$，所以当 $a = 2e$ 时 $a > \dfrac{e^x}{x - \frac{1}{2}}$ 成立.

综上，a 的最大值为 $2e$.

20.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）依题可知 $B(a, 0)$，$a = 2$

因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $c = 1$　　$b = \sqrt{3}$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

（Ⅱ）以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

证明如下：由题意可设直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)(k\neq 0)$．

则点 D 坐标为 $(2,4k)$， BD 中点 E 的坐标为 $(2,2k)$，

由 $\begin{cases} y=k(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得

$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$．

设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $-2x_0=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$．

所以 $x_0=\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}$， $y_0=k(x_0+2)=\dfrac{12k}{3+4k^2}$．

因为点 F 坐标为 $(1,\ 0)$，

①当 $k=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，点 P 的坐标为 $(1,\ \pm\dfrac{3}{2})$，直线 PF 的方程为 $x=1$，

点 D 的坐标　为 $(2,\ \pm 2)$．

此时以 BD 为直径的圆 $(x-2)^2+(y\mp 1)^2=1$ 与直线 PF 相切．

② 当 $k\neq\pm\dfrac{1}{2}$ 时，直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\dfrac{y_0}{x_0-1}=\dfrac{4k}{1-4k^2}$．

所以直线 PF 的方程为 $y=\dfrac{4k}{1-4k^2}(x-1)$，即 $x-\dfrac{1-4k^2}{4k}y-1=0$．

故点 E 到直线 PF 的距离

$$d=\frac{\left|2-\dfrac{1-4k^2}{4k}\times 2k-1\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1-4k^2}{4k}\right)^2}}=\frac{\dfrac{1+4k^2}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1+4k^2}{4k}\right)^2}}=|2k|$$

（或直线 PF 的方程为 $\dfrac{4k}{1-4k^2}x-y-\dfrac{4k}{1-4k^2}=0$，

故点 E 到直线 PF 的距离

$$d=\frac{\left|\dfrac{8k}{1-4k^2}-2k-\dfrac{4k}{1-4k^2}\right|}{\sqrt{\dfrac{16k^2}{(1-4k^2)^2}+1}}=\frac{\left|\dfrac{2k+8k^3}{1-4k^2}\right|}{\dfrac{1+4k^2}{|1-4k^2|}}=2|k|\text{）}$$

又因为$|BD|=2R=4|k|$，故以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

综上得，当点 P 运动时，以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

解法二:

（II）以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

证明如下：设点 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1(y_0\neq 0)$

① 当 $x_0=1$ 时，点 P 的坐标为 $(1,\ \pm\frac{3}{2})$，直线 PF 的方程为 $x=1$，

点 D 的坐标为 $(2,\ \pm 2)$，

此时以 BD 为直径的圆 $(x-2)^2+(y\mp 1)^2=1$ 与直线 PF 相切，

② 当 $x_0\neq 1$ 时直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

点 D 的坐标为 $(2,\frac{4y_0}{x_0+2})$，BD 中点 E 的坐标为 $(2,\frac{2y_0}{x_0+2})$，故 $|BE|=|\frac{2y_0}{x_0+2}|$

直线 PF 的斜率为 $k_{PF}=\frac{y_0}{x_0-1}$，

故直线 PF 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，即 $x-\frac{x_0-1}{y_0}y-1=0$，

所以点 E 到直线 PF 的距离 $d=\frac{|2-\frac{x_0-1}{y_0}\times\frac{2y_0}{x_0+2}-1|}{\sqrt{1+(\frac{x_0-1}{y_0})^2}}=|\frac{2y_0}{x_0+2}|=|BE|$

故以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

综上得，当点 P 运动时，以 BD 为直径的圆与直线 PF 相切.

【若有不同解法，请酌情给分】