高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x|x^2<9\}$，$N=\{x|-2<x<4\}$，则 $M\cup N=$

A. $\{x|-3<x<4\}$　　B. $\{x|-3<x<3\}$

C. $\{x|-2<x<4\}$　　D. $\{x|-2<x<3\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-i)z=-2i$，则 $\bar{z}=$

A. $1-i$　　B. $1+i$　　C. $-1+i$　　D. $-1-i$

3. 甲、乙两名射击运动员各射击 6 次的成绩如下：

甲	7	8	9	5	4	9
乙	7	8	a	8	7	7

则下列说法正确的是

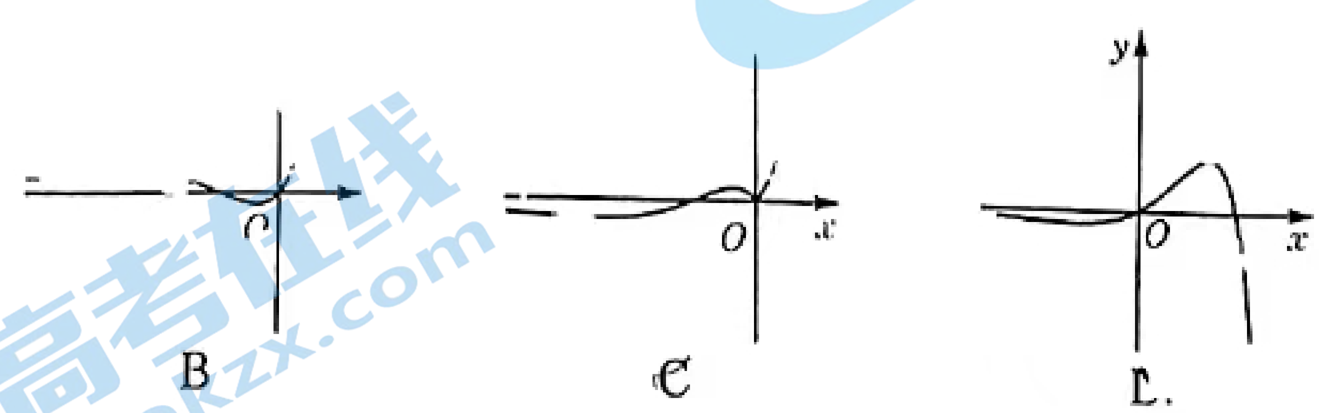
A. 若 $a=9$，则甲射击成绩的中位数大于乙射击成绩的中位数

B. 若 $a=8$，则甲射击成绩的极差小于乙射击成绩的极差

C. 若 $a=7$，则乙比甲的平均成绩高，乙比甲的成绩稳定

D. 若 $a=7$，则乙比甲的平均成绩高，甲比乙的成绩稳定

4. 已知函数 $f(x)=(x^2+x)e^x$，则 $f(x)$ 的大致图象为



5. 在区间 $[0,\pi]$ 上随机取一个数 x，则事件"$\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$"的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列，且 $a_2a_9=128$，$a_4+a_7=36$，则 $\{a_n\}$ 的公比为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$　　C. $2^{\frac{1}{3}}$　　D. 2

7. 设 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，且 $f(1+x)=f(-x)$. 若 $f\left(\frac{5}{3}\right)=2$，则 $f\left(\frac{2023}{3}\right)=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. -2　　D. 2

8. 已知函数 $f(x)=\sin|x|-\cos 2x$，则下列结论错误的是

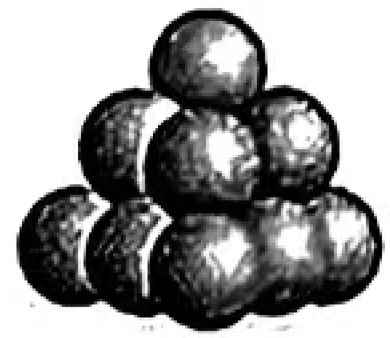
A. $f(x)$ 为偶函数

B. $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{9}{8}$

D. $f(x)$ 的最大值为 2

9. 南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中出现了如图所示的形状，后人称为"三角垛". "三角垛"的最上层(即第一层)有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，第四层有 10 个球，…，设"三角垛"从第一层到第 n 层的各层球的个数构成一个数列 $\{a_n\}$，令 $b_n=\frac{1}{a_n}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 2023 项和为



