东城区 2016—2017 学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学(理科)

2017.1

本试卷共 6 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中选出符合题目要求的一项)

1. 已知集合 $A=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|1<x<3\}$　　B. $\{x|1<x<4\}$

C. $\{x|2<x<3\}$　　D. $\{x|2<x<4\}$

2. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程是

A. $y=-1$　　B. $y=-\frac{1}{2}$　　C. $x=-1$　　D. $x=-\frac{1}{2}$

3. “$k=1$”是“直线 $kx-y-3\sqrt{2}=0$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 相切”的

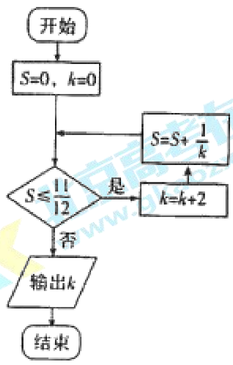
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图，输出的 k 值为

A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12



5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x>y>0$，则

A. $\tan x-\tan y>0$　　B. $x\sin x-y\sin y>0$

C. $\ln x+\ln y>0$　　D. $2^x-2^y>0$

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x+1)\geq 0$ 的解集为

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

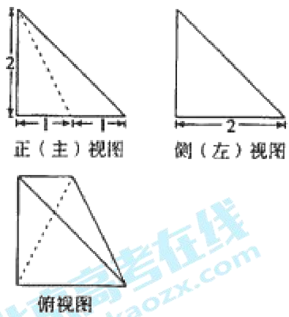
7. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为

A. $\frac{2}{3}$

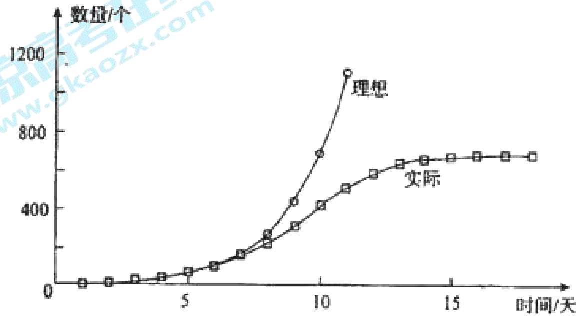
B. $\frac{4}{3}$

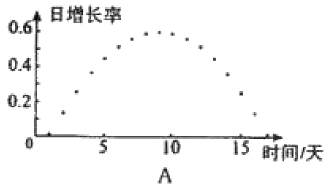
C. 2

D. $\frac{8}{3}$

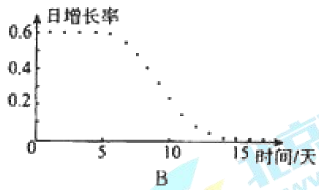


8. 数列$\{a_n\}$表示第 n 天午时某种细菌的数量．细菌在理想条件下第 n 天的日增长率 $r_n=0.6$（$r_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$，$n\in N^*$）．当这种细菌在实际条件下生长时，其日增长率 r_n 会发生变化．下图描述了细菌在理想和实际两种状态下细菌数量 Q 随时间的变化规律．那么，对这种细菌在实际条件下日增长率 r_n 的规律描述正确的是

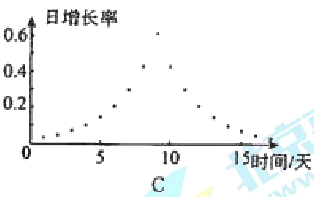




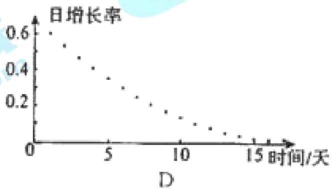
A



B



C



D

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

9. 若复数$(2-\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})$是纯虚数，则实数$a=$________.

10. 若x,y满足$\begin{cases}x-2\leqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x-3y+4\geqslant 0,\end{cases}$ 则$x+2y$的最大值为________.

11. 若点$P(2,0)$到双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线的距离为1，则$a=$________.

12. 在$\triangle ABC$中，若$AB=2,AC=3,\angle A=60°$，则$BC=$______；若$AD\perp BC$，则$AD=$______.

