2022 届新高考开学数学摸底考试卷 2

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\sqrt{x-1}\right\}$， $B=\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$ ，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$(-1,1]$　　C．$[1,2)$　　D．$(1,2)$

2.设函数 $f(x)=x$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．－1

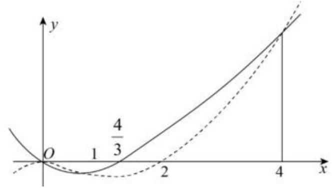
3. 在△ABC 中，∠BAC=60°，AB=3，AC=4，点 M 满足 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ 等于（　　）

A．10　　B．9　　C．8　　D．7

4. 已知函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 图象如图所示，则不等式组 $\begin{cases} f(x)<f'(x) \\ 0<x<3 \end{cases}$ 的解集为（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,3)$

C．$(1,2)$　　D．$(1,4)$



第 4 题

5.设 $0<a<1$，离散型随机变量 X 的分布列是如下，则当 a 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内增大时（　　）

X	0	1	2
P	$\frac{1-a}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{a}{2}$

A．$D(X)$增大　　B．$D(X)$减小

C．$D(X)$先减小后增大　　D．$D(X)$先增大后减小

6. 如果函数 $f(x)$ 对任意的实数 x，都有 $f(1+x)=f(-x)$，且当 $x\geq\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\log_2(3x-1)$，那么函数 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的最大值与最小值之和为（　　）

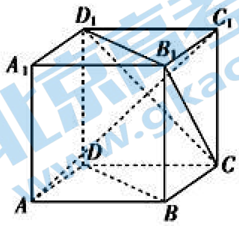
A．2　　B．3　　C．4　　D．－1

7.函数 $f(x)=x-g(x)$ 的图象在 $x=2$ 点处的切线方程是 $y=-x-1$，则 $g(2)+g'(2)=$（　　）

A.7　　B.4　　C.0　　D.－4

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

8. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，下面结论：① $BD//$平面CB_1D_1；② $AC_1\perp BD$；③ $AC_1\perp$平面CB_1D_1.其中正确结论的个数是(　　)



A.0　　　　B.1

C.2　　　　D.3

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9.已知点 P 在双曲线 C：$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$上，$F_1$，$F_2$是双曲线 C 的左、右焦点，若ΔPF_1F_2的面积为 20，则下列说法正确的有（　）

A．点 P 到 x 轴的距离为$\dfrac{20}{3}$　　　　B.$|PF_1|+|PF_2|=\dfrac{50}{3}$

C．ΔPF_1F_2为钝角三角形　　　　D.$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$

10.已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_4=2a_2+a_3$，若设其公比为 q，前 n 项和为S_n，则（　）

A．$q=2$　　　　B．$a_n=2^n$　　　　C．S_{10}=2047　　　　D．$a_n+a_{n+1}<a_{n+2}$

11.已知函数$f(x)=\sin(3x+\varphi)(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{4}$对称，则（　）

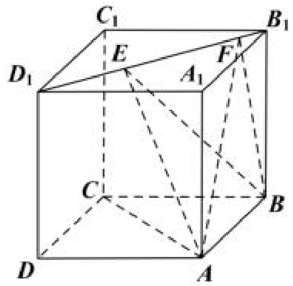
A．函数$f(x+\dfrac{\pi}{12})$为奇函数

B．函数$f(x)$在$[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}]$上单调递增

C．若$|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则$|x_1-x_2|$的最小值为$\dfrac{\pi}{3}$

D．函数$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度得到函数$y=-\cos 3x$的图象

12.如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E、F，且 $EF=\dfrac{1}{2}$，则下列结论中正确的是（　）



A．$AC\perp BE$　　　　B．$EF//$平面 $ABCD$

C．$\triangle AEF$ 的面积与$\triangle BEF$ 的面积相等

D．三棱锥 A-BEF 的体积为定值

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

三、填空题：每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上。

13.如果复数 $2, a+i, 2+bi(a,b\in R)$ 成等差数列，则 $a+b=$____________.

14.某车队有 6 辆车，现要调出 4 辆按一定的顺序出去执行任务，要求甲、乙两车必须参加，且甲车要先于乙车开出，则共有____________种不同的调度方法.（用数字填写答案）

15.设函数 $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$,$g(x)=x^2 f(x-1)$,则函数 $g(x)$ 的递减区间是__________.

16.已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，设其导函数为 $f'(x)$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，恒有 $xf'(x)<-f(-x)$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则满足 $F(x)>F(2x-1)$ 的实数 x 的取值范围为_______.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本题 10 分）已知函数 $f(x)=2a\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)\cos(x-\dfrac{2\pi}{3})$，且 $f(\dfrac{\pi}{3})=1$.

（1）求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）若 $f(\alpha)=-\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，求 $\sin 2\alpha$.

18. （本小题 12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{b_1}{2+1}+\dfrac{b_2}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^n+1}$.

