东城区 2021-2022 学年度第一学期期末统一检测

高三数学

本试卷共 9 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

解析：观察法.

看 A 里的 5 个数哪个在 B 里的范围，选 A.

2. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的为

A. $f(x)=\ln x$　　B. $f(x)=2^x$　　C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=\sin x$

解析：奇函数，排除 A,B，增函数，排除 D，选 C.

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3^2=16a_2$，则 $a_4=$

A. 32　　B. 16　　C. 8　　D. 4

解析：$(a_1q^2)^2=16a_1q$，化简得 $a_1q^3=16=a_4$，选 B.

4. 在二项式 $(x-\frac{2}{x})^5$ 的展开式中，含 x^3 项的系数为

A. 5　　B. -5　　C. 10　　D. -10

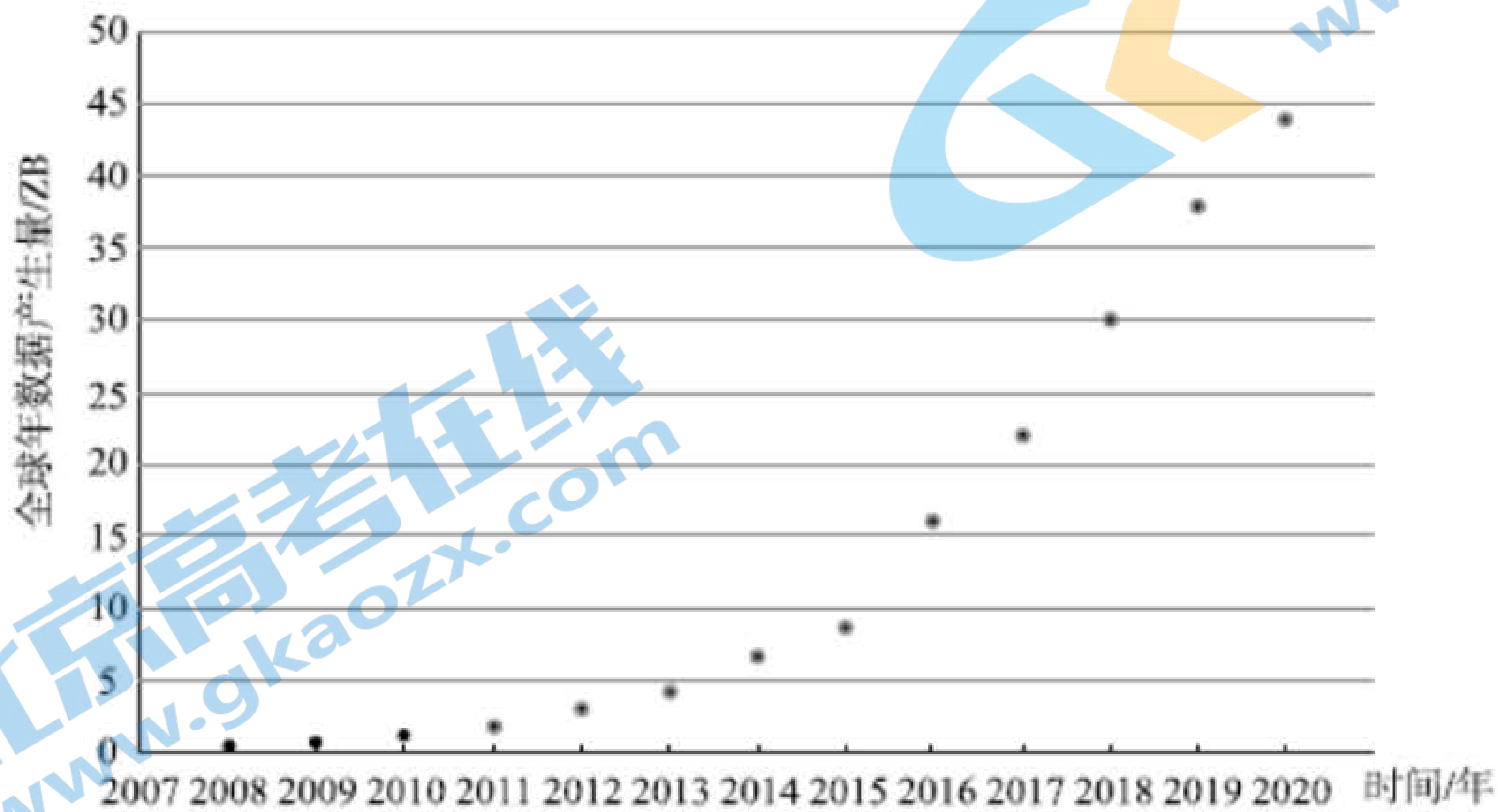
解析：$C_5^1\cdot x^4\cdot(-\frac{2}{x})^1=-10x^3$，选 D.

