密云区 2020 届高三第一学期期末考试

数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1.若集合 $A=\{x|1\le x<3\}$，$B=\{x|-2\le x<2\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{x|1\le x<2\}$　　B. $\{x|1<x<2\}$　　C. $\{x|-2\le x<3\}$　　D. $\{x|-2<x<3\}$

2.双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的离心率是（　　）

A. $\dfrac{5}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

3.若函数 $y=f(x)$ 满足：对任意正整数 x，都有 $f(x+1)=f(x)+2$，且函数 $f(x)$ 的图象经过点 $M(1,1)$，则在下列选项中，函数 $f(x)$ 通过的点的坐标是（　　）

A. $(4,6)$　　B. $(4,7)$　　C. $(4,8)$　　D. $(4,9)$

4.若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0,\omega>0$）的相邻两个极小值点之间的距离为 π，最大值与最小值之差为 2，且 $f(x)$ 为奇函数，则函数 $y=f(\dfrac{\pi}{2})$ 的值是（　　）

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. ±1

5.“$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in Z$”是“$\sin x=\dfrac{1}{2}$”的（　　）

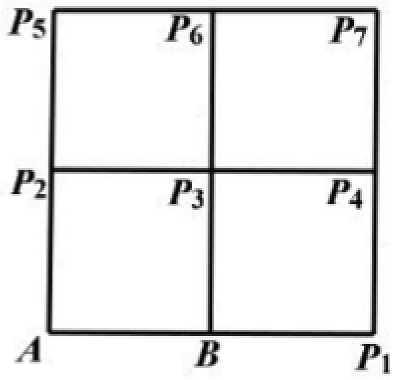
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6.下列函数中，既是偶函数，又是 $(0,+\infty)$ 上的增函数是（　　）

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$　　C. $y=2^x+2^{-x}$　　D. $y=2^x-2^{-x}$

7.如图所示，四个边长为 1 的正方形拼成一个大正方形，AB 是其中一个小正方形的一条边，$P_i(i=1,2,3,4,5,6,7)$ 是小正方形其余的顶点，则集合 $\{x|x=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i},i=1,2,3,4,5,6,7\}$ 中元素的个数为（　　）



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8.阶段测试后，甲、乙、丙、丁、戊五位同学排成一排按序走上领奖台领奖，其中甲和乙都在丙的前面走，则不同的排序方法种数共有（　　）

A. 20　　B. 40　　C. 60　　D. 80

9.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 0,\\ ax-1, x<0.\end{cases}$ 若存在实数 x_0，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $[-2,0)$　　D. $[-1,0)$

10.设非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义运算"*"：$\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\theta$.

下列命题

①若 $\vec{a}*\vec{b}=0$，则 $\vec{a}//\vec{b}$；

②设 ΔABC 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则 $2S_{\Delta ABC}=\vec{a}*\vec{b}$；

③$\vec{a}*\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}$（$\vec{c}$ 为任意非零向量）；

④若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，则 $\left(\vec{a}*\vec{b}\right)_{max}=1$.

其中正确命题的编号是（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ①②③　　D. ①②④

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

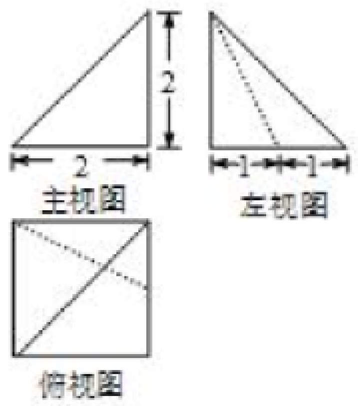
11.复数 $z=\dfrac{1}{1+i}$ 对应的点在第_____象限，复数 z 的实部是_______________.

12.抛物线 $x^2=-4y$ 的焦点坐标是______________，准线方程是_____________.

13.若数列 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，且 $a_4=a_2^3$，$a_3=4$，则公比 $q=$__________，其前 n 项和 $S_n=$______.

14.在ΔABC中，a,b,c分别是角A,B,C的对边，且$a=5$，$c=10$，$B=\frac{\pi}{3}$，则$b=$______，$A=$________.

15.某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为________.



16.密云某商场举办春节优惠酬宾赠券活动，购买百元以上单件商品可以使用优惠券一张，并且每天购物只能用一张优惠券．一名顾客得到三张优惠券，三张优惠券的具体优惠方式如下：

优惠券 1：若标价超过 50 元，则付款时减免标价的 10%；

优惠券 2：若标价超过 100 元，则付款时减免 20 元；

优惠券 3：若标价超过 100 元，则超过 100 元的部分减免 18%.