A. $\frac{1011}{1012}$

B. $\frac{1023}{2024}$

C. $\frac{2023}{1012}$

D. $\frac{2023}{2024}$

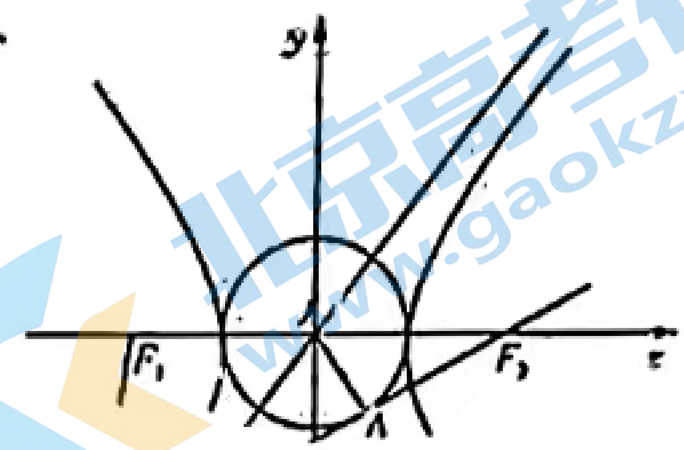
10. 在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$，$AD=2\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{2}$，$E$ 为 CD 的中点，$\triangle ACE$ 为等边三角形，则异面直线 AC 与 BE 所成角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

11. 已知函数 $f(x)=e^x-2x$，$g(x)=-x$，且 $f(x_1)=g(x_2)$，则 x_1-x_2 的最小值为

A. 1　　B. e　　C. $1-\ln 2$　　D. $2-\ln 2$

12. 如图，已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 的切线 F_2A，切点为 A，且切线 F_2A 在第三象限与 C 及 C 的渐近线分别交于点 M，N，则



A. 直线 OA 与双曲线 C 有交点

B. 若 $|MF_1|=2b$，则 $|AM|=2a-b$

C. 若 $|MF_2|=4|AF_2|$，则 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$

D. 若 $|NF_2|=4|AF_2|$，则 C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

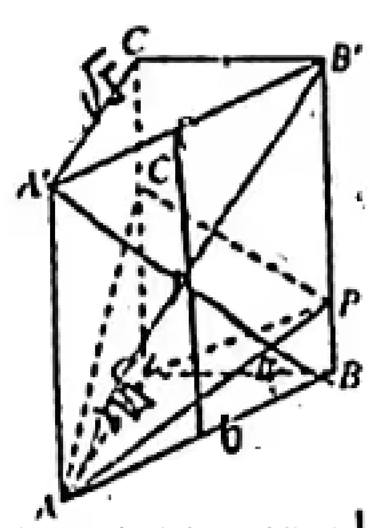
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geq 0, \\ x-2y\leq 0, \\ x+2y-2\leq 0, \end{cases}$ 则 $z=x-3y$ 的最小值为______.

14. 已知 a,b 是单位向量，且满足 $|2a+b|=-2\sqrt{3}a\cdot b$，则 $a\cdot b=$______.

15. 已知抛物线 C 的顶点在原点，对称轴为坐标轴，且与直线 $y=x+1$ 相切，则抛物线 C 的一个方程是______.

16. 如图，直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，$AC\perp BC$，$AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$，棱柱的侧棱足够长，点 P 在棱 BB' 上，点 C_1 在 CC' 上，且 $PA\perp PC_1$，则当 $\triangle APC_1$ 的面积取最小值时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为______.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，$a+b=2c\cos B$.

(1)若$A=\frac{3\pi}{4}$，求B；

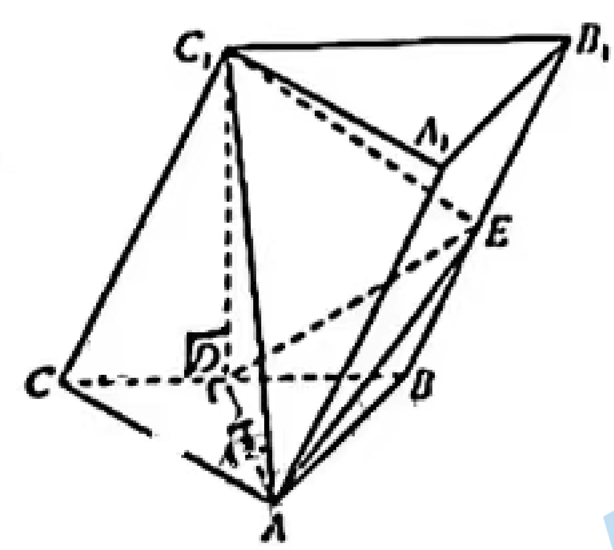
(2)若$a=2$，$2c=3b$，求$\triangle ABC$的面积.

18.（12 分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面为等边三角形，侧面BCC_1B_1为菱形，$\angle BCC_1=60°$，点D、E分别为BC、BB_1的中点，$AC_1=\sqrt{2}AD$.

(1)求证：$AD\perp$平面BCC_1B_1；

(2)记三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为V_1，三棱锥C_1-ADE的体积为V_2，求$\frac{V_2}{V_1}$.