5. 在平面直角坐标系中，角 α 的终边过点 $(-1,0)$，将 α 的终边绕原点按逆时针方向旋转 $120°$ 与角 β 的终边重合，则 $\cos\beta=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：可令 $\alpha=-\pi$，$\beta=-\pi+\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，故 $\cos\beta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.选 A.

6. 人类已进入大数据时代. 目前，全球年数据产生量已经从TB级别跃升到PB，EB乃至ZB级别（$1TB=1024GB$，$1PB=1024TB$，$1EB=1024PB$，$1ZB=1024EB$）. 由国际数据公司IDC的研究结果得到2008年至2020年全球年数据产生量（单位： ZB）的散点图.



根据散点图，下面四个选项中最适宜刻画2008年至2020年全球年数据产生量 y 和实际 x 的函数模型是

A. $y=a+bx$　　B. $y=a+b\sqrt{x}$　　C. $y=a+b\ln x$　　D. $y=a+be^{x}$

解析：看哪个选项的函数图象与将散点图连起来最相似，选 D.

7. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为 C 上一点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 M. 若 $MF=PF$，则 $PM=$

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

解析： $MF=PF=PM=2\times(1+1)=4$，选 C.

8. 已知直线 $l: y=mx-m-1$， P 为圆 $C: x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 上一动点，设 P 到直线 l 距离的最大值为 $d(m)$，当 $d(m)$ 最大时， m 的值为

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

解析：直线过动点 $(1,-1)$，圆的圆心为 $C(2,1)$，半径 2，$d(m)_{\max}=\sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2}+2=\sqrt{5}+2$，

此时 $m=-\dfrac{1}{\dfrac{1-(-1)}{2-1}}=-\dfrac{1}{2}$， 选 A.

9. 已知点 A,B,C 不共线，λ,μ 为实数，$AP=\lambda AB+\mu AC$，则“$0<\lambda+\mu<1$”是“点 P 在 $\triangle ABC$ 内（不含边界）”的

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

解析：前推后，若 $\lambda=0$，$\mu=\frac{1}{2}$，则点 P 在 $\triangle ABC$ 边界上，错误；

后推前，若 P 在 BC 上，$\lambda+\mu=1$，若 P 在 AB 或 AC 上，$0\le\lambda+\mu\le1$，

若点 P 在 $\triangle ABC$ 内（不含边界），可推出 $0<\lambda+\mu<1$，正确；

故选 B.

10. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的数列，且 $a_1=3$，$a_7=8$，对 $\forall k\in N^*$，$a_{k+1}=a_k+1$ 与 $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_{k+2}$ 有且仅有一个成立，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7$ 的最小值为

A. 18　　B. 20　　C. 21　　D. 22

解析：这个题我太爱了！宗旨就是在两个条件一对一错的前提下，尽量让每一项最小.

$a_2=a_1+1$，×	$a_3=a_2+1$，√	$a_4=a_3+1$，×	$a_5=a_4+1$，√	$a_6=a_5+1$，√	$a_7=a_6+1$，×
$a_3=2a_2$，√	$a_4=2a_3$，×	$a_5=2a_4$，√	$a_6=2a_5$，×	$a_7=2a_6$，×	$a_8=2a_7$，√

前 8 项分别为：3，1，2，1，2，3，8，16，故前 7 项的和 $=3+1+2+1+2+3+8=20$，选 B.

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 在复平面内，复数 z 对应点的坐标是 $(-1,2)$，则 $\bar{z}=$_________.

解析：$z=-1+2i$，则 $\bar{z}=-1-2i$.

12. 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的两条渐近线互相垂直，则 $b=$_________；C 的离心率为_________.

解析：故渐近线为 $y=\pm x$，即 $a=b=1$，$c=\sqrt{2}$，故 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

13. 已知 l,m 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，写出以 l,m,α,β 之间的部分位置关系为条件（$l\perp\alpha$ 除外），$l\perp\alpha$ 为结论的一个真命题：______________________.

