# 2022 北京朝阳高二（上）期末

# 数　　学

2022.1

## 第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

（1）点 $(1,1)$ 到直线 $x-y-1=0$ 的距离是

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）1　　（D）$\sqrt{2}$

（2）$-2$ 与 $-8$ 的等差中项是

（A）$-5$　　（B）$-4$　　（C）4　　（D）5

（3）已知直线 $l$ 过点 $(0,1)$，且与直线 $x-2y+2=0$ 垂直，则直线 $l$ 的方程是

（A）$x+2y+1=0$　　（B）$2x+y+1=0$

（C）$x+2y-1=0$　　（D）$2x+y-1=0$

（4）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=$

（A）$\frac{1-\ln x}{x^2}$　　（B）$\frac{1+\ln x}{x^2}$　　（C）$\frac{\ln x+1}{x}$　　（D）$\frac{\ln x-1}{x}$

（5）已知圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$ 外切，则 $r=$

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（6）曲线 $f(x)=x^2e^x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

（A）$ex-y=0$　　（B）$2ex-y-e=0$

（C）$3ex-y-2e=0$　　（D）$4ex-y-3e=0$

（7）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，$a_1<0$，则"$q>1$"是"$\{a_n\}$ 为递减数列"的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）点 $M$ 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 内（包括边界）的动点．给出下列三个结论：

① 满足 $D_1M\ //\ BC_1$ 的点 $M$ 有且只有1个；

② 满足 $D_1M\perp B_1C$ 的点 $M$ 有且只有1个；

③ 满足 $D_1M\ //$ 平面 $A_1BC_1$ 的点 $M$ 的轨迹是线段．

则上述结论正确的个数是

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（9）已知 $A$，$B$ 是圆 $C: x^2+y^2=1$ 上的两点，$P$ 是直线 $x-y+m=0$ 上一点，若存在点 $A$，$B$，$P$，使得 $PA\perp PB$，则实数 $m$ 的取值范围是

（A）$[-1,1]$　　（B）$[-2,2]$　　（C）$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　（D）$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

（10）北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用，在数学上用曲率刻画空间弯曲性．规定：多面体的顶点的曲率等于 $2\pi$ 与多面体在该点的面角之和的差(多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制)，多面体面上非顶点的曲率均为零，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和．例如：正四面体在每个顶点有3个面角，每个面角是 $\frac{\pi}{3}$，所以正四面体在每个顶点的曲率为 $2\pi-3\times\frac{\pi}{3}=\pi$，故其总曲率为 $4\pi$．给出下列三个结论：

正方体在每个顶点的曲率均为 $\frac{\pi}{2}$；任意四棱锥的总曲率均为 $4\pi$；

③ 若某类多面体的顶点数 $V$，棱数 $E$，面数 $F$ 满足 $V-E+F=2$，则该类多面体的总曲率是常数．其中，所有正确结论的序号是

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）①②③

## 第二部分（非选择题 共 100 分）

### 二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）设函数 $f(x)=\sin x$，则 $f'(-\frac{\pi}{4})=$________．

（12）已知抛物线的焦点到准线的距离为1，则抛物线的标准方程为__________．（写出一个即可）

（13）日常生活中的饮用水通常是经过净化的．随着水的纯净度的提高，所需净化费用不断增加．已知将1吨水净化到纯净度为 $x\%$ 时所需费用（单位：元）为 $c(x)=\frac{5284}{100-x}\,(80<x<100)$．则净化到纯净度为99%时所需费用的瞬时变化率是净化到纯净度为95%时所需费用的瞬时变化率的______倍，这说明，水的纯净度越高，净化费用增加的速度越______（填“快”或“慢”）．

（14）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F$，过点 $F$ 作 $x$ 轴的垂线 $l$，$l$ 在第一象限与双曲线及其渐近线分别交于 $A,B$ 两点．若 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}$，则双曲线的离心率为___________．

（15）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$S_n=2a_n+n\,(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_1=$__________，$a_n=$_________．

（16）古希腊数学家阿波罗尼斯发现：平面内到两个定点 $A$，$B$ 的距离之比为定值 $\lambda$ $(\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆．人们将这个圆称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆．已知点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，动点 $M$ 满足 $\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{1}{2}$，记动点 $M$ 的轨迹为曲线 $W$，给出下列四个结论：