13. 在$\triangle ABC$所在平面内一点P，满足$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，延长$BP$交$AC$于点$D$，若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则$\lambda=$______.

14. 关于x的方程$g(x)=t(t\in\mathbf{R})$的实根个数记为$f(t)$. 若$g(x)=\ln x$，则$f(t)=$________；

若$g(x)=\begin{cases}x,x\leqslant 0,\\ -x^2+2ax+a,x>0\end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$，存在t使得$f(t+2)>f(t)$成立，则a的取值范围是________.

三、解答题（共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

15.（本小题13分）

已知$\{a_n\}$是等比数列，满足$a_1=3,a_4=24$，数列$\{a_n+b_n\}$是首项为4，公差为1的等差数列.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

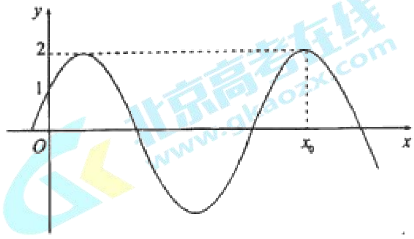
（Ⅱ）求数列$\{b_n\}$的前n项和.

16.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 部分图象如图所示．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期及图中 x_0 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.



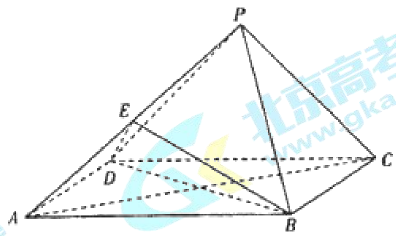
17.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，$BC=1$，$AB=2$，$PC=PD=\sqrt{2}$，E 为 PA 中点.

（Ⅰ）求证：$PC//$ 平面 BED；

（Ⅱ）求二面角 $A\text{-}PC\text{-}D$ 的余弦值；

（Ⅲ）在棱 PC 上是否存在点 M，使得 $BM\perp AC$？若存在，求 $\frac{PM}{PC}$ 的值；若不存在，说明理由.



18.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}(a\in \mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的最大值.

19.（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $M(2,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$. A，B 是椭圆 C 上两点，且直线 OA，OB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，O 为坐标原点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若射线 OA 上的点 P 满足 $|PO|=3|OA|$，且 PB 与椭圆交于点 Q，求 $\frac{|BP|}{|BQ|}$ 的值.

20.(本小题 13 分)

已知集合 $A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)\}$，$x,y\in A_n$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中 $x_i,y_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$. 定义 $x\odot y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 若 $x\odot y=0$，则称 x 与 y 正交.

(Ⅰ)若 $x=(1,1,1,1)$，写出 A_4 中与 x 正交的所有元素；

(Ⅱ)令 $B=\{x\odot y\mid x,y\in A_n\}$. 若 $m\in B$，证明：$m+n$ 为偶数；

(Ⅲ)若 $A\subseteq A_n$，且 A 中任意两个元素均正交，分别求出 $n=8,14$ 时，A 中最多可以有多少个元素.

东城区 2016-2017 学年第一学期期末教学统一检测

高三数学参考答案及评分标准 （理科）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）C	（2）D	（3）A	（4）B
（5）D	（6）C	（7）B	（8）B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）-1　　（10）6　　（11）$\sqrt{3}$

（12）$\sqrt{7}$，$\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$　　（13）$\dfrac{1}{3}$　　（14）1，$(1,+\infty)$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

由题意，得$q^3=\dfrac{a_4}{a_1}=8$，$q=2$.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$.　　……………3 分

又数列$\{a_n+b_n\}$是首项为4，公差为1的等差数列，

所以$a_n+b_n=4+(n-1)\cdot 1$.

从而$b_n=(n+3)-3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$.　　……………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$b_n=(n+3)-3\times 2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$

数列$\{n+3\}$的前n项和为$\dfrac{n(n+7)}{2}$.　　……………9 分

数列$\{3\cdot 2^{n-1}\}$的前n项和为$\dfrac{3(1-2^n)}{1-2}=3\times 2^n-3$.　　……………12 分

所以，数列$\{b_n\}$的前n项和为$\dfrac{n(n+7)}{2}-3\times 2^n+3$.　　………13 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由题意$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，$T=\pi$.　　…………2 分

因为点$(0,1)$在$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$图象上，

所以$2\sin(2\times 0+\varphi)=1$.