解析：答案不唯一.若 $\alpha//\beta$，$l//m$，$m\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$.

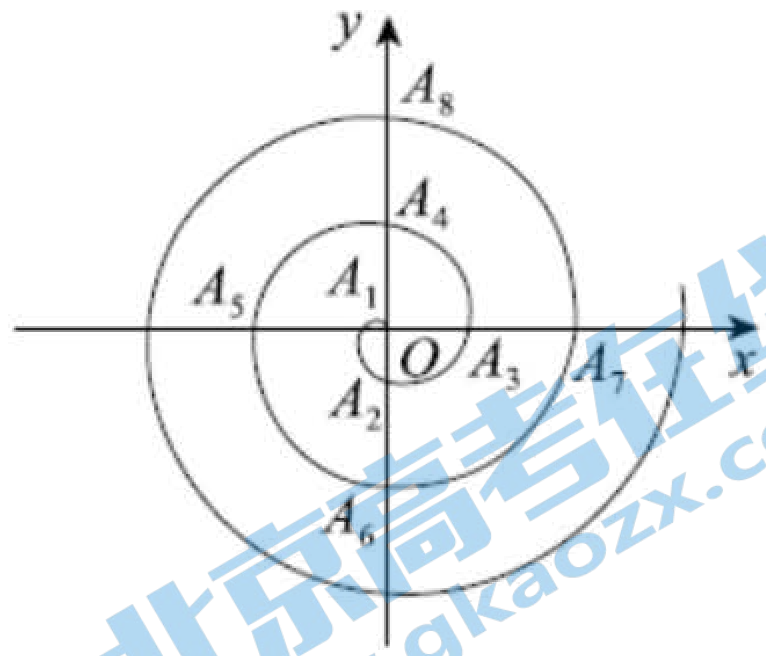
14. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的非负零点按照从小到大的顺序分别记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$.

若 $x_3-x_2=\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$__________；$x_{21}=$__________.

解析：$x_3-x_2=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{2|\omega|}$，故 $\omega=2$；

$x_{21}=x_1+20\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+10\pi=\frac{31\pi}{3}$.

15. 阿基米德螺线广泛存在与自然界中，具有重要作用. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，螺线与坐标轴依次交于点 $A_1(-1,0)$，$A_2(0,-2)$，$A_3(3,0)$，$A_4(0,4)$，$A_5(-5,0)$，$A_6(0,-6)$，$A_7(7,0)$，$A_8(0,8)$，并按这样的规律继续下去. 给出下列四个结论：



①对于任意正整数 n，$A_nA_{n+4}=4$；

②存在正整数 n，A_nA_{n+1} 为整数；

③存在正整数 n，三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 的面积为 2022；

④对于任意正整数 n，三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 为锐角三角形.

其中所有正确结论的序号是__________.

解析：

对于①，$A_nA_{n+4}=n+4-n=4$，正确；

对于②，$A_3A_4=5$，正确；

对于③，三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2n+2)\times(n+1)=(n+1)^2=2022$，无正整数解，错误；

对于④，设最大角为 α，因为 $(\sqrt{n^2+(n+1)^2})^2+(\sqrt{(n+2)^2+(n+1)^2})^2-(2n+2)^2=2>0$，

故 $\cos\alpha>0$，最大角 α 为锐角，④正确.

填①②④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）在△ ABC 中，$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

（Ⅰ）求证：△ ABC 为等腰三角形；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使△ ABC 存在且唯一，求 b 的值.

条件①：$\angle B=\frac{\pi}{6}$；

条件②：△ ABC 的面积为 $\frac{15}{2}$；

条件③：AB 边上的高为 3.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

解：(Ⅰ)在△ABC 中，$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

设 $a=5m$，$b=\sqrt{10}m$，其中 $m>0$.

根据余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得

$25m^2=10m^2+c^2-2c\times\sqrt{10}m\times\frac{\sqrt{10}}{10}$.

整理，得 $c^2-2mc-15m^2=0$，

因为 $c>0$，解得 $c=5m$，所以 $a=c$.

所以△ABC 为等腰三角形. ………………………………………… 6 分

(Ⅱ)若选择条件②：在△ABC 中，由 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，得 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}m\times5m\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{15}{2}m^2=\frac{15}{2}$.

解得 $m=1$，即 $b=\sqrt{10}$. ………………………………………… 13 分

若选择条件③：在△ABC 中，由 AB 边上的高为 3，得 $b\sin A=3$.