① 曲线 $W$ 的方程为 $(x+2)^2+y^2=4$；

② 曲线 $W$ 上存在点 $D$，使得 $D$ 到点 $(1,1)$ 的距离为 6；

③ 曲线 $W$ 上存在点 $E$，使得 $E$ 到点 $A$ 的距离大于到直线 $x=1$ 的距离；

④ 曲线 $W$ 上存在点 $F$，使得 $F$ 到点 $B$ 与点 $(-2,0)$ 的距离之和为8．其中所有正确结论的序号是______________．

## 三、解答题（本大题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

（17）（本小题 13 分）

已知$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=1$，$a_6=9$．

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n-a_n\}$是公比为3的等比数列，$b_1=1$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$．

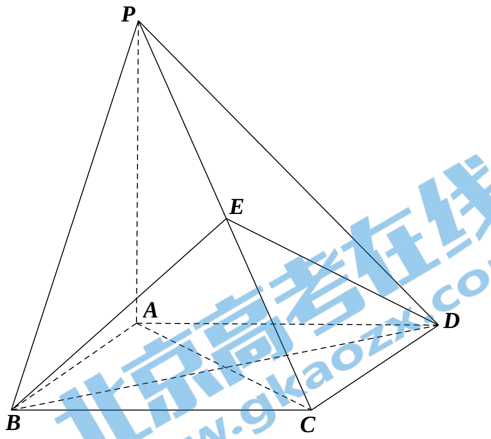
（18）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$PA=AB=1$，$PA\perp$底面$ABCD$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$E$是$PC$的中点.

（Ⅰ）求证：$PA//$平面$EBD$；

（Ⅱ）求证：平面$EBD\perp$平面$PAC$；

（Ⅲ）设点$Q$是平面$PCD$上任意一点，直接写出线段$BQ$长度的最小值．（不需证明）




（19）（本小题 15 分）

如图，直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为1的正方形，点$E$在棱$BB_1$上

（Ⅰ）求证：$A_1C_1\perp DE$；

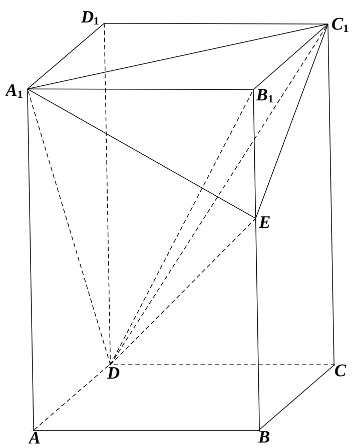
（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得$DB_1\perp$平面$EA_1C_1$，并给出证明.

条件①：$E$为$BB_1$的中点；

条件②：$BD_1//$平面$EA_1C_1$；

条件③：$DB_1\perp BD_1$．

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，求平面$EA_1C_1$与平面$DA_1C_1$夹角的余弦值．



（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 过点 $A(0,1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的方程；

（Ⅱ）过点 $A$ 作直线 $l$，$l$ 与直线 $y=2$ 和椭圆 $C$ 分别交于两点 $M$，$N$（$N$ 与 $A$ 不重合）. 判断以 $MN$ 为直径的圆是否过定点，如果过定点，求出定点坐标；如果不过定点，说明理由.

（21）（本小题 15 分）

已知项数为 $k\,(k\geqslant 3)$ 的数列 $\{a_n\}$ 是各项均为非负实数的递增数列. 若对任意的 $i$，$j$（$1\leqslant i\leqslant j\leqslant k$），$a_j+a_i$ 与 $a_j-a_i$ 至少有一个是数列 $\{a_n\}$ 中的项，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Re$.

（Ⅰ）判断数列 0，1，4，6 是否具有性质 $\Re$，并说明理由；

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Re$，求证：$2(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)=ka_k$；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Re$，且 $\{a_n\}$ 不是等差数列，求项数 $k$ 的所有可能取值.