又因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$．　　　　　　　　…………4 分

所以$x_0=\dfrac{7}{6}\pi$．　　　　　　　　…………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，

因为$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{6}$．

当$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值$2$；

当$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}$，即$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最小值$-1$．………13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设AC与BD的交点为F，连结EF．

因为$ABCD$为矩形，所以F为AC的中点．

在$\triangle PAC$中，由已知E为PA中点，

所以$EF\,/\!/\,PC$．

又$EF\subset$平面BED，

$PC\not\subset$平面BED，

所以$PC\,/\!/$平面BED．　　　　……………………………5 分

（Ⅱ）取CD中点O，连结PO．

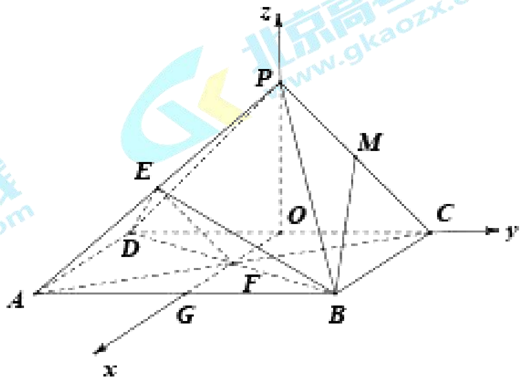
因为$\triangle PCD$是等腰三角形，O为CD的中点，

所以$PO\perp CD$．

又因为平面$PCD\perp$平面$ABCD$，

$PO\subset$平面PCD，

所以$PO\perp$平面$ABCD$．



取AB中点G，连结OG，

由题设知四边形$ABCD$为矩形，

所以$OF\perp CD$．

所以$PO\perp OG$．………………………1 分

如图建立空间直角坐标系$O-xyz$，

则$A(1,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$D(0,-1,0)$，

$B(1,1,0)$，$O(0,0,0)$，$G(1,0,0)$．

$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$．

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-2y=0,\\ y-z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=1$，$x=2$ ．

所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,1)$．

平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{OG}=(1,0,0)$．

设 $\boldsymbol{n},\overrightarrow{OG}$ 的夹角为 α，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

由图可知二面角 $A-PC-D$ 为锐角，

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． ……………………………10 分

（Ⅲ）设 M 是棱 PC 上一点，则存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$．

因此点 $M(0,\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,\lambda-1,1-\lambda)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$．

由 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$．

因为 $\lambda=\dfrac{1}{2}\in[0,1]$，所以在棱 PC 上存在点 M，使得 $BM\perp AC$．

此时，$\dfrac{PM}{PC}=\lambda=\dfrac{1}{2}$． ……………………………14 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$．

因为 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+1}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{a}{(x+1)^2}$．

因为 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，

所以 $f'(0)=0$，即 $\dfrac{1}{0+1}-\dfrac{a}{(0+1)^2}=0$．

所以 $a=1$．

此时，$f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$．

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，

所以 $a=1$.　　　　　　　　　　　　……………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为单调递增函数，

所以 $f(x)>f(0)=0$，

所以 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

因此，当 $a<1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+1}>\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}>0$，

$f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

当 $a>1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{a}{(x+1)^2}=\dfrac{x-(a-1)}{(x+1)^2}$，

所以，当 $x\in(0,a-1)$ 时，$f'(x)<0$，因为 $f(x)$ 在 $[0,a-1)$ 上单调递减，

所以 $f(a-1)<f(0)=0$.

所以当 $a>1$ 时，$f(x)>0$ 并非对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

综上，a 的最大值为1.　　　　　　　……………………………13 分

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$

解得 $b=\sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　　　……………………………5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),Q(x_3,y_3)$.

因为点 P 在直线 AO 上且满足 $|PO|=3|OA|$，

所以 $P(3x_1,3y_1)$.