如果顾客需要先用掉优惠券 1，并且使用优惠券 1 比使用优惠券 2、优惠券 3 减免的都多，那么你建议他购买的商品的标价可以是__________元.

三、解答题: 本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17.已知角α的终边与以原点为圆心的单位圆交于点P，角β的终边与角α的终边关于直线$y=x$对称.

（Ⅰ）若α为第三象限角，点P的纵坐标为$-\frac{4}{5}$，

（i）求$\sin\alpha,\cos\alpha$和$\tan\alpha$的值；

（ii）求$\sin(\beta+\frac{\pi}{6})$的值.

（Ⅱ）求函数$f(\alpha)=\cos 2\alpha-\cos\alpha$的最小值.

18.甲、乙两位运动员一起参加赛前培训．现分别从他们在培训期间参加的若干次测试成绩中随机抽取 8 次，记录如下：

甲：82　81　79　78　95　88　93　84

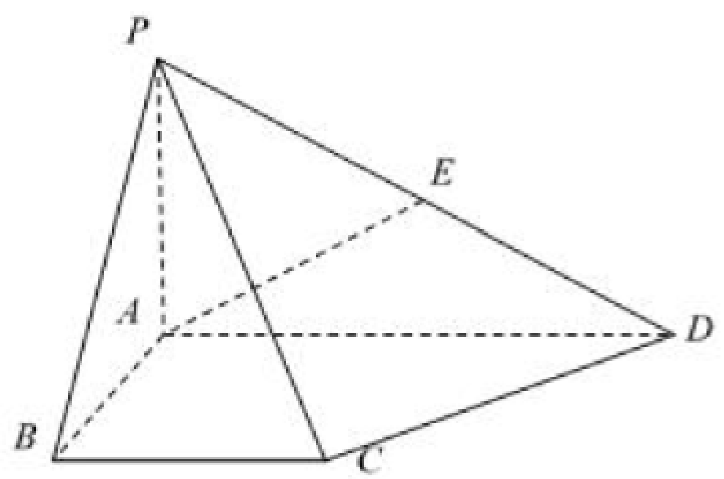
乙：86　85　79　86　84　84　85　91

（Ⅰ）请你运用茎叶图表示这两组数据；

（Ⅱ）若用甲 8 次成绩中高于 85 分的频率估计概率，对甲同学在今后的 3 次测试成绩进行预测，记这 3 次成绩中高于 85 分的次数为 ξ，求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$；

（Ⅲ）现要从中选派一人参加正式比赛，依据所抽取的两组数据分析，你认为选派哪位选手参加较为合适？并说明理由．

19.如图，在四棱锥中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC$，$\angle BAD=\angle PAD=90^\circ$，$PA=AB=BC=1$，$AD=2$，$BP=\sqrt{2}$，$E$ 为线段 PD 的中点.



（Ⅰ）求直线 AE 与平面 PCD 所成角的余弦值；

（Ⅱ）求二面角 $B-PC-D$ 的大小；

（Ⅲ）若 F 在段 AP 上，且直线 BF 与平面 PCD 相交，求 $\dfrac{AF}{AP}$ 的取值范围.

20.已知函数 $f(x)=\sin x+\ln x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上存在唯一的极大值点；

（Ⅲ）证明：函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

21.已知椭圆 M ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的长轴长为 4，离心率为 $\frac{1}{2}$. 直线 l_1,l_2 交于点 $A(1,\frac{3}{2})$ ，倾斜角互补，且直线 l_1,l_2 与椭圆 M 的交点分别为 B,C （点 B 在点 C 的右侧）.

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程；

（Ⅱ）证明：直线 BC 的斜率为定值；

（Ⅲ）在椭圆上是否存在一点 D ，恰好使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形，若存在，分别指出此时点 B,C 和 D 的坐标；若不存在，简述理由.

22.设数组$G=(a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1})$，$n\geq 2$，$a_i\in N^*$ $(i=1,2,\cdots,2n+1)$，数a_i称为数组G的元素．对于数组G，规定：

①数组G中所有元素的和为$S(G)=a_1+a_2,+\cdots+a_{2n+1}$；

②变换f，f将数组G变换成数组$f(G)=\left([\frac{a_1+1}{2}],[\frac{a_2+1}{2}],\cdots,[\frac{a_{2n+1}+1}{2}]\right)$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数；

③若数组$M=(b_1, b_2, \cdots, b_{2n+1})$，则当且仅当$a_i=b_i$ $(i=1,2,\cdots,2n+1)$时，$G=M$．

如果对数组G中任意$2n$个元素，存在一种分法，可将其分为两组，每组n个元素，使得两组所有元素的和相等，则称数组G具有性质P．

（Ⅰ）已知数组$A=(1,1,1,1,1)$，$B=(1,4,7,10,13)$，计算$f(A)$，$f(B)$，并写出数组A,B是否具有性质P；

（Ⅱ）已知数组G具有性质P，证明：$f(G)$也具有性质P；

（Ⅲ）证明：数组G具有性质P的充要条件是$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}$．

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1.【答案】C

【解析】

【分析】

根据集合的并运算，即可容易求得.

