顺义区 2021 届高三年级第二次统练

数学试卷

考生须知	1．本试卷共 4 页，共两部分．21 道小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟． 2．在答题卡上准确填写学校名称、姓名、班级和教育 ID 号． 3．试题答案一律填涂或书写在答题卡，在试卷上作答无效． 4．在答题卡上选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答． 5．考试结束后．请将答题卡上交．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\,||x|\ \ 1\},B=\{x\,|0\ \ x<2\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x\,|x<2\}$　　B．$\{x\,|-1<x\ \ 2\}$　　C．$\{x\,|0\ \ x\ \ 1\}$　　D．$\{x\,|-1\ \ x<2\}$

2．在复平面内，复数 $z=i(i+2)$ 对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．在 $(x-\sqrt{2})^6$ 的展开式中，x^3 的系数为（　　）

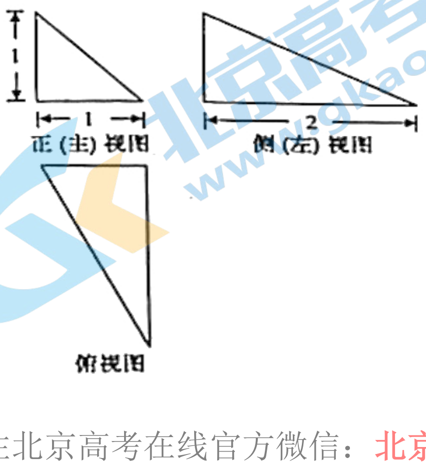
A．$-40\sqrt{2}$　　B．$40\sqrt{2}$　　C．-40　　D．40

4．已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则下列不等式恒成立的是（　　）

A．$2^a<2^b$　　B．$\dfrac{1}{a^2+1}>\dfrac{1}{b^2+1}$

C．$a^3>b^3$　　D．$\lg\left(a^2+1\right)>\lg\left(b^2+1\right)$

5．某四面体的三视图如图所示，该四面体四个面的面积中最大的是（　　）



A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

6. 已知函数 $f(x)=|x|-1-\log_2|x|$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集是（　　）

A. $(0,1)\cup(2,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-2,-1)\cup(1,2)$

7. 把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是 θ_1℃，空气的温度是 θ_0℃．那么 t min 后物体的温 θ（单位：℃）可由公式 $\theta=\theta_0+\left(\theta_1-\theta_0\right)c$ 求得，其中 k 是一个随着物体与空气的接触情况而定的常数．现有 46℃的物体，放在 10℃的空气中冷却，1min 以后物体的温度是 38℃，则 k 的值约为 $(\ln 3\approx 1.10,\ln 7\approx 1.95)$（　　）

A. 0.25　　B. -0.25　　C. 0.89　　D. -0.89

8. 已知圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 经过原点，则圆上的点到直线 $y=x+2$ 距离的最大值为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}+2$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{2}$

9. 已知函数 $f(x)=\sin x, x\in[a,b]$，则“存在 $x_1,x_2\in[a,b]$ 使得 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=2$”是“$b-a\quad\pi$”的（　　）

A. 充分必要条件　　B. 充分而不必要条件　　C. 必要而不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+3x, x<a\\ 2x, x\quad a\end{cases}$，若 $f(x)$ 恰有两个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B. $(-\sqrt{3},+\infty)$　　C. $(-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　D. $(-\infty,\sqrt{3})$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 设向量 $\vec{a}=(m,3),\vec{b}=(1,2),\vec{c}=(1,-1)$，若 $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$，则实数 $m=$_________．

12. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距等于实轴长的 $\sqrt{3}$ 倍，则 C 的渐近线方程为________．

13. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和，若 $a_1=6,S_3=2a_1$，则公差 $d=$_________，S_n 的最大值为_________．

14. 已知 α 是任意角，且满足 $\cos\left(\alpha+k\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha$，则常数 k 的一个取值为__________．

15. 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(0,1),F_2(0,-1)$ 的距离的积等于 $\dfrac{3}{2}$ 的点 P 的轨迹，给出下列四个结论：

①曲线 C 关于坐标轴对称；

② $\triangle F_1PF_2$ 周长的最小值为 $2+\sqrt{6}$；

③点 P 到 y 轴距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$；

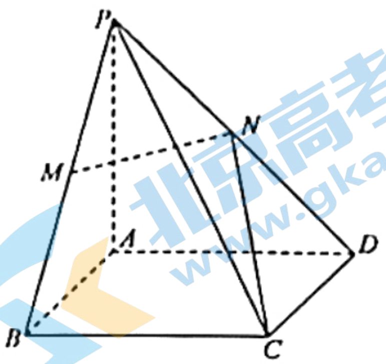
④点 P 到原点距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

其中所有正确结论的序号是__________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程．

16．（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形．且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，M，N 分别为 PB,PD 的中点．



（I）求证：$MN//$ 平面 $ABCD$；

（II）若 $PA=AB=2$，求 CN 与平面 PBD 所成角的正弦值．

17．（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin B=\sqrt{3}\sin C, A=30°$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（I）c 的值；

（II）$\triangle ABC$ 的面积．

条件①：$ab=2\sqrt{3}$；

条件②：$a\sin B=6$．

注：如果选择条件①和条件②分别作答，按第一个解答计分．

18．（本小题 14 分）

某学校食堂为了解师生对某种新推出的菜品的满意度，从品尝过该菜品的学生和老师中分别随机调查了 20 人，得到师生对该菜品的满意度评分如下：

教师：60　63　65　67　75　77　77　79　79　82　83　86　87　89　92　93　96　96　96

学生：47　49　52　54　55　57　63　65　66　66　74　74　75　77　80　82　83　84　95　96

根据师生对该菜品的满意度评分，将满意度从低到高分为三个等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