# 2022北京朝阳高二（上）期末数学

## 参考答案

一、选择题（共10小题，每小题5分，共50分）

（1）B　（2）A　（3）D　（4）A　（5）D

（6）C　（7）C　（8）C　（9）B　（10）D

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（11）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（12）$y^2=2x$（答案不唯一）　（13）25；快

（14）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（15）$-1$；$1-2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$　（16）①④

三、解答题（共5小题，共70分）

（17）（共13分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$．

由题意得$\begin{cases}a_1+d=1, \\ a_1+5d=9,\end{cases}$

解得$a_1=-1$，$d=2$．

所以$a_n=a_1+(n-1)d=-1+(n-1)\times2=2n-3$．…………6分

（Ⅱ）因为$\{b_n-a_n\}$是公比为3的等比数列，又$b_1=1$，$a_1=-1$，

所以$b_n-a_n=(b_1-a_1)\times3^{n-1}=2\times3^{n-1}$，

所以$b_n=2\times3^{n-1}+a_n=2\times3^{n-1}+2n-3$．

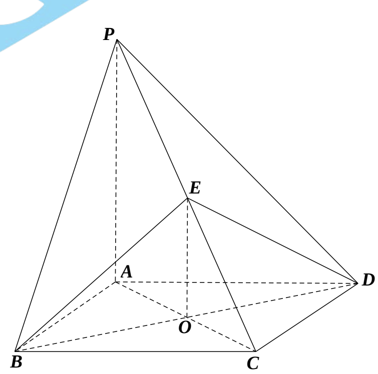
所以$S_n=2(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})+2(1+2+3+\cdots+n)-3n$

$=2\times\dfrac{1-3^n}{1-3}+\dfrac{2n(1+n)}{2}-3n$

$=3^n+n^2-2n-1$．　……………13分

（18）（共13分）

**解：**（Ⅰ）设$AC\cap BD=O$，连结$OE$．




因为底面$ABCD$为菱形，

所以$O$为$AC$的中点，

又因为$E$是$PC$的中点，

所以$PA\,//\,EO$．

又因为$PA\not\subset$平面$EBD$，$EO\subset$平面$EBD$，

所以$PA\,//$平面$EBD$．　…………5分

（Ⅱ）因为底面$ABCD$为菱形，

所以$BD\perp AC$．

因为$PA\perp$底面$ABCD$，

所以 $PA \perp BD$.

又因为 $PA \cap AC = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 $PAC$.

又因为 $BD \subset$ 平面 $EBD$,

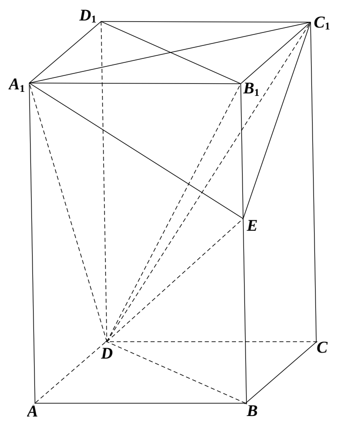
所以平面 $EBD \perp$ 平面 $PAC$. …………10 分

（III）线段 $BQ$ 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. …………13 分

（19）（共 15 分）

**解：**（Ⅰ）连结 $BD$， $B_1D_1$.

由直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 知， $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，




又 $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $BB_1 \perp A_1C_1$.

因为 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，

所以 $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

又 $B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$，

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 $D_1DBB_1$.

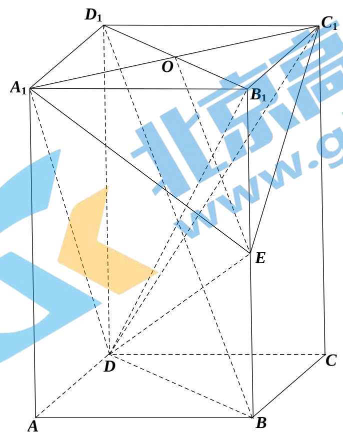
又 $DE \subset$ 平面 $D_1DBB_1$，

所以 $A_1C_1 \perp DE$. …………5 分

（Ⅱ）选条件①、条件③，可使 $DB_1 \perp$ 平面 $EA_1C_1$. 证明如下：

设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，连结 $OE$， $BD_1$.

又 $E$， $O$ 分别是 $BB_1$， $B_1D_1$ 的中点，




所以 $OE \mathbin{//} BD_1$.