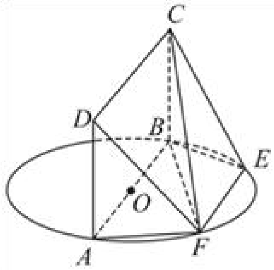
（1）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=\dfrac{a_nb_n}{4}-n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题 12 分）如图，AB 为圆 O 的直径，点 E，F 在圆 O 上，$AB//EF$，矩形 $ABCD$ 和圆 O 所在的平面互相垂直，已知 $AB=2$，$EF=1$.

（I）求证：平面 $DAF\perp$ 平面 CBF；

（II）当 AD 的长为何值时，二面角 D-CF-B 的大小为 $60°$？



关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

20. （本小题 12 分）已知抛物线的方程为 $x^2=4y$，过点 $P(4,2)$ 作斜率为 k 的直线 l 与抛物线交于不同的两点 M， N .

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 ΔOMN 为直角三角形，且 $OM\perp ON$，求 k 的值.

21. （本小题 12 分）2020 年寒假是个特殊的寒假，因为抗击疫情全体学生只能在家进行网上在线学习，为了研究学生在线网上学习的情况，某学校在网上随机抽取 120 名学生对线上教育进行调查，男生与女生的人数之比为 11:13，其中男生 30 人对于线上教育满意，女生 15 名表示对线上教育不满意.

（1）完成 2×2 列联表，并回答能否有 99%的把握认为对“线上教育是否满意与性别有关”

	满意	不满意	总计
男生	30		
女生		15	
合计			120

（2）从被调查的对线上教育满意的学生中，利用分层抽样抽取 8 名学生，再在 8 名学生中抽取 3 名学生，作线上学习的经验介绍，其中抽取男生的个数为 ξ，求出 ξ 的分布列及期望值.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

参考公式：附 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$

$P(K^2>k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k	2.072	2.076	3.841	5.024	6.635	10.828

22. （本小题 12 分）已知函数 $f(x)=-x^3+x^2+b, g(x)=a\ln x$.

（1）若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$ 上的最大值为 $\dfrac{3}{8}$，求实数 b 的值；

（2）对任意的 $x\in[1,e]$，都有 $g(x)\geq -x^2+(a+2)x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

数学答案

一．选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	D	B	D	C	A	D

二．多选题

9	10	11	12
BC	ABD	AC	ABD

三．填空题　13. 4　　14. 72　　15. $[0,1)$　　16. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$

三．解答题

17. 解：（1）由已知 $f(\frac{\pi}{3})=1$，得 $2a\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$，解得 $a=2$.(1 分)

所以 $f(x)=4\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)\ =2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$.

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$ 的最小正周期为 π.（5 分））

（2） $f(\alpha)=-\frac{1}{3}$， $2\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})-1=-\frac{1}{3},\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$，

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $2\alpha-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$， 又 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，所以 $2\alpha-\frac{\pi}{6}\in(0,\frac{\pi}{6})$.

所以 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.（7 分））

则 $\sin 2\alpha=\sin[(2\alpha-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.（10 分）

18. 解： （1）因为 $S_n=n^2+n$，所以当 $n=1$ 时， $a_1=S_1=2$，

当 $n\geq 2$ 时 $,a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$， （2 分）

又 $a_1=2$ 也满足上式，所以 $a_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$.

又 $\frac{b_1}{2+1}+\frac{b_2}{2^2+1}+\cdots+\frac{b_n}{2^n+1}=a_n=2n$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $\dfrac{b_1}{2+1}+\dfrac{b_2}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{b_{n-1}}{2^{n-1}+1}=2n-2(n\geq 2,n\in \mathbf{N}^*)$，

两式作差得，$\dfrac{b_n}{2^n+1}=2$，所以 $b_n=2^{n+1}+2(n\geq 2,n\in \mathbf{N}^*)$，（5 分）

当 $n=1$ 时，$\dfrac{b_1}{3}=2,b_1=6$，又 $b_1=6$ 满足上式，所以 $b_n=2^{n+1}+2(n\in \mathbf{N}^*)$.（6 分）

（2）因为 $c_n=\dfrac{a_nb_n}{4}-n=n\cdot 2^n$，所以 $T_n=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，

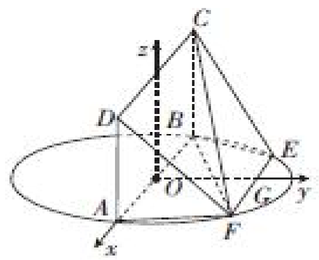
$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，

两式相减，得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}$，即 $-T_n=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$，

所以 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.（12 分）

19. 解：（1）∵平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，$CB\perp AB$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，