【详解】因为 $A=\{x|1\le x<3\}$， $B=\{x|-2\le x<2\}$，

故可得 $A\cup B=\{x|-2\le x<3\}$.

故选：C.

【点睛】本题考查集合并集的求解，属基础题.

2.【答案】D

【解析】

【分析】

由方程求得 a,b，即可由离心率计算公式求得结果.

【详解】因为双曲线的方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，故可得 $a=2,b=\sqrt{3}$，

故离心率 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选：D.

【点睛】本题考查双曲线离心率的求解，属基础题.

3.【答案】B

【解析】

【分析】

根据函数经过的点，以及 $f(x+1)=f(x)+2$，即可容易递推得到结果.

【详解】因为 $f(x)$ 过点 $(1,1)$，且 $f(x+1)=f(x)+2$，

故可得 $f(2)=f(1)+2=3$，$f(3)=f(2)+2=5, f(4)=f(3)+2=7$，

故 $f(x)$ 过点 $(4,7)$.

故选：B

【点睛】本题考查函数值的求解，属基础题.

4.【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意，结合正弦型函数的性质，即可容易求得函数解析式，再求函数值即可.

【详解】因为 $f(x)$ 相邻两个极小值点之间的距离为 π，故可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则 $\omega=2$；

又因为最大值与最小值之差为 2，故可得 $2A=2$，则 $A=1$；

又因为 $f(x)$ 是奇函数，故可得 $\varphi=k\pi, k\in N_{+}$；

故 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\sin(k+1)\pi=0$.

故选：C.

【点睛】本题考查由正弦型三角函数的性质求解析式，属综合基础题.

5.【答案】A

【解析】

【分析】

解正弦方程，结合题意即可容易判断

【详解】因为 $sinx=\frac{1}{2}$，故可得 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}, k\in Z$，

则“$x=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$”是“$\sin x=\frac{1}{2}$”的充分不必要条件.

故选：A.

【点睛】本题考查命题之间的关系，涉及三角方程的求解，属综合基础题.

6.【答案】C

【解析】

【分析】

根据函数解析式，求得函数单调性和奇偶性即可容易判断.

【详解】对$y=x^{\frac{1}{2}}$，其定义域为$[0,+\infty)$，不关于原点对称，故其不是偶函数，故A错误；

对$y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$，其在$(0,+\infty)$是减函数，故B错误；

对$y=2^x+2^{-x}$，其是偶函数，且在$(0,+\infty)$上为增函数，故C正确；

对$y=2^x-2^{-x}$，其是奇函数，故D错误.

故选：C.

【点睛】本题考查函数奇偶性和单调性的判断，涉及指数函数，对数函数，幂函数的性质，属综合基础题.

7.【答案】A

【解析】

【分析】

根据向量的数量积运算，即可容易判断.

【详解】根据数量积的定义，元素的个数取决于$\overrightarrow{AP_i}$在向量$\overrightarrow{AB}$方向的投影的结果的个数.

结合已知条件，由图可知：

$\overrightarrow{AP_5}$与$\overrightarrow{AP_2}$，$\overrightarrow{AP_6}$与$\overrightarrow{AP_3}$，$\overrightarrow{AP_7}$与$\overrightarrow{AP_4},\overrightarrow{AP_1}$在向量$\overrightarrow{AB}$方向的投影相同，

故集合$\{x|x=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i},i=1,2,3,4,5,6,7\}$中有3个元素.

故选：A.

【点睛】本题考查数量积的定义，属基础题.

8.【答案】B

【解析】

【分析】

先求出甲乙丙顺序确定时的所有方法，再考虑甲乙内部的排列即可.

【详解】根据题意，若甲乙丙顺序确定，则所有排法有 $\frac{A_5^5}{A_3^3}$ 种，

再考虑甲和乙的顺序，则所有排法有 $\frac{A_5^5}{A_3^3}\times A_2^2=40$ 种.

故选：B.

【点睛】本题考查部分元素定序问题的排列，属基础题.

9.【答案】A

【解析】

【分析】

将问题转化为方程有根的问题，进而根据二次方程根的分布即可求解.

