

北京市 22 中学 2019-2020 学年度第二次阶段性考试

高三年级 数学

命题人：高三数学备课组

2019 年 10 月

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。

考试用时 120 分钟。祝各位考生考试顺利！

第 I 卷

一、选择题（共 9 个小题，每小题 5 分，共 45 分）

1、集合 $P = \{x \in Z \mid 0 \leq x < 3\}$ ， $M = \{x \in Z \mid x^2 \leq 9\}$ ，则 $P \cap M =$

- A、 $\{1, 2\}$ B、 $\{0, 1, 2\}$ C、 $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$ D、 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$

2、对于任意实数 a, b, c, d ，下列命题中正确的为

- A、若 $a > b, c \neq 0$ ，则 $ac > bc$ B、若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$
 C、若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$ D、若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

3、已知命题 $p: \forall a > 0$ ，有 $e^a \geq 1$ 成立，则 $\neg p$ 为

- A、 $\exists a \leq 0$ ，有 $e^a < 1$ 成立 B、 $\forall a \leq 0$ ，有 $e^a < 1$ 成立
 C、 $\exists a > 0$ ，有 $e^a < 1$ 成立 D、 $\forall a > 0$ ，有 $e^a < 1$ 成立

4、下列函数中，在其定义域内既是奇函数又是减函数的是

- A、 $y = \sin x$ B、 $y = -x^3$ C、 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D、 $y = (\frac{1}{2})^x$

5、设 a, b 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，下列四个命题中正确的个数是

- ①如果 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$ ，那么 $a \parallel b$ ； ②如果 $a \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$ ，那么 $a \parallel b$ ；
 ③如果 $\alpha \perp \beta, a \subset \alpha$ ，那么 $a \perp \beta$ ； ④如果 $a \perp \beta, a \parallel b, b \subset \alpha$ ，那么 $\alpha \perp \beta$ 。

- A、1 B、2 C、3 D、4

6、为得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，可以将函数 $y = \sin 2x$ 的图象

- A、向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 B、向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
C、向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 D、向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

7、已知函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ ，在下列区间中，包含 $f(x)$ 的零点的区间是

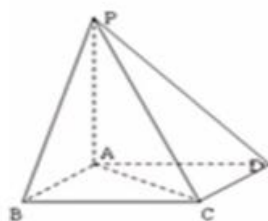
- A、(0,1) B、(1,2) C、(2,4) D、(4,+∞)

8、平面向量 a, b, c 均为非零向量，则 " $a \cdot (b - c) = 0$ " 是 " $b = c$ " 的

- A、充分不必要条件 B、必要不充分条件
C、充要条件 D、既不充分也不必要条件

9、如图，已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB = 1$ ， $PA \cdot AC = 1$ ， $\angle ABC = \theta$ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$)，则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 V 的取值范围是

- A、 $[\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3}]$ B、 $[\frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{6}]$ C、 $(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3}]$ D、 $[\frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{6})$



第 9 题图

第 II 卷

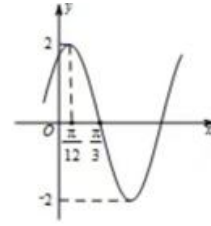
二、填空题 (共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

10、复数 $z = \frac{10i}{1-2i}$ 。在复平面内对应点的坐标为 _____， $|z| =$ _____

11、若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ，且 α 为第二象限，则 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ _____ $\tan(\pi - \alpha) =$ _____。

12、设 $f(x) = \begin{cases} \ln x (x > 0) \\ 2^x (x \leq 0) \end{cases}$ ，则 $f[f(\frac{1}{e})] =$ _____；若 $f(x) < 1$ ，则 x 的取值范围为 _____

13、已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $\omega =$ _____, $\varphi =$ _____。



14、已知向量 a, b 满足: $|a|=1, |b|=6, a \cdot (b-a) = 2$, 则 a 与 b 的夹角为 _____; $|2a-b| =$ _____。

15、设 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 上的点, $AD = \frac{1}{2} AB, BE = \frac{2}{3} BC$, 若 $\overrightarrow{DE} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$ (λ_1, λ_2 为实数), 则 $\lambda_1 =$ _____; $\lambda_2 =$ _____

16、设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 对于给定的正数 K , 定义函数

$f_K(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq K \\ K, & f(x) < K \end{cases}$ 取函数 $f(x) = 2^{-|x|}$, 当 $K = \frac{1}{2}$ 时, $f_K(\frac{1}{2}) =$ _____, 函数 $f_K(x)$ 的单调递增区间为 _____。

17、某公司一年购买某货物 600 吨, 每次都购买 x 吨, 运费为 3 万元/次, 一年的总存储费用为 $2x$ 万元, 若要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则每次需购买 _____ 吨。

三、解答题 (共 5 题, 每题 13 分, 共 65 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

18、锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边, 且 $\frac{a}{\sin A} = \frac{2c}{\sqrt{3}}$

(1) 确定角 C 的大小;

(2) 若 $c = \sqrt{7}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $a^2 + b^2$ 的值。

19、函数 $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π 。

(1) 求 $f(\frac{2}{3}\pi)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及其图象的对称轴方程。

20、已知函数 $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ，函数 $g(x) = f(x) \cdot f(x + \frac{\pi}{2})$

(1) 若 $f(\alpha) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ，求 $\sin 2\alpha$ 的值；

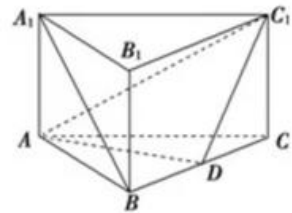
(2) 求函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最值并求出相应的 x 的值。

21、如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = BC = 2AA_1$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， D 是 BC 的中点。

(1) 求证： $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1 ；

(2) 求二面角 $C_1 - AD - C$ 的余弦值；

(3) 试问线段 A_1B_1 上是否存在点 E ，使 AE 与面 ADC_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ ？若存在，求出此时 AE 的长，若不存在，请说明理由。



22、将所有平面向量组成的集合记作 R^2 ， f 是从 R^2 到 R^2 的映射，记作 $\vec{y} = f(\vec{x})$ 或 $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ ，其中 x_1, x_2, y_1, y_2 都是实数。定义映射 f 的模为： $|\vec{x}|=1$ 的条件下 $|\vec{y}|$ 的最大值，记作 $\|f\|$ 。若存在非零向量 $\vec{x} \in R^2$ ，及实数 λ 使得 $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ ，则称 λ 为 f 的一个特征值。

(1) 若 $f(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_1, x_2)$ ，求 $\|f\|$ ；

(2) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ ，计算 f 的特征值并求相应的 \vec{x} ；

(3) 若 $f(x_1, x_2) = (a_1x_1 + a_2x_2, b_1x_1 + b_2x_2)$ ，要使 f 有唯一的特征值，实数 a_1, a_2, b_1, b_2 应满足什么条件？试找出一个映射 f ，满足一下两个条件：①有唯一特征值 λ ，

② $\|f\| = |\lambda|$ ，并验证 f 满足这两个条件。

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 20 万+。

北京高考在线_2020 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980