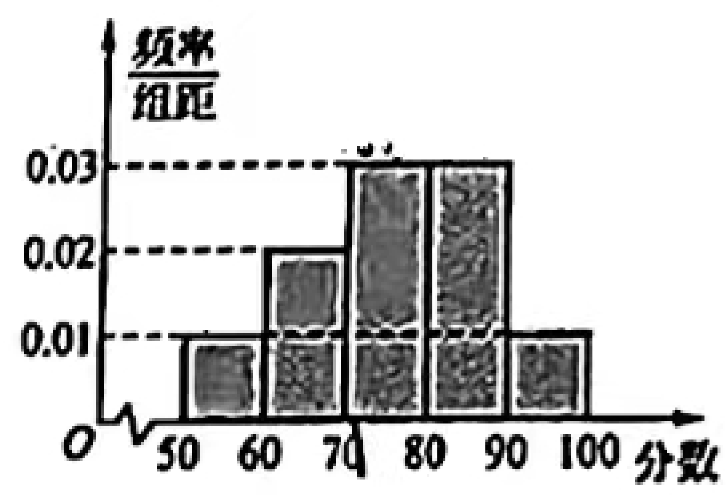


19.（12 分）

随着新课程标准的实施，新高考改革的推进，越来越多的普通高中学校认识到了生涯规划教育对学生发展的重要性，生涯规划知识大赛可以鼓励学生树立正确的学习观、生活观. 某校高一年级 1000 名学生参加生涯规划知识大赛初赛，所有学生的成绩均在区间[50,100]内，学校将初赛成绩分成 5 组：[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]加以统计，得到如图所示的频率分布直方图.

(1)试估计这 1000 名学生初赛成绩的平均数$\bar{x}$(同一组的数据以该组区间的中间值作代表)；

(2)为了帮学生制定合理的生涯规划学习计划，学校从成绩不足 70分的两组学生中用分层抽样的方法随机抽取 6 人，然后再从抽取的 6 人中任意选取 2 人进行个别辅导，求选取的 2 人中恰有 1 人成绩在[60,70)内的概率.



已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(2,\sqrt{2})$，且 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求 C 的方程；

(2)设直线 l 交 C 于不同于点 A 的 M,N 两点，直线 AM,AN 的倾斜角分别为 α,β，若 $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-1$，求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+a(x-1)(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若 $a\leqslant 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上存在小于 1 的极小值，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+1=0$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程；

(2)若 l 与 C 交于 M,N 两点，点 $P(-1,1)$，求 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$ 的值.

23.[选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-1|-|x+3|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 2$ 的解集；

(2)设函数 $f(x)$ 的最大值为 M，若 a,b,c 均为正数，且 $abc=M$，求 $(a+b)^2+c^2$ 的最小值.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $M=\{x|x^2<9\}=\{x|-3<x<3\}$，$N=\{x|-2<x<4\}$，所以 $M\cup N=\{x|-3<x<4\}$. 故选 A.

2. B　$z=\frac{-2i}{1-i}=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1-i$，所以 $\bar{z}=1+i$. 故选 B.

3. C　甲射击成绩的中位数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$，极差为 $9-4=5$，平均成绩为 $\overline{x_甲}=\frac{7+8+9+5+4+9}{6}=7$，方差为 $s_甲^2=\frac{1}{6}\times[(7-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2+(5-7)^2+(4-7)^2+(9-7)^2]=\frac{11}{3}$；当 $a=9$ 时，乙射击成绩的中位数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$，A 错误；当 $a=8$ 时，乙射击成绩的极差为 $8-7=1$，B 错误；当 $a=7$ 时，乙平均成绩为 $\overline{x_乙}=\frac{7+8+7+8+7+7}{6}=\frac{22}{3}$，方差为 $s_乙^2=\frac{1}{6}\left[4\times\left(7-\frac{22}{3}\right)^2+2\times\left(8-\frac{22}{3}\right)^2\right]=\frac{2}{9}$，故 $\overline{x_甲}<\overline{x_乙}$，$s_甲^2>s_乙^2$，由此可知乙比甲的平均成绩高，乙比甲的成绩稳定，C 正确，D 错误. 故选 C.

4. B　因为 $f(x)=(x^2+x)e^x$ 定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f'(x)=(x^2+3x+1)e^x$，所以当 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 时 $f'(x)<0$，当 $x<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 时 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，又 $f(0)=0$，故符合条件的函数图象为 B.

5. B　因为 $x\in[0,\pi]$，$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，故所求概率 $P=\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$，故选 B.

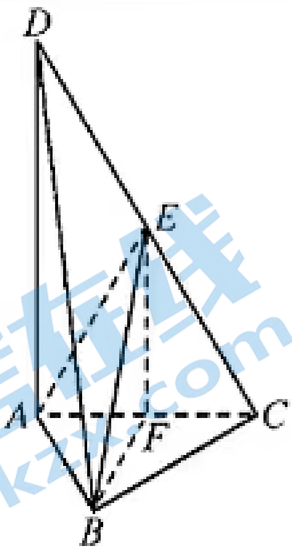
6. D　由题意，得 $\begin{cases}a_2a_9=a_4a_7=128,\\a_4+a_7=36,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_4=4,\\a_7=32,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=32,\\a_7=4\end{cases}$（因为 $\{a_n\}$ 递增，故舍去），所以 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\sqrt[3]{\frac{a_7}{a_4}}=2$. 故选 D.