【详解】根据题意，不妨设 $x_0>0$，则问题转化为方程 $x_0^2+ax_0+1=0$ 有正根，

则只需 �$=a^2-4\geq 0$ 且 $-a>0$，

解得 $a\in(-\infty,-2]$.

故选：A.

【点睛】本题考查一元二次方程根的分布问题，属中档题；其中问题的转化是关键.

10.【答案】D

【解析】

【分析】

根据新运算的定义，对选项进行逐一分析即可求得.

【详解】$\vec{a}*\vec{b}=0$，$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\theta=0$，解得 $\theta=0°$ 或 $\theta=180°$，故 $\vec{a}//\vec{b}$，则①正确；

由 $\vec{a}*\vec{b}$ 的定义可知，其结果表示以 $\vec{a},\vec{b}$ 为一组邻边的平行四边形的面积，

故 $2S_{\Delta ABC}=\vec{a}*\vec{b}$，则②正确；

不妨取 $\vec{c}=(1,0),\vec{b}=(0,1),\vec{a}=(1,1)$，故可得 $\vec{a}*(\vec{b}+\vec{c})=0$，

而 $\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}=\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$，显然不相等，故③错误；

若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，则 $\vec{a}*\vec{b}=sin\theta\in[0,1]$，故④正确.

故选：D.

【点睛】本题考查向量新定义问题，属中档题.

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.【答案】 (1). 四 (2). $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

根据复数的运算法则化简复数 z，再求对应点的坐标，以及实部即可.

【详解】因为 $z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，

故其对应的点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 位于第四象限，其实部为 $\frac{1}{2}$.

故答案为：四；$\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查复数的运算以及复数的几何意义，属综合基础题.

12.【答案】 (1). $(0,-1)$ (2). $y=1$

【解析】

【分析】

根据抛物线 $x^2=-2py$ 的焦点坐标为 $\left(0,-\frac{p}{2}\right)$，准线方程为 $y=\frac{p}{2}$，可得本题答案.

【详解】因为抛物线的标准方程为$x^2=-4y$，得$p=2$，所以其焦点左边为$(0,-1)$，准线方程为$y=1$.

故答案为：$(0,-1)$；$y=1$

【点睛】本题主要考查抛物线的焦点坐标和准线方程，属于基础题.

13.【答案】 (1). 2 (2). 2^n-1

【解析】

【分析】

根据等比数列的基本量求得公比和前n项和即可.

【详解】因为$\{a_n\}$是等比数列，且各项均为正数，故$q>0$；

又$a_4=a_1q^3=a_1^3q^3, a_3=a_1q^2=4$，故可得$a_1=1, q=2$.

$$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=2^n-1.$$

故答案为：2；2^n-1.

【点睛】本题考查等比数列的基本量求解，涉及前n项和的求解，属基础题.

14.【答案】 (1). $5\sqrt{3}$ (2). $\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】

根据余弦定理求得b；再根据正弦定理求得A即可.

【详解】因为$a=5$，$c=10$，$B=\frac{\pi}{3}$，

故可得$b=\sqrt{a^2+c^2-2accosB}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$；

根据正弦定理可得$sinA=\frac{asinB}{b}=\frac{1}{2}$，

又因为$b>a$则$B>A$，故可得$A=\frac{\pi}{6}$.

故答案为：$5\sqrt{3}$；$\frac{\pi}{6}$.

【点睛】本题考查利用正弦定理和余弦定理解三角形，属基础题.

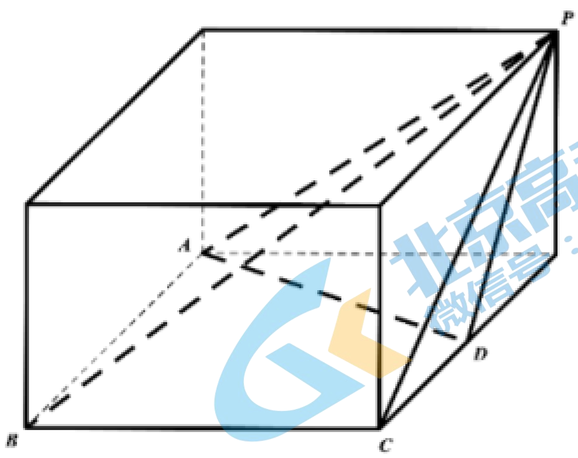
15.【答案】2

【解析】

【分析】

根据三视图还原几何体，再利用棱锥的体积公式即可求得.

【详解】根据三视图还原几何体如下所示：



则容易知 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(1+2)\times 2=3$，$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 3\times 2=2$.

故答案为：2.

【点睛】本题考查由三视图还原几何体，以及棱锥体积的计算，属基础题.