因为 $DB_1 \perp BD_1$，所以 $DB_1 \perp OE$.

由（Ⅰ）知 $A_1C_1 \perp$ 平面 $D_1DBB_1$，

所以 $A_1C_1 \perp DB_1$.

又 $A_1C_1 \cap OE = O$，

所以 $DB_1 \perp$ 平面 $EA_1C_1$. …………10 分

（Ⅱ）选条件②、条件③，可使 $DB_1 \perp$ 平面 $EA_1C_1$. 证明如下：

设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，连结 $OE$.

因为 $BD_1 \mathbin{//}$ 平面 $EA_1C_1$， $BD_1 \subset$ 平面 $D_1DBB_1$，平面 $D_1DBB_1 \cap$ 平面 $EA_1C_1 = OE$，

所以 $BD_1 \mathbin{//} OE$.

因为 $DB_1 \perp BD_1$，所以 $DB_1 \perp OE$.

由（Ⅰ）知 $A_1C_1 \perp$ 平面 $D_1DBB_1$，所以 $A_1C_1 \perp DB_1$.

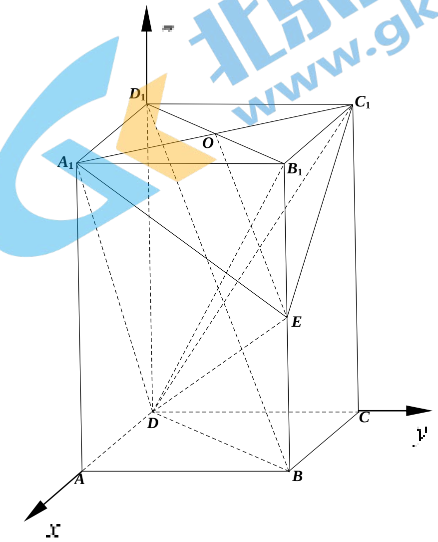
又 $A_1C_1 \cap OE = O$，

所以 $DB_1 \perp$ 平面 $EA_1C_1$.　　　　　　　　　…………10 分

（III）由（II）可知，四边形 $D_1DBB_1$ 为正方形，所以 $DD_1 = BD = \sqrt{2}$.

因为 $DA$，$DC$，$DD_1$ 两两垂直，

如图，以 $D$ 为原点，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，




则 $D(0,0,0)$，$A_1(1,0,\sqrt{2})$，$B_1(1,1,\sqrt{2})$，$C_1(0,1,\sqrt{2})$，

$E(1,1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$D_1(0,0,\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-1,1,0)$，$\overrightarrow{DA_1} = (1,0,\sqrt{2})$.

由（I）知平面 $EA_1C_1$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB_1} = (1,1,\sqrt{2})$.

设平面 $DA_1C_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y = 0, \\ x + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$

令 $x = \sqrt{2}$，则 $y = \sqrt{2}$，$z = -1$．于是 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$.

设平面 $EA_1C_1$ 与平面 $DA_1C_1$ 的夹角为 $\theta$，

则 $\cos\theta = |\cos < \boldsymbol{n}, \overrightarrow{DB_1} > | = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\overrightarrow{DB_1}|} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以平面 $EA_1C_1$ 与平面 $DA_1C_1$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.　　　　…………15 分（20）（共 14 分）

**解：**（I）由题意得，$b = 1$，$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$，

又因为 $a^2 = b^2 + c^2$，所以 $a^2 = 3$.

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.　　　　　…………5 分

（II）以 $MN$ 为直径的圆过定点 $(0,-1)$．理由如下：

当直线 $l$ 斜率存在时，设直线 $l$ 的方程为 $y = kx + 1$（$k \neq 0$）.

令 $y = 2$，得 $x = \frac{1}{k}$，所以 $M(\frac{1}{k},2)$.

由 $\begin{cases} y = kx + 1, \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2 + 6kx = 0$，则 $x = 0$ 或 $x = -\frac{6k}{1+3k^2}$，

所以 $N(-\frac{6k}{1+3k^2}, \frac{1-3k^2}{1+3k^2})$.