7. C　因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(1+x)=f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x+1)=-[-f(x)]=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，所以 $f\left(\frac{2023}{3}\right)=f\left(2\times337+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{5}{3}\right)=-f\left(\frac{5}{3}\right)=-2$. 故选 C.

8. B　因为 $f(-x)=\sin|-x|-\cos(-2x)=\sin|x|-\cos 2x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，则 A 正确；若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，则 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立，即 $\sin|x+\pi|-\cos 2(x+\pi)=\sin|x|-\cos 2x$，亦即 $\sin|x+\pi|=\sin|x|$ 恒成立. 令 $x=\frac{\pi}{2}$，得 $\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}$，显然不成立，所以“$f(x)$ 的最小正周期为 π”是错误的，则 B 错误；由 $f(x)$ 是偶函数，只需考虑 $x\geqslant0$ 时的最值即可. 当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\sin x-\cos 2x=2\sin^2x+\sin x-1=2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，因为 $\sin x\in[-1,1]$，所以 $2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\in\left[-\frac{9}{8},2\right]$，即 $f(x)$ 值域为 $\left[-\frac{9}{8},2\right]$，则 C 和 D 正确. 故选 B.

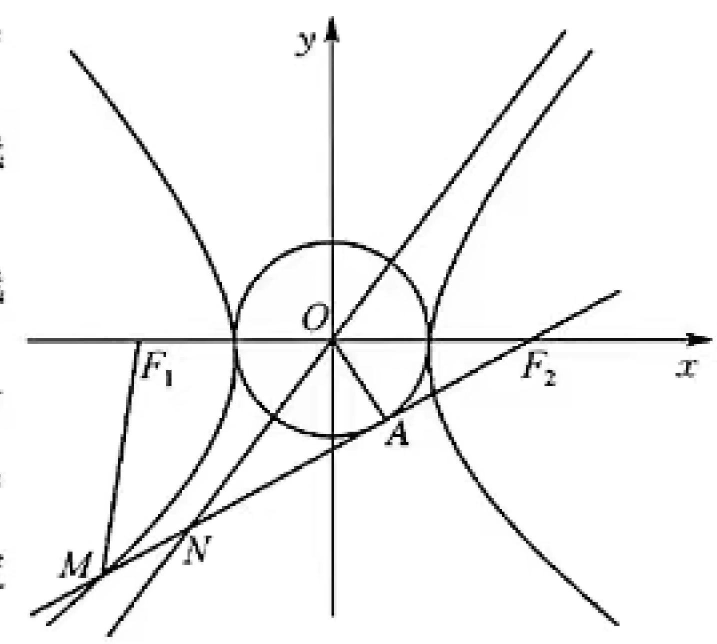
9. C　由题意，可知 $a_{n+1}-a_n=n+1$，$a_1=1$，所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1=n+(n-1)+\cdots+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$，则 $b_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $S_{2023}=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)=\frac{2023}{1012}$. 故选 C.

10. C　如图，取 AC 的中点 F，连结 BF，EF，因为 $\triangle ACE$ 为等边三角形，E 是 CD 中点，所以 $AE=CE=ED$，所以 $AC\perp AD$. 在 $Rt\triangle ACD$ 中，由勾股定理，得 $AC^2+AD^2=(2AC)^2$，因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $AC=2$. 因为 $AD\perp AC$，$AD\perp AB$，所以 $AD\perp$ 平面 ABC，所以 $AD\perp BC$. 又 $BC\perp BD$，所以 $BC\perp$ 平面 ABD，所以 $BC\perp BA$. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$BC=\sqrt{2}$，所以 $AB=BC=\sqrt{2}$. 所以 $BF\perp AC$. 又 $\triangle ACE$ 为等边三角形，所以 $EF\perp AC$，因为 $BF\cap EF=F$，所以 $AC\perp$ 平面 BEF，所以 $AC\perp BE$，则直线 AC 与 BE 所成角为 $\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