16.【答案】201

【解析】

【分析】

根据题意，构造函数，由函数的值域即可容易求得.

【详解】设标价为 x，

则当 $x>50$ 时，优惠金额 $y=\frac{x}{10}$；

当 $x>100$ 时，优惠券 2 的优惠金额 $y=20$，优惠券 3 的优惠金额 $y=\frac{9}{50}(x-100)$.

故当标价在 $(50,100]$ 之间，只能用优惠券 1，故不满足题意；

当标价超过 100 时，若满足题意，$\frac{x}{10}>20$，且 $\frac{x}{10}>\frac{9}{50}(x-100)$，

解得 $200<x<225$.

则答案不唯一，只需在区间 $(200,225)$ 内任取一个元素即可.本题中选取标价为 201.

故答案为：201.

【点睛】本题考查实际问题中函数模型的应用，属中档题.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17.【答案】（Ⅰ）（i）$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$．$\tan\alpha=\frac{4}{3}$．（ii）$\frac{-3\sqrt{3}-4}{10}$ （Ⅱ）$-\frac{9}{8}$

【解析】

【分析】

（Ⅰ）（i）根据三角函数的定义，以及同角三角函数关系，即可容易求得；

（ii）由角度终边的对称性，求得 $sin\beta,cos\beta$，再用正弦的和角公式即可求得；

（Ⅱ）利用余弦的倍角公式，将函数转化为关于 $\cos\alpha$ 的二次函数，求其值域即可.

【详解】（Ⅰ）（i）因为角 α 的终边与单位圆交于点 P，P 的纵坐标为 $-\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，又因为 α 为第三象限角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$.

因此 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.

（ii）因为角 β 的终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称，

所以 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{4}{5}$.

$$\sin(\beta+\frac{\pi}{6})=\sin\beta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\beta\sin\frac{\pi}{6}$$

$=-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3\sqrt{3}-4}{10}$.

（Ⅱ） $f(\alpha)=\cos 2\alpha-\cos\alpha=2\cos^2\alpha-\cos\alpha-1$

$=2(\cos\alpha-\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{8}$.

由 $\cos\alpha\in[-1,1]$，

所以当 $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$ 时，$f(\alpha)$ 有最小值 $-\dfrac{9}{8}$.

【点睛】本题考查三角函数的定义，同角三角函数关系，诱导公式，以及二次型三角函数的最值，属综合基础题.

18.【答案】（Ⅰ）茎叶图见解析（Ⅱ）分布列见解析，$E\xi=\dfrac{9}{8}$.（Ⅲ）派乙比较合适，理由见解析

【解析】

【分析】

（Ⅰ）根据茎叶图的绘制方法，结合数据绘制即可；

（Ⅱ）先计算高于85分的概率，再求得 ξ 的取值，由二项分布的概率求解即可求得其分布列；

（Ⅲ）求出两组数据的平均数和方差，据此判断即可.

【详解】（Ⅰ）作出茎叶图如下：

甲		乙
8，9	7	9
1, 2, 4，8	8	6, 6, 5, 5, 4, 4
3, 5	9	1

（Ⅱ）记“甲同学在一次数学竞赛中成绩高于 85 分”为事件 A，$P(A)=\dfrac{3}{8}$.

随机变量 ξ 的可能取值为 0，1，2，3，且 $\xi\sim B(3,\dfrac{3}{8})$.

所以 $P(\xi=k)=C_3^k\left(\dfrac{3}{8}\right)^k\left(\dfrac{5}{8}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$.

所以变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{27}{512}$

$E\xi=0\times\frac{125}{512}+1\times\frac{225}{512}+2\times\frac{135}{512}+3\times\frac{27}{512}=\frac{9}{8}$.

（Ⅲ）派乙参赛比较合适.

理由如下：

$\overline{x_{甲}}=\frac{1}{8}(78+79+81+82+84+88+93+95)=85$，

$\overline{x_{乙}}=\frac{1}{8}(79+84\times2+85\times2+86\times2+91)=85$，

$s_{甲}{}^2=\frac{1}{8}\left[(78-85)^2+(79-85)^2+(81-85)^2+(82-85)^2+(84-85)^2+\right.$

$\left.(88-85)^2+(93-85)^2+(95-85)^2\right]=35.5$，

$s_{乙}{}^2=\frac{1}{8}\left[(79-85)^2+2\times(84-85)^2+2\times(85-85)^2+2\times(86-85)^2+(91-85)^2\right]=9.5$

因为 $\overline{x_{甲}}=\overline{x_{乙}}$， $s_{甲}{}^2>s_{乙}{}^2$，

说明乙的成绩较稳定，更容易发挥队员水平，

所以派乙参赛比较合适.