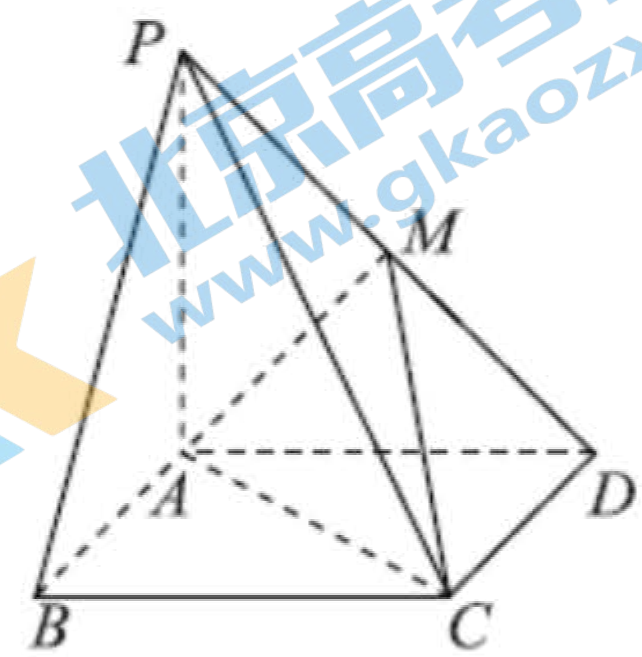
由 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，得 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

解得 $b=\sqrt{10}$. ………………………………………… 13 分

17.（本小题 14 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=PB$，M 为线段 PD 的动点.

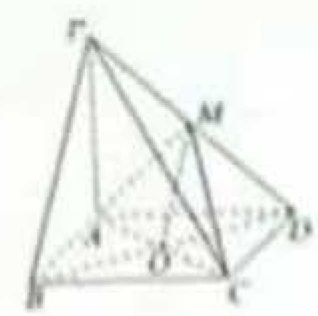
（Ⅰ）若直线 PB // 平面 ACM，求证：M 为 PD 的中点；

（Ⅱ）若平面 PAC 与平面 MAC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 $\frac{PM}{MD}$ 的值.



(17)(共 14 分)

解:(Ⅰ)如图,连接 BD,交 AC 于点 O,连接 MO.



因为直线 PB // 平面 ACM,

又平面 PBD∩平面 ACM=MO,

$PB\subset$ 平面 PBD,

所以 PB // MO.

因为正方形 ABCD,

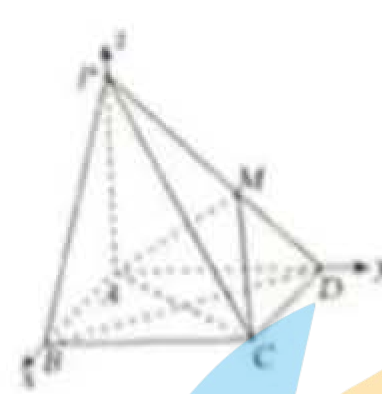
所以 O 为 BD 的中点.

所以 M 为 PD 的中点. ………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为底面 ABCD 为正方形,PA⊥平面 ABCD,

所以 AB,AD,AP 两两垂直.

如图建立空间直角坐标系.



设 $AB=1$,则 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,

$C(1,1,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,1)$.

则 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$.

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{PD}=(0,\lambda,1-\lambda)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 MAC 的法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ \lambda y+(1-\lambda)z=0.\end{cases}$

令 $y=1-\lambda$,则 $z=-\lambda$,$x=\lambda-1$,得 $\boldsymbol{n}=(\lambda-1,1-\lambda,-\lambda)$.

又 $BD\perp AC$,$BD\perp PA$,

所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$ 为平面 PAC 的法向量.

$$|\cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2(1-\lambda)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3\lambda^2-4\lambda+2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

解得 $\lambda=\frac{2}{3}$,所以 $\frac{PM}{MD}=2$. ………………………………………… 14 分

18.（本小题 13 分）2020 年 9 月 22 日，中国政府在第七十五届联合国大会上提出：“中国将提高国家自主贡献力度，采取更加有力的政策和措施，二氧化碳排放力争于 2030 年前达到峰值，努力争取 2060 年前实现碳中和.” 做好垃圾分类和回收工作可以有效地减少处理废弃物造成的二氧化碳、甲烷等温室气体的排放，助力碳中和. 某校环保社团为了解本校学生是否清楚垃圾分类后的处理方式，随机抽取了 200 名学生进行调查，样本调查结果如下表：

	高中部		初中部	
	男生	女生	男生	女生
清楚	12	8	24	24
不清楚	28	32	38	34

假设每位学生是否清楚垃圾分类后的处理方式相互独立.