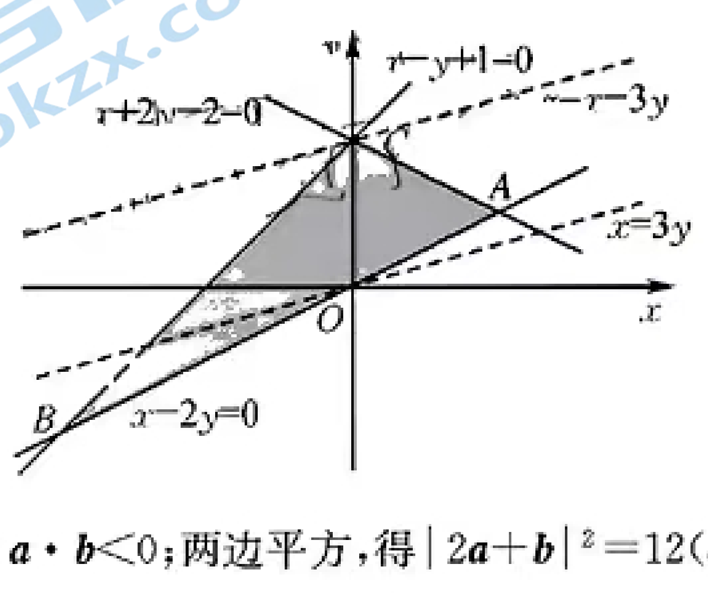


11. A　由 $f(x_1)=g(x_2)$，得 $e^{x_1}-2x_1=-x_2$，化简整理得 $x_1-x_2=e^{x_1}-x_1$，因为 $g(x)$ 的值域，$f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，所以 x_1 的取值范围也是 $\mathbf{R}$，令 $h(x)=e^x-x(x\in\mathbf{R})$，$h'(x)=e^x-1$，令 $e^x-1=0$，解得 $x=0$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1$，故 $(x_1-x_2)_{\min}=1$. 故选 A.

12. D　设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，由题意可知 $OA\perp AF_2$，$|OA|=a$，所以 $|AF_2|=\sqrt{|OF_2|^2-|OA|^2}=b$，从而直线 AF_2 的斜率为 $\tan\angle OF_2A=\frac{a}{b}$，由此，直线 OA 的斜率为 $k=-\frac{b}{a}$，其方程为 $y=-\frac{b}{a}x$，恰好是 C 的一条渐近线，所以直线 OA 与双曲线 C 无交点，A 错误；由双曲线的定义及 $|MF_1|=2b$，$|MF_2|=2b+2a$，又 $|AF_2|=b$，则 $|AM|=2a+b$，B 错误；由 $|AF_2|=b$，得 $|MF_2|=4|AF_2|=4b$，再由双曲线的定义，得 $|MF_1|=4b-2a$；在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $(4b-2a)^2=(4b)^2+(2c)^2-2\times4b\times2c\times\frac{b}{c}$，化简得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，C 错误；由 $|NF_2|=4|AF_2|$ 及 $|AF_2|=b$，得 $|AN|=3b$；设直线 ON 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，又 $\angle AON=\pi-2\alpha$，$\tan\angle AON=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{\frac{2b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，又 $\tan\angle AON=\frac{3b}{a}$，所以 $-\frac{\frac{2b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{3b}{a}$，解得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，D 正确. 故选 D.

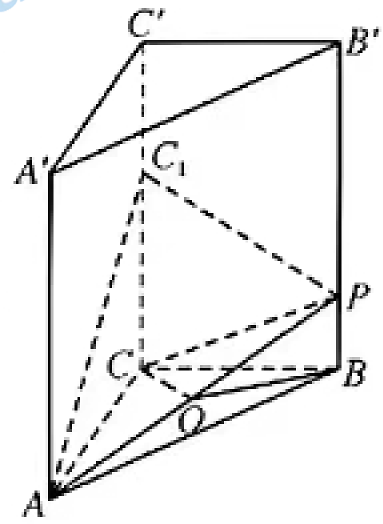


13. -3　作出不等式组 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0,\\x-2y\leqslant0,\\x+2y-2\leqslant0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图中阴影部分(含边界)，其中 $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$B(-2,-1)$，$C(0,1)$，当直线 $z=x-3y$ 过点 C 时，z 取最小值 $z_{\min}=-3$.



14. $-\frac{1}{2}$　由 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=-2\sqrt{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，显然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；两边平方，得 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$，整理，得 $12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-5=0$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5}{6}$(舍)或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$.

15. $y^2=4x$（也可以是 $x^2=-4y$）　因为抛物线 C 与直线 $y=x+1$ 相切，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$ 或 $x^2=-2qy(q>0)$；由 $\begin{cases}y^2=2px,\\y=x+1,\end{cases}$ 得 $x^2+(2-2p)x+1=0$，所以 $\Delta_1=(2-2p)^2-4=0$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程可以为 $y^2=4x$；由 $\begin{cases}x^2=-2qy,\\y=x+1,\end{cases}$ 得 $x^2+2qx+2q=0$，所以 $\Delta=(2q)^2-4\times 2q=0$，解得 $q=2$，所以抛物线 C 的方程可以为 $x^2=-4y$.