【点睛】本题考查茎叶图的绘制，以及平均数和方差的计算，以及二项分布的分布列求解，属综合中档题.

19.【答案】（Ⅰ）$\frac{\sqrt{105}}{15}$ （Ⅱ）$\frac{5\pi}{6}$ （Ⅲ）$\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$

【解析】

【分析】

以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系：

（Ⅰ）求得直线的方向向量和平面的法向量，通过向量的夹角求得线面角的夹角；

（Ⅱ）求出平面 PBC,PCD 的法向量，利用向量法求二面角的大小；

（Ⅲ）设出 F 点坐标，根据 BF 的方向向量和法向量不垂直，即可求得范围.

【详解】（Ⅰ） 因为 $\angle BAD=\angle PAD=90^0$，

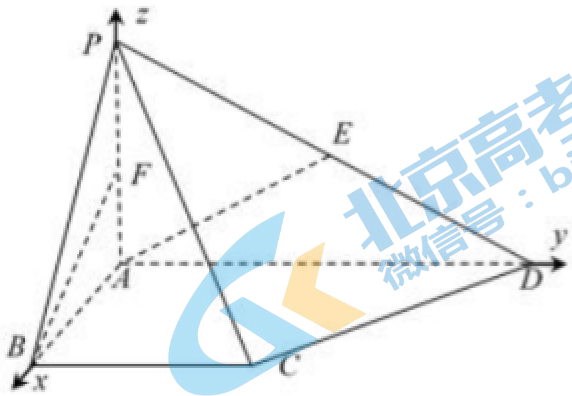
所以 $AB\perp AD, AP\perp AD$；

又因为 $PA=AB=1$， $BP=\sqrt{2}$，

所以 $AP^2+AB^2=PB^2$，

因此 $AP\perp AB$.

以 A 为原点建立空间直角坐标系，如图所示.



则 $A(0,0,0)$， $B(1,0,0)$， $C(1,1,0)$，

$D(0,2,0)$， $P(0,0,1)$， $E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$， $\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$， $\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$.

设平面 PCD 的法向量 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$ 得： $\begin{cases}-x+y=0,\\ 2y-z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\vec{m}=(1,1,2)$

设直线 AE 与平面 PCD 所成角为 θ，

则有 $sin\theta=\left|cso\left\langle\overrightarrow{AE},\vec{m}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$

所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{105}}{15}$.

即：直线 AE 与平面 PCD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{15}$.

（Ⅱ）同理可得：平面 BPC 的法向量 $\vec{n}=(1,0,1)$，

则有 $cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1+2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

因为二面角 $B-PC-D$ 的平面角为钝角，

所以二面角 $B-PC-D$ 的大小为 $\dfrac{5\pi}{6}$.

（Ⅲ）设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AP}\ (0\le\lambda\le1)$，

由 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$ 得：$F=(0,\ 0,\ \lambda)$.

则 $\overrightarrow{BF}=(-1,0,\lambda)$，

又因为直线 BF 与平面 PCD 相交，

所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\vec{m}\ne0$.

即：$(-1)\times1+2\lambda\ne0$，解得：$\lambda\ne\dfrac{1}{2}$

所以 $\dfrac{AF}{AP}$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$.

【点睛】本题考查利用向量法求线面角，二面角，以及由线面不平行推证线段比例关系，属综合中档题.

20.【答案】（Ⅰ）$y=\dfrac{2}{\pi}x+\ln\dfrac{\pi}{2}$（Ⅱ）证明见解析（Ⅲ）证明见解析

【解析】

【分析】

（Ⅰ）求导，从而解得切线的切率，根据点斜式即可求得结果；

（Ⅱ）根据 $f'(x)$ 的单调性，即可容易求证；

（III）根据 $f'(x)$ 的正负，判断函数 $f(x)$ 的单调性，即可容易证明.

【详解】（I）因为 $f(x)=\sin x+\ln x, x>0$，

所以 $f'(x)=\cos x+\frac{1}{x}$，$x>0$，

$k=f'(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$，

又因为 $f(\frac{\pi}{2})=1+\ln\frac{\pi}{2}$，

所以切线方程为 $y-(1+\ln\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}(x-\frac{\pi}{2})$，

即：$y=\frac{2}{\pi}x+\ln\frac{\pi}{2}$.

（II）证明：因为 $y=\cos x$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $f'(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

且 $f'(1)=\cos 1+1>0$.

又 $f'(3)=\cos 3+\frac{1}{3}<\cos\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}<0$，

所以在 $(1,3)$ 内有且仅有一个实数 x_0，使得 $f'(x_0)=0$，

并且当 $1<x<x_0$ 时，$f'(x)>f'(x_0)=0$，

当 $x_0<x<3$ 时，$f'(x)<f'(x_0)=0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上有唯一的极大值点 x_0.