设 $P(x,y)$ 是以 $MN$ 为直径的圆上的任意一点，

则 $\overrightarrow{MP} = (x - \frac{1}{k}, y-2)$，$\overrightarrow{NP} = (x + \frac{6k}{1+3k^2}, y - \frac{1-3k^2}{1+3k^2})$.

由题意，$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$，

则以 $MN$ 为直径的圆的方程为 $(x+\frac{6k}{1+3k^2})(x-\frac{1}{k})+(y-\frac{1-3k^2}{1+3k^2})(y-2)=0$．

即 $3(x^2+y^2-y-2)k^3+3xk^2+(x^2+y^2-3y-4)k-x=0$ 恒成立.

即 $\begin{cases}x=0,\\y^2-y-2=0,\\y^2-3y-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1.\end{cases}$

故以 $MN$ 为直径的圆恒过定点 $(0,-1)$．

当直线 $l$ 斜率不存在时，以 $MN$ 为直径的圆也过点 $(0,-1)$．

综上，以 $MN$ 为直径的圆恒过定点 $(0,-1)$．　　　…………14 分

（21）（共 15 分）

**解：**（Ⅰ）数列 $0$，$1$，$4$，$6$ 不具有性质 $\Re$．

因为 $4+1=5$，$4-1=3$，$5$ 和 $3$ 均不是数列 $0$，$1$，$4$，$6$ 中的项，

所以数列 $0$，$1$，$4$，$6$ 不具有性质 $\Re$．　　　…………4 分

（Ⅱ）记数列 $\{a_n\}$ 的各项组成的集合为 $A$，

因为 $0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}<a_k$，$a_k+a_k>a_k$，

由数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Re$，$a_k+a_k\notin A$，所以 $a_k-a_k\in A$，即 $0\in A$，所以 $a_1=0$．

设 $2\leqslant i\leqslant k$，因为 $a_k+a_i\notin A$，所以 $a_k-a_i\in A$．

又 $0=a_k-a_k<a_k-a_{k-1}<\cdots<a_k-a_2<a_k-a_1$，

所以 $a_k-a_k=a_1$，$a_k-a_{k-1}=a_2$，$\cdots$，$a_k-a_2=a_{k-1}$，$a_k-a_1=a_k$．

将上面的式子相加得 $ka_k-(a_k+a_{k-1}+\cdots+a_2+a_1)=a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k$．

所以 $2(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)=ka_k$．　　　…………10 分

（Ⅲ）（i）当 $k=3$ 时，由（Ⅱ）知，$a_1=0$，$a_3-a_2=a_2=a_2-a_1$，

这与数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列矛盾，不合题意.

（ii）当 $k=4$ 时，存在数列 $0$，$2$，$6$，$8$，符合题意，故 $k$ 可取 $4$．

（iii）当 $k\geqslant 5$ 时，由（Ⅱ）知，$a_k-a_{k-i}=a_{i+1}\ (0\leqslant i\leqslant k-1)$．①

当 $3\leqslant i\leqslant k-1$ 时，$a_{k-1}+a_i>a_{k-1}+a_2=a_k$，所以 $a_{k-1}+a_i\notin A$，$a_{k-1}-a_i\in A$．

又 $0=a_{k-1}-a_{k-1}<a_{k-1}-a_{k-2}<\cdots<a_{k-1}-a_3<a_k-a_3=a_{k-2}$，

$0=a_1<a_2<\cdots<a_{k-3}<a_{k-2}$，

所以 $a_{k-1}-a_{k-1}=a_1$，$a_{k-1}-a_{k-2}=a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}-a_3=a_{k-3}$．

所以 $a_{k-1}-a_{k-i}=a_i\ (1\leqslant i\leqslant k-3)$．

由 $a_{k-1}-a_{k-1}=a_1$，$a_{k-1}-a_{k-2}=a_2$，得 $a_{k-1}-a_1=a_{k-1}$，$a_{k-1}-a_2=a_{k-2}$，

所以 $a_{k-1}-a_{k-i}=a_i\ (1\leqslant i\leqslant k-1)$．②

由①②两式相减得，$a_k-a_{k-1}=a_{i+1}-a_i\ (1\leqslant i\leqslant k-1)$，

这与数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列矛盾，不合题意.

综上，满足题设的 $k$ 的可能取值只有 4 .　　　　　　…………15 分