16. $20\sqrt{15}\pi$　如图，取 AP 的中点为 O，连接 CO,OB. 因为三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 为直棱柱，故 $CC_1\perp$ 平面 ABC，而 $AC\subset$ 平面 ABC，故 $CC_1\perp AC$，又 $CB\perp AC$，$CC_1\cap BC=C$，故 $AC\perp$ 平面 $BCC'B'$，因为 $C_1P\subset$ 平面 $BCC'B'$，故 $AC\perp C_1P$，因为 $PA\perp PC_1$，$AC\cap PA=A$，故 $PC_1\perp$ 平面 ACP，因为 $CP\subset$ 平面 ACP，故 $PC_1\perp PC$. 设 $PB=x$，$CC_1=h$，在直角三角形 PCB 中，$CP^2=16+x^2$，同理 $C_1P^2=16+(h-x)^2$，所以 $h^2=32+x^2+(h-x)^2$，整理得到 $h-x=\frac{16}{x}$. 又 $S_{\triangle AC_1P}=\frac{1}{2}\sqrt{36+x^2}\times\sqrt{16+(h-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(36+x^2)\left(16+\frac{16^2}{x^2}\right)}=2\sqrt{52+x^2+\frac{36\times16}{x^2}}\geqslant 2\sqrt{52+2\times6\times4}=20$，当且仅当 $x=2\sqrt{6}$ 时等号成立，也就是 $PB=2\sqrt{6}$ 时，$\triangle APC_1$ 的面积取最小值. 因为 $AC\perp$ 平面 $BCC'B'$，$CP\subset$ 平面 $BCC'B'$，故 $AC\perp CP$，故 $OA=OP=OC$，而 $\triangle PAB$ 为直角三角形，故 $OP=OB$，故 O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心，故外接球的直径为 $\sqrt{36+24}=2\sqrt{15}$，所以外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{15})^3=20\sqrt{15}\pi$.

17. 解：(1)由条件与正弦定理得 $\sin A+\sin B=2\sin C\cos B$，………………………… 1 分

由 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$ 得

$\sin B=\sin C\cos B-\sin B\cos C=\sin(C-B)$，………………………… 3 分

又 $B\in(0,\pi)$，$C-B\in(-\pi,\pi)$，所以 $B=C-B$，或 $B+C-B=\pi$，

所以 $C=2B$，或 $C=\pi$(舍去)，………………………… 4 分

当 $A=\frac{3\pi}{4}$ 时，$3B=\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4}$，所以 $B=\frac{\pi}{12}$. ………………………… 5 分

(2)法一：由(1)知，$\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

由正弦定理，得 $\cos B=\frac{c}{2b}=\frac{3}{4}$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………………………… 6 分

由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $b^2=4+\frac{9}{4}b^2-2\times2\times\frac{3}{2}b\times\frac{3}{4}$，

整理得 $\frac{5}{4}b^2-\frac{9}{2}b+4=0$，解得 $b=\frac{8}{5}$ 或 $b=2$. ………………………… 8 分

当 $b=2$ 时，$c=\frac{3}{2}b=3$，此时 $a=b=2$，所以 $A=B$，又因为 $C=2B$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 与 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 矛盾，舍去；………… 10 分

当 $b=\frac{8}{5}$ 时，$c=\frac{3}{2}b=\frac{12}{5}$，

此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\frac{12}{5}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$. ………………………… 12 分

法二：由(1)知，$\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B$，………………………… 6 分

由正弦定理，得 $\cos B=\frac{c}{2b}=\frac{3}{4}$，………………………… 7 分

结合 $a=2$，$2c=3b$，代入 $a+b=2c\cos B$，

解得 $b=\frac{8}{5}$，从而 $c=\frac{3}{2}b=\frac{12}{5}$，………………………… 10 分

此时$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{12}{5}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$. ………………………………………… 12分

18.(1)证明:连接BC_1,B_1C,因为侧面BCC_1B_1为菱形,$\angle BCC_1=60°$,

所以$\triangle BCC_1$为等边三角形,

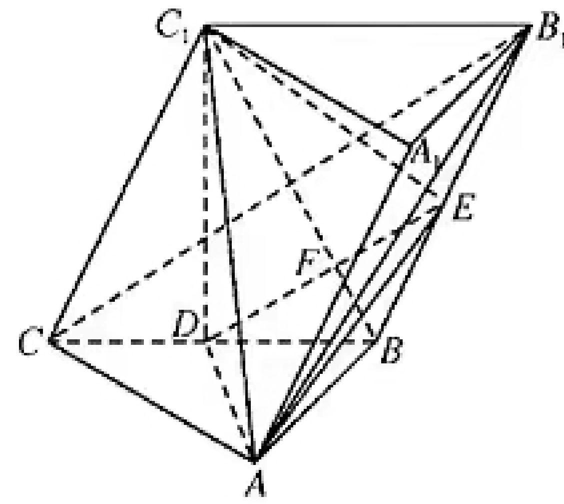
因为点D为BC的中点,所以$C_1D\perp BC$, ………………………………………… 1分