（III）证明：当 $x>\mathrm{e}$ 时，

$\ln x>1$，$\sin x\geq -1$，

此时 $f(x)=\sin x+\ln x>0$.

当 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$ 时，

$\ln x \geq 0$，$\sin x > 0$，

此时 $f(x)=\sin x+\ln x>0$.

当 $0<x<1$ 时，

因为 $f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增.

因为 $f(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=-1+\sin\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，$f(1)=\sin 1>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且仅有一个零点.

综上所述，函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

【点睛】本题考查利用导数求函数的极值点个数和零点个数，以及用导数的几何意义求切线的斜率.

21.【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（Ⅱ）证明见解析（Ⅲ）存在，$B(2,0),C(-1,\dfrac{3}{2}),D(-2,0)$

【解析】

【分析】

（Ⅰ）根据长轴长和离心率即可容易求得 a,b,c，则椭圆方程可得；

（Ⅱ）由 A 点在椭圆上，结合 l_1,l_2 的斜率互为相反数，结合韦达定理，即可容易求得 B,C 两点的坐标，即可求证斜率为定值；

（Ⅲ）根据题意，即可容易求得对应点的坐标.

【详解】（Ⅰ）根据题意得 $\begin{cases}2a=4,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

所以椭圆 M 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）易知点 $A(1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆 M 上.

设直线 l_1：$y-\dfrac{3}{2}=k(x-1)$，即 $y=kx-k+\dfrac{3}{2}$.

令 $\begin{cases} y = kx - k + \dfrac{3}{2}, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12. \end{cases}$

消去 y 得 $(3+4k^2)x^2 + 4k(3-2k)x + 4k^2 - 12k - 3 = 0$.

设 $B(x_1, y_1)$，则 $x_1 x_A = \dfrac{4k^2 - 12k - 3}{3 + 4k^2}$.

所以 $x_1 = \dfrac{4k^2 - 12k - 3}{3 + 4k^2}$.

因为直线 l_1 和 l_2 的倾斜角互补，所以直线 l_2 : $y = -kx + k + \dfrac{3}{2}$.

设 $C(x_2, y_2)$，同理可得 $x_2 = \dfrac{4k^2 + 12k - 3}{3 + 4k^2}$.

所以 $k_{BC} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{kx_1 - k + \frac{3}{2} - (-kx_2 + k + \frac{3}{2})}{x_1 - x_2} = \dfrac{k(x_1 + x_2 - 2)}{x_1 - x_2}$

$= \dfrac{k\left(\frac{4k^2 - 12k - 3}{3 + 4k^2} + \frac{4k^2 + 12k - 3}{3 + 4k^2} - 2\right)}{\frac{4k^2 - 12k - 3}{3 + 4k^2} - \frac{4k^2 + 12k - 3}{3 + 4k^2}} = \dfrac{1}{2}$.

即直线 BC 的斜率为定值 $\dfrac{1}{2}$.

（III）存在 $B(2,0), C(-1, \dfrac{3}{2}), D(-2, 0)$ 符合已知条件，

且使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

【点睛】本题考查椭圆方程的求解，以及椭圆中定值问题的证明，属综合中档题.

22.【答案】（Ⅰ）数组 A 是具有性质 P，数组 B 不具有性质 P．（Ⅱ）证明见解析（Ⅲ）证明见解析

【解析】

【分析】

（Ⅰ）根据题意，即可容易得 $f(A), f(B)$，则可判断；

（Ⅱ）对 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 都为奇数和都为偶数，结合性质 P 的定义，即可证明；

（Ⅲ）从充分性和必要性上，结合（Ⅱ）中所求，即可证明.

【详解】（Ⅰ）$f(A)=(1,1,1,1,1)$，$f(B)=(1,2,4,5,7)$；

数组 A 是具有性质 P，数组 B 不具有性质 P.

（Ⅱ）证明：当元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 均为奇数时，

因为 $\left[\frac{a_i+1}{2}\right]=\frac{a_i+1}{2}$，$i=1,2,\cdots,2n+1$，所以 $f(G)=(\frac{a_1+1}{2},\frac{a_2+1}{2},\cdots,\frac{a_{2n+1}+1}{2})$.

对 $f(G)$ 中任意 $2n$ 个元素，不妨设为 $\frac{a_{i_1}+1}{2},\frac{a_{i_2}+1}{2},\cdots,\frac{a_{i_{2n}}+1}{2}$.