（Ⅰ）从该校学生中随机抽取一人，估计该学生清楚垃圾分类后处理方式的概率；

（Ⅱ）从样本高中部和初中部的学生中各随机抽取一名学生，以 X 表示这 2 人中清楚垃圾分类后处理方式的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）从样本中随机抽取一名男生和一名女生，用“$\xi=1$”表示该男生清楚垃圾分类后的处理方式，用“$\xi=0$”表示该男生不清楚垃圾分类后的处理方式，用“$\eta=1$”表示该女生清楚垃圾分类后的处理方式，用“$\eta=0$”表示该女生不清楚垃圾分类后的处理方式. 直接写出方差 $D\xi$ 和 $D\eta$ 的大小关系.（结论不要求证明）

(18)(共 13 分)

解:(Ⅰ)依题意,参与调查的学生有 200 人,其中清楚垃圾分类后处理方式的学生有

$12+8+24+24=68$ 人.

在样本中,学生清楚垃圾分类后的处理方式的频率为 $\frac{68}{200}=\frac{17}{50}$,

用样本的频率估计总体的频率,可估计从该校学生中随机抽取一人,该学生清

楚垃圾分类后处理方式的概率为 $\frac{17}{50}$. ………………………………………… 3 分

(Ⅱ)X 的所有可能取值为 0,1,2.

记事件 A 为"从样本初中部学生中随机抽取 1 名学生,该学生清楚垃圾分类后的处理方式",事件 B 为"从样本高中部学生中随机抽取 1 名学生,该学生清楚垃圾分类后的处理方式",则

$$P(A)=\frac{24+24}{24+24+38+34}=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{12+8}{12+8+28+32}=\frac{1}{4}.$$

由题设知,事件 A,B 相互独立,

所以 $P(X=0)=P(\overline{A}\,\overline{B})=(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{9}{20}$;

$P(X=1)=P(\overline{A}B+A\overline{B})=(1-\frac{2}{5})\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{9}{20}$;

$P(X=2)=P(AB)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)=0\times\frac{9}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{1}{10}=\frac{13}{20}$. ………………………………………… 11 分

(Ⅲ)$D\xi>D\eta$. ………………………………………………………………… 13 分

19.（本小题 15 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-\sqrt{3},0)$，其右焦点为 $F(1,0)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 P 为椭圆 C 上一动点（不在 x 轴上），M 为 AP 中点，过原点 O 作 AP 的平行线，与直线 $x=3$ 交于点 Q. 问：直线 OM 与 FQ 斜率的乘积是否为定值？若为定值，求出该值；若不为定值，请说明理由.

19)(共 15 分)

解：(Ⅰ)由题可知 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，则 $b^2=a^2-c^2=2$.

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm\sqrt{3})$，则 $\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，即 $2x_0^2+3y_0^2=6$.

由 M 为 AP 的中点，得 $M(\dfrac{x_0-\sqrt{3}}{2},\dfrac{y_0}{2})$，所以 $k_{OM}=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{3}}$.

因为直线 AP 的斜率 $k=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{3}}$，且 $OQ\parallel AP$，

所以直线 OQ 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{3}}x$.

令 $x=3$，得 $y=\dfrac{3y_0}{x_0+\sqrt{3}}$，则 $Q(3,\dfrac{3y_0}{x_0+\sqrt{3}})$.

因为 $F(1,0)$，所以 $k_{FQ}=\dfrac{3y_0}{2(x_0+\sqrt{3})}$.

所以 $k_{OM}\cdot k_{FQ}=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3y_0}{2(x_0+\sqrt{3})}=\dfrac{3y_0^2}{2(x_0^2-3)}=-1$.

所以直线 OM 与 FQ 斜率的乘积是定值为 -1. ………………………………… 15 分

20.（本小题 15 分）曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(t,\ln t)$ 处的切线 l 交 x 轴于点 M.