设$BC=2$,则$C_1D=\sqrt{3}$,

因为$\triangle ABC$为等边三角形,所以$AD\perp BC$,则$AD=\sqrt{3}$,

因为$AC_1=\sqrt{2}AD=\sqrt{6}$,所以$AC_1^2=AD^2+C_1D^2$,则$AD\perp C_1D$,

因为$BC\cap C_1D=D$,所以$AD\perp$平面BCC_1B_1; ………………………………………… 4分



(2)解:由(1)知$C_1D\perp BC$,$AD\perp C_1D$,$BC\cap AD=D$,

所以$C_1D\perp$平面ABC. ………………………………………… 7分

因为侧面BCC_1B_1为菱形,则$BC_1\perp B_1C$.

因为点D,E分别为BC,BB_1的中点,所以$DE\parallel B_1C$,则$DE\perp BC_1$,

设$BC=2$,则$C_1D=\sqrt{3}$,$DE=\frac{1}{2}B_1C=\sqrt{3}$,

设$BC_1\cap DE=F$,则$C_1F=\frac{3}{4}C_1B=\frac{3}{2}$. ………………………………………… 9分

所以三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积$V_1=S_{\triangle ABC}\cdot C_1D=\frac{1}{2}\times BC\times AD\times C_1D=3$,

三棱锥C_1-ADE的体积$V_2=V_{三棱锥A-C_1DE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times DE\times C_1F\times AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{4}$,

故$\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{4}$. ………………………………………… 12分

19.解:(1)$\overline{x}=55\times0.01\times10+65\times0.02\times10+75\times0.03\times10+85\times0.03\times10+95\times0.01\times10=76$; ………… 4分

(2)根据分层抽样,由频率分布直方图知成绩在$[50,60)$和$[60,70)$内的人数比例为$0.01:0.02=1:2$,

所以抽取的6人中,成绩在$[50,60)$内的有$6\times\frac{1}{3}=2$人,记为A_1,A_2;成绩在$[60,70)$内的有$6\times\frac{2}{3}=4$人,记为B_1,

B_2,B_3,B_4, ………………………………………… 6分

从6人中任意选取2人,有A_1A_2,A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_1B_4,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_2B_4,B_1B_2,B_1B_3,B_1B_4,B_2B_3,B_2B_4,

B_3B_4,共15种可能;

其中选取的2人中恰有1人成绩在区间$[60,70)$内的有A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_1B_4,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_2B_4,共8种可能, ………………………………………… 10分

所以所求概率$P=\frac{8}{15}$. ………………………………………… 12分

20.解:(1)因为C过点$A(2,\sqrt{2})$,所以 , ………………………………………… 1分

设C的焦距为$2c$,由$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$得$c^2=\frac{1}{2}a^2$,所以$b^2=a^2-c^2=\frac{1}{2}a^2$, ………………………………………… 2分

代入上式,解得$a^2=8$,$b^2=4$, ………………………………………… 3分

所以C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………… 4分

(2)设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,易知直线l的斜率不为0,设直线l的方程为$x=my+t$,

由$\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-8=0$,

则$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+2)(t^2-8)=-8(t^2-4m^2-8)>0$,

$y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+2}$,$y_1y_2=\frac{t^2-8}{m^2+2}$, ······························· 5分

由$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-1$得,$\cos\alpha=-\cos\beta=\cos(\pi-\beta)$.

又$\alpha\in[0,\pi)$,$\pi-\beta\in(0,\pi]$,所以$\alpha=\pi-\beta$,则$\alpha+\beta=\pi$, ······························· 6分

由题意知直线AM,AN的斜率存在,所以$k_{AM}+k_{AN}=0$.

则$\frac{y_1-\sqrt2}{x_1-2}+\frac{y_2-\sqrt2}{x_2-2}=\frac{(y_1-\sqrt2)(x_2-2)+(y_2-\sqrt2)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$, ······························· 7分

所以$(y_1-\sqrt2)(my_2+t-2)+(y_2-\sqrt2)(my_1+t-2)=0$.

则$2my_1y_2+(t-2-\sqrt2m)(y_1+y_2)-2\sqrt2(t-2)=0$,

即$\frac{2m(t^2-8)}{m^2+2}+(t-2-\sqrt2m)(-\frac{2mt}{m^2+2})-2\sqrt2(t-2)=0$.