因为 B,Q,P 三点共线，

所以 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BQ}$.

所以 $(3x_1-x_2,3y_1-y_2)=\lambda(x_3-x_2,y_3-y_2)$，

$\begin{cases}3x_1-x_2=\lambda(x_3-x_2),\\3y_1-y_2=\lambda(y_3-y_2).\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_3=\dfrac{3}{\lambda}x_1+\dfrac{\lambda-1}{\lambda}x_2,\\y_3=\dfrac{3}{\lambda}y_1+\dfrac{\lambda-1}{\lambda}y_2.\end{cases}$

因为点 Q 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{x_3^2}{4}+\dfrac{y_3^2}{3}=1$.

所以 $\dfrac{(\frac{3}{\lambda}x_1+\frac{\lambda-1}{\lambda}x_2)^2}{4}+\dfrac{(\frac{3}{\lambda}y_1+\frac{\lambda-1}{\lambda}y_2)^2}{3}=1$.

即 $\dfrac{9}{\lambda^2}(\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3})+(\dfrac{\lambda-1}{\lambda})^2(\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3})-\dfrac{6(\lambda-1)}{\lambda^2}(\dfrac{x_1x_2}{4}+\dfrac{y_1y_2}{3})=1$，

因为 A,B 在椭圆 C 上，

所以 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$， $\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$.

因为直线 OA,OB 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$，

所以 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{3}{4}$，即 $\dfrac{x_1x_2}{4}+\dfrac{y_1y_2}{3}=0$.

所以 $\dfrac{9}{\lambda^2}+(\dfrac{\lambda-1}{\lambda})^2=1$，解得 $\lambda=5$.

所以 $\dfrac{|BP|}{|BQ|}=|\lambda|=5$. ……………………………14 分

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）A_4 中所有与 x 正交的元素为 $(-1,-1,1,1)$，$(1,1,-1,-1)$，$(-1,1,-1,1)$，$(-1,1,1,-1)$，$(1,-1,-1,1)$，$(1,-1,1,-1)$. ……………………………3 分

（Ⅱ）对于 $m\in B$，存在 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{-1,1\}$，

$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),y_i\in\{-1,1\}$，

使得 $x\odot y=m$.

令 $\delta_i=\begin{cases}1, & x_i=y_i,\\0, & x_i\neq y_i\end{cases}$，$k=\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i$；当 $x_i=y_i$ 时 $x_iy_i=1$，当 $x_i\neq y_i$ 时 $x_iy_i=-1$.

那么 $x\odot y=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=k-(n-k)=2k-n$.

所以 $m+n=2k$ 为偶数. ……………………………8 分

（Ⅲ）8 个，2 个

$n=8$ 时，不妨设 $x_1=(1,1,1,1,1,1,1,1)$，$x_2=(-1,-1,-1,-1,1,1,1,1)$.

在考虑 $n=4$ 时，共有四种互相正交的情况即：$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}$，分别与 x_1,x_2 搭配，可形成 8 种情况.

所以 $n=8$ 时，A 中最多可以有 8 个元素. ……………………………10 分

$n=14$ 时，

不妨设 $y_1=(\underbrace{1,1,\cdots1}_{14个})$，$y_1=(\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{7个},\underbrace{1,1,\cdots1}_{7个})$，则 y_1 与 y_2 正交.

令 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_{14})$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_{14})$，$c=(c_1,c_2,\cdots,c_{14})$ 且它们互相正交.

设 a,b,c 相应位置数字都相同的共有 k 个，除去这 k 列外

a,b 相应位置数字都相同的共有 m 个，

b,c 相应位置数字都相同的共有 n 个.

则 $a\odot b=m+k-(14-m-k)=2m+2k-14=0$.

所以 $m+k=7$，同理 $n+k=7$.

可得 $n=m$.

由于 $a\odot c=-m-m+k+(14-k-2m)=0$，可得 $2m=7$，$m=\dfrac{7}{2}\notin \mathbf{N}^*$ 矛盾.

所以任意三个元素都不正交.

综上，$n=14$ 时，A 中最多可以有 2 个元素. ………13 分