（Ⅰ）当 $t=\mathrm{e}$ 时，求切线 l 的方程；

（Ⅱ）O 为坐标原点，记△ AMO 的面积为 S. 求面积 S 以 t 为自变量的函数解析式，写出其定义域，并求单调增区间.

(20)(共 15 分)

解:(Ⅰ)设函数 $f(x)=\ln x$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以 $f'(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $t=\mathrm{e}$ 时，$\ln t=1$，即 $A(\mathrm{e},1)$.

所以切线 l 的方程为 $y-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，

即 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$. ……………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(t,\ln t)$ 处的切线方程为 $y-\ln t=\dfrac{1}{t}(x-t)$，

即 $y=\dfrac{1}{t}x+\ln t-1$.

令 $y=0$，得 $x=t-t\ln t$，所以 $M(t-t\ln t,0)$.

$S(t)=\dfrac{1}{2}|t-t\ln t|\cdot|\ln t|=\dfrac{1}{2}|(t\ln t-t)\ln t|$.

$S(t)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,\mathrm{e})\cup(\mathrm{e},+\infty)$.

设 $\varphi(t)=(t\ln t-t)\ln t\ (t>0)$，

则 $\varphi'(t)=\ln^2 t+\ln t-1$.

令 $\varphi'(t)>0$，解得 $\ln t<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，或 $\ln t>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

即 $0<t<\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$，或 $t>\mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

当 $0<t<1$，或 $t>\mathrm{e}$ 时，$S(t)=\dfrac{1}{2}\varphi(t)$，$S'(t)=\dfrac{1}{2}\varphi'(t)$.

$S'(t)>0$，得 $0<t<\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$，或 $t>\mathrm{e}$.

当 $1<t<\mathrm{e}$ 时，$S(t)=-\dfrac{1}{2}\varphi(t)$，$S'(t)=-\dfrac{1}{2}\varphi'(t)$.

$S'(t)>0$，得 $1<t<\mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

所以函数 $S(t)$ 的单调增区间为 $(0,\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}})$，$(1,\mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})$，$(\mathrm{e},+\infty)$. ……… 15 分

21.（本小题 15 分）

对于给定的正整数 m 和实数 a，若数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个性质：

①$a_1+a_2+\cdots+a_m=a$；②对 $\forall n\in N^*$，$a_{n+m}=a_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$.

（Ⅰ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_2(1)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前10项和；

（Ⅱ）对于给定的正奇数 t，若数列 $\{a_n\}$ 同时具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$，求证：存在自然数 N，对任意的正整数 k，不等式 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geq\dfrac{a}{m}$ 均成立.

(21)(共15分)

解：(Ⅰ)依题意 $a_1+a_2=1$，且 $a_{n+2}=a_n(n=1,2,\cdots)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前10项和为5. ………………………………………… 4分

(Ⅱ)由于数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_4(4)$ 和 $P_t(t)$，其中 t 为大于零的奇数，

令 $t=2k-1, k\in N^*$，则有 $a_{n+2}=a_{n+2+2k-1+2k-1}=a_{n+4k}=a_n$，

所以 $a_{n+1}=a_{n+1+2k-1}=a_{n+2k}=a_n$.

综上 $\{a_n\}$ 为常数列.

又因为 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_4(4)$，所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$.

所以 $a_n=1$. ………………………………………………………………… 9分

(Ⅲ)要证 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$，

只需证 $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}\geqslant k\cdot\dfrac{a}{m}$，

即只需证 $(a_{N+1}-\dfrac{a}{m})+(a_{N+2}-\dfrac{a}{m})+\cdots+(a_{N+k}-\dfrac{a}{m})\geqslant 0$.

令数列 $b_n=a_n-\dfrac{a}{m}$，由于数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P_m(a)$，则数列 $\{b_n\}$ 具有性质 $P_m(0)$.

令 $S_i=b_1+b_2+\cdots+b_i(i\in N^*)$，

设 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 的最小值为 $S_N(1\leqslant N\leqslant m)$.

对 $\forall k\in N^*$，令 $N+k=pm+r, p,r\in N, 0<r\leqslant m$，

由于 $\{b_n\}$ 具有性质 $P_m(0)$，所以 $S_{pm}=0$.

所以 $S_{pm+r}=S_{pm}+b_{pm+1}+b_{pm+2}+\cdots+b_{pm+r}=b_1+b_2+\cdots+b_r=S_r\geqslant S_N$.

所以 $\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$ 成立. ………………………………… 15分