因为数组 G 具有性质 P，所以对于 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{2n}}$，

存在一种分法：将其分为两组，每组 n 个素，使得各组内所有元素之和相等.

如果用 $\frac{a_{i_k}+1}{2}$ 替换上述分法中的 a_{i_k}（$k=1,2,\cdots,2n$），

就可以得到对于 $\frac{a_{i_1}+1}{2},\frac{a_{i_2}+1}{2},\cdots,\frac{a_{i_{2n}}+1}{2}$ 的一种分法：

将其分为两组，每组 n 个元素，显然各组内所有元素之和相等.

所以此时 $f(G)$ 也具有性质 P.

当元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 均为偶数时，

因为 $\left[\frac{a_i+1}{2}\right]=\left[\frac{a_i}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{a_i}{2}$，$i=1,2,\cdots,2n+1$，所以 $f(G)=(\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{2},\cdots,\frac{a_{2n+1}}{2})$.

对 $f(G)$ 中任意 $2n$ 个元素，不妨设为 $\frac{a_{i_1}}{2},\frac{a_{i_2}}{2},\cdots,\frac{a_{i_{2n}}}{2}$.

因为数组 G 具有性质 P，所以对于 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{2n}}$，

存在一种分法：将其分为两组，每组 n 个元素，使得各组内所有元素之和相等.

如果用 $\frac{a_{i_k}}{2}$ 替换上述分法中的 a_{i_k}（$k=1,2,\cdots,2n$），

就可以得到对于 $\frac{a_{i_1}}{2},\frac{a_{i_2}}{2},\cdots,\frac{a_{i_{2n}}}{2}$ 的一种分法：

将其分为两组，每组 n 个元素，显然各组内所有元素之和相等.

所以此时 $f(G)$ 也具有性质 P .

综上所述，由数组 G 具有性质 P 可得 $f(G)$ 也具有性质 P .

（III）证明：（1）充分性：显然成立.

（2）必要性：

因为数组 G 具有性质 P，所以对于数组 G 中任意 $2n$ 个元素，存在一种分法：

将 $2n$ 个元素平均分成 2 组，并且各组内所有元素之和等于同一个正整数，

所以 $S(G)-a_i$ 均为偶数，从而元素 $a_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$ 的奇偶性相同.

由（II）可知，如果数组 G 具有性质 P，

那么 $f(G)=(\frac{a_1+1}{2},\frac{a_2+1}{2},\cdots,\frac{a_{2n+1}+1}{2})$ 仍具有性质 P .

又因为，当 $a_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$ 为奇数时，

$1\leqslant[\frac{a_i+1}{2}]=\frac{a_i+1}{2}\leqslant a_i$，当且仅当 $a_i=1$ 时等号成立，

当 $a_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$ 为偶数时，

$1\leqslant[\frac{a_i+1}{2}]=[\frac{a_i}{2}+\frac{1}{2}]=\frac{a_i}{2}<a_i$，

由此得到 $f(G)=G$ 的充要条件是 $G=(1,1,1,1,1)$.

易知 $2n+1\leqslant[\frac{a_1+1}{2}]+[\frac{a_2+1}{2}]+\cdots+[\frac{a_{2n+1}+1}{2}]\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}$，

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}=1$ 时等号成立.

即 $2n+1\leqslant S(f(G))\leqslant S(G)$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}=1$ 时等号成立.

令 $G_1=G$，$G_{k+1}=f(G)$，$k\in N^*$.

假设对于任意的 $k\in N^*$，有 $f(G_k)\neq G_k$，则 $S(f(G_k))<S(G_k)$，

又 $a_i\in N^*$，$[\frac{a_i+1}{2}]\in N^*$，得 $S(f(G_k))\leqslant S(G_k)-1$，即 $S(G_{k+1})\leqslant S(G_k)-1$.

得 $S(G_2)\leqslant S(G_1)-1$ ，…，

$S(G_k) \leqslant S(G_{k-1})-1$，

所以 $S(G_k) \leqslant S(G_1)-(k-1)=S(G)-(k-1)$，且 $S(G_k)$ 单调递减.

又因为 $S(G_k) \geqslant 2n+1$，矛盾.

所以存在 $k_0 \in N^*$，有 $f(G_{k_0})=G_{k_0}$.

又由结论 1，得此时 $G_{k_0}=(1,1,1,1,1)$.

上述过程倒推回去，

因为数组 $G_k(k=1,2,\cdots,k_0)$ 均具有性质 P，即数组 G_k 中元素 $a_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$

的奇偶性相同，可得数组 G_k 中的所有元素都相同，

所以，数组 $G_1=G$ 中的元素均相同，即 $a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}$.

【点睛】本题考查集合新定义问题，属综合困难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。