整理得,$4(m-\sqrt2)(\sqrt2m+t-2)=0$,

又知l不过点$A(2,\sqrt2)$,则$\sqrt2m+t-2\neq0$,

所以$m=\sqrt2$. ······························· 8分

所以直线l的方程为$x=\sqrt2y+t$,则$\Delta=-8(t^2-16)>0$,所以$-4<t<4$,

$y_1+y_2=-\frac{\sqrt2t}{2}$,$y_1y_2=\frac{t^2-8}{4}$,

则点$A(2,\sqrt2)$到直线l的距离为$d=\frac{|t|}{\sqrt3}$, ······························· 9分

$|MN|=\sqrt{3[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{3\left[\left(-\frac{\sqrt2t}{2}\right)^2-4\times\frac{t^2-8}{4}\right]}=\sqrt{3(8-\frac12t^2)}$,

则$S_{\triangle AMN}=\frac12\times\frac{|t|}{\sqrt3}\times\sqrt{3(8-\frac12t^2)}=\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{\frac12t^2(8-\frac12t^2)}\leqslant\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\frac12t^2+(8-\frac12t^2)}{2}=2\sqrt2$,

当且仅当$\frac12t^2=8-\frac12t^2$,即$t=\pm2\sqrt2$时取等号, ······························· 11分

故$\triangle AMN$面积的最大值为$2\sqrt2$. ······························· 12分

21.解:(1)$a=1$时,$f(x)=\ln x+\frac1x+x-1$,$f'(x)=\frac1x-\frac1{x^2}+1$,

所以$f(1)=1$,$f'(1)=1$,

所以函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=x-1$,即$x-y=0$; ······························· 4分

(2)由题意,得$f(x)=\ln x+\frac1x+a(x-1)$,只考虑$x\in(0,2)$,$f'(x)=\frac{ax^2+x-1}{x^2}$.

①当$a=0$时,$f(x)=\ln x+\frac1x$,则$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$,

所以$f'(1)=0$,且当$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(1,2)$时,$f'(x)>0$,

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,2)$上单调递增,

所以$f(x)$仅在$x=1$处取得极小值,且极小值为$f(1)=1$,不符合题意; ······························· 6分

②当 $a<0$ 时，令 $h(x)=ax^2+x-1$，则 $\Delta=1+4a$.

（ⅰ）若 $\Delta=1+4a\leqslant 0$，即 $a\leqslant -\frac{1}{4}$，则 $\forall x\in(0,2)$，$h(x)\leqslant 0$，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上无极值，不符合题意. ………………………………………………………………………… 7 分

（ⅱ）若 $\Delta=1+4a>0$，即 $-\frac{1}{4}<a<0$，则 $h(x)$ 图象的对称轴为 $x=-\frac{1}{2a}>2$，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增. …… 8 分

因为 $h(1)=a<0$，$h(2)=4a+1>0$，由函数单调性和零点存在性定理得，在 $(1,2)$ 上存在唯一的实数 x_1，使得 $h(x_1)=0$，从而 $f'(x_1)=0$，

且当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h(x)<0$，从而 $f'(x)<0$；当 $x\in(x_1,2)$ 时，$h(x)>0$，从而 $f'(x)>0$. ………………… 10 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,2)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 仅在 $x=x_1$ 处取得极小值，极小值为 $f(x_1)$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，且 $1<x_1<2$，所以 $f(x_1)<f(1)=1$，符合题意.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$. ……………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$，消去参数 t，得 $x-y+2=0$.

将 $\begin{cases} \rho\cos\theta=x, \\ \rho\sin\theta=y \end{cases}$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+1=0$，得 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$；

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，直线 l 的普通方程为 $x-y+2=0$. ………………………… 5 分

(2) 依题意，点 $P(-1,1)$ 在 l 上，

将 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程并整理，得 $t^2-3\sqrt{2}t+1=0$，首先 $\Delta=(-3\sqrt{2})^2-4\times1\times1=14>0$，

可设 M,N 对应的参数分别是 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=3\sqrt{2}$，$t_1t_2=1$，显然 t_1,t_2 均为正数.

所以 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{t_1+t_2}{|t_1t_2|}=3\sqrt{2}$. …………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=\begin{cases} -4(x\geqslant 1), \\ -2x-2(-3<x<1), \\ 4(x\leqslant -3), \end{cases}$

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 2$ 化为 $-4\leqslant 2$，解得 $x\geqslant 1$；

当 $-3<x<1$ 时，$f(x)\leqslant 2$ 化为 $-2x-2\leqslant 2$，解得 $-2\leqslant x<1$；

当 $x\leqslant -3$ 时，$f(x)\leqslant 2$ 化为 $4\leqslant 2$，无解；

综上所述，$f(x)\leqslant 2$ 的解集为 $\{x|x\geqslant -2\}$；………………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 知，$abc=4$，

因为 $(a+b)^2+c^2\geqslant 4ab+c^2$（当且仅当 $a=b$ 时，等号成立），

$4ab+c^2=2ab+2ab+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{(2ab)\times(2ab)\times c^2}=3\sqrt[3]{4(abc)^2}=3\sqrt[3]{4\times 4^2}=12$，（当且仅当 $2ab=c^2$，即 $a=b=\sqrt{2}$，$c=2$ 时，等号成立），

所以 $(a+b)^2+c^2$ 的最小值为 12. ………………………………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。