∴$CB\perp$ 平面 $ABEF$，（3 分）



∵$AF\subset$ 平面 $ABEF$，∴$AF\perp CB$，

又因为 AB 为圆 O 的直径，∴$AF\perp BF$，∴$AF\perp$ 平面 CBF，

∵$AF\subset$ 平面 ADF，∴平面 $DAF\perp$ 平面 CBF.（6 分）

（II）设 EF 中点为 G，以 O 为坐标原点，OA、OG、AD 方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴方向建立空间直角坐标系（如图）. 设 $AD=t(t>0)$，则点 D 的坐标为 $(1,0,t)$，则 $C(-1,0,t)$，

又 $A(1,0,0),B(-1,0,0),F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，所以 $\overrightarrow{CD}=(2,0,0),\overrightarrow{FD}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},t\right)$，

设平面 DCF 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{FD}=0$，即 $\begin{cases}2x=0\\-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+tz=0\end{cases}$，

令 $z=\sqrt{3}$，解得 $x=0$，$y=2t$，∴ $\overrightarrow{n_1}=(0,2t,\sqrt{3})$.（8 分）

由（1）可知 $AF\perp$ 平面 CFB，取平面 CFB 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{AF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

∴ $\cos 60^\circ=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$，即 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{|\sqrt{3}t|}{\sqrt{4t^2+3}}$，解得 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

因此，当 AD 的长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 时，平面 DFC 与平面 FCB 所成的锐二面角的大小为 60°.（12 分）

20. 解：（1）直线 l 的方程可设为 $y=k(x-4)+2$，…………1 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

联立方程组得$\begin{cases}y=k(x-4)+2\\x^2=4y\end{cases}$，消元得$x^2-4kx+16k-8=0$ …………3 分

$\Delta=16k^2-4(16k-8)>0$，解得$k<2-\sqrt{2}$或$k>2+\sqrt{2}$ …………5 分

（2）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，因为$OM\perp ON$，所以$k_{OM}\cdot k_{ON}=0$，…………7 分

所以$x_1x_2+y_1y_2=0$，$x_1x_2+[k(x_1-4)+2][k(x_2-4)+2]=0$，…………9 分

$(k^2+1)x_1x_2+k(2-4k)(x_1+x_2)+(2-4k)^2=0$，

$(k^2+1)(16k-8)+4k^2(2-4k)+(2-4k)^2=0$ …………11 分

解之得$k=\pm\frac{1}{2}$ 当$k=\frac{1}{2}$时，点O和点M重合，所以$k\neq\frac{1}{2}$，故$k=-\frac{1}{2}$ …………12 分.

21. 解：（1）因为男生人数为：$120\times\frac{11}{11+13}=55$，所以女生人数为$120-55=65$，于是可完成$2\times2$列联表，如下：

	满意	不满意	合计
男生	30	25	55
女生	50	15	65
合计	80	40	120

…………3 分

根据列联表中的数据，得到K^2的观测值

$K^2=\frac{120\times(30\times15-25\times50)^2}{55\times65\times80\times40}=\frac{960}{143}\approx6.713>6.635$，

所以有 99%的把握认为对“线上教育是否满意与性别有关”。 …………6 分

（2）由（1）可知男生抽 3 人，女生抽 5 人， …………7 分

依题意可知ξ的可能取值为 0，1，2，3，并且ξ服从超几何分布，

$P(\xi=k)=\frac{C_3^kC_5^{3-k}}{C_8^3}(k=0,1,2,3)$，即$P(\xi=0)=\frac{C_3^0C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$，$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，$P(\xi=3)=\frac{C_3^3C_5^0}{C_8^3}=\frac{1}{56}$ …………10 分

所以ξ的分布列为：

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

…………11 分

$E(\xi)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{9}{8}$ …………12 分

22. 解：（1） $f'(x)=-3x^2+2x=-x(3x-2)$…………1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$ …………2 分

当 $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 时，函数 $f(x)$ 为减函数，

当 $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 时，函数 $f(x)$ 为增函数，

当 $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 时，函数 $f(x)$ 为减函数…………3 分

$\because f\left(-\frac{1}{2}\right)=b+\frac{3}{8},f\left(\frac{2}{3}\right)=b+\frac{4}{27}$，$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$， …………4 分

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=b+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$，$\therefore b=0$.…………5 分

(2)由 $g(x)\geq -x^2+(a+2)x$, 得 $(x-\ln x)a\leq x^2-2x$

$\because x\in[1,e],\therefore \ln x\leq 1\leq x$, 由于不能同时取等号，

$\therefore \ln x<x$, 即 $\ln x-x<0$, $\therefore a\leq\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$ 在 $x\in[1,e]$ 上恒成立…………7 分

令 $h(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$，$x\in[1,e]$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$，…………8 分

当 $x\in[1,e]$ 时，$x-1\geq 0$, $x+2-2\ln x=x+2(1-\ln x)>0$, 从而 $h'(x)\geq 0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$ 在 $[1,e]$ 上为增函数…………10 分

$\therefore$ 函数 $h(x)_{\min}=h(1)=-1$, $\therefore a\leq -1$

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$…………12 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。