假设教师和学生对该菜品的评价结果相互独立，根据所给数据，用事件发生的频率估计相应事件发生的概率．

（I）设数据中教师和学生评分的平均值分别为 μ_1 和 μ_2，方差分别为 η_1 和 η_2，试比较 μ_1 和 μ_2，η_1 和 η_2 的大小（结论不要求证明）；

（II）从全校教师中随机抽取 3 人，设 X 为 3 人中对该菜品非常满意的人数，求随机变量 X 的分布列及数学期望；

（III）求教师的满意度等级高于学生的满意度等级的概率．

19．（本小题 14 分）

已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(2,\sqrt{2})$．

（I）求椭圆 G 的方程；

（II）过点 $M(0,1)$ 斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆 G 于 A,B 两点，在 y 轴上是否存在点 N 使得 $\angle ANM=\angle BNM$（点 N 与点 M 不重合），若你在，求出点 N 的坐标，若不存在，请说明理由．

20．（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x-mx^2(m\in\mathbf{R})$.

（I）已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-ex+e$，求 m 的值；

（II）若存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $f\left(x_0\right)\quad 2$，求 m 的取值范围.

21．（本小题 15 分）

已知数列 $\{a_n\}\ (a_n\in\mathbf{N})$，记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，首项 $a_1=n_0>0$，若对任意整数 $k\quad 2$，有 $0\quad a_k\quad k-1$，且 S_k 是 k 的正整数倍.

（I）若 $a_1=21$，写出数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项；

（II）证明：对任意 $n\quad 2$，数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 由 a_1 唯一确定；

（III）证明：对任意正整数 n_0，数列 $\{S_n\}$ 从某一项起为等差数列.

参考答案

一. 选择题（共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项）

二.填空题(本大题共 5 个小题,每小题 5 分,共 25 分)

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	D	B	A	C	C	D	A	B	B	C

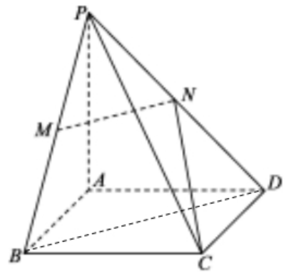
(11) 2　　　　(12) $y=\pm\sqrt{2}x$

(13) -2，12（前 3 分，后 2 分）　　　　(14) -3（答案不唯一）

(15) ①②④

三．解答题（本大题共 6 小题，共 85 分,其它答案参考给分）

（16）（共 14 分）



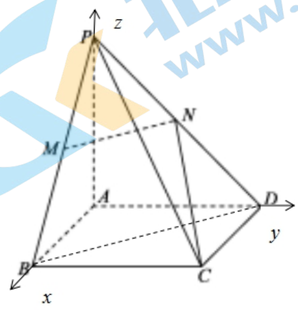
解：（I）如图，连接 BD，

因为 M， N 分别是 PB， PD 的中点，

所以 $MN \parallel BD$.-----------------2 分

又 $MN \not\subset$ 平面$ABCD$， $BD \subset$ 平面$ABCD$，

所以 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$.-----------5 分



（II）因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

$AB \subset$ 平面$ABCD$， $AD \subset$ 平面$ABCD$，

所以 $PA \perp AB$， $PA \perp AD$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AB \perp AD$.

以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 A-xyz .------6 分

则 $P(0,0,2)$， $B(2,0,0)$， $C(2,2,0)$， $D(0,2,0)$.-------------8 分

因为 N 是 PD 的中点，

所以 $N(0,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{CN}=(-2,-1,1)$，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.------10 分

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$. 即 $\begin{cases}2x-2z=0\\ 2y-2z=0\end{cases}$.

令 $z=1$，则 $x=1$，$y=1$.

于是 $\vec{n}=(1,1,1)$.------------------------------------12 分

设直线 CN 与平面 PBD 所成角为 θ，则

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CN},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{CN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CN}||\vec{n}|}=\dfrac{|-2-1+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.---------14 分

所以 CN 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

（17）（共 13 分）

解：选择条件①：$ab=2\sqrt{3}$.

（I）在 ΔABC 中，由正弦定理：$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.--------------1 分

所以 $b=\dfrac{c}{\sin C}\cdot\sin B$.

又 $\sin B=\sqrt{3}\sin C$，

所以 $b=\sqrt{3}c$.-------------------------------------2 分

因为 $ab=2\sqrt{3}$，

所以 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{b}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}c}=\dfrac{2}{c}$.---------------------------3 分

因为 $A=30^\circ$，

所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.------------------------------------4 分

由余弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，--------------------5 分

所以 $\dfrac{3c^2+c^2-(\frac{2}{c})^2}{2\sqrt{3}c^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.----------------------------6 分

解得 $c^2=2$.

因为 $c>0$，

所以 $c=\sqrt{2}$.--8 分

（II）因为 $c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}c$，

所以 $b=\sqrt{6}$.--10 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\bullet\sqrt{6}\bullet\sqrt{2}\bullet\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.-------------13 分

选择条件②：$a\sin B=6$.

（I）在 ΔABC 中，因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以 $b\sin A=a\sin B=6$.----------------------------3 分

因为 $A=30^\circ$，

所以 $\sin A=\dfrac{1}{2}$.

所以 $b=\dfrac{6}{\sin A}=12$.------------------------------------5 分

因为 $\sin B=\sqrt{3}\sin C$，

所以 $b=\sqrt{3}c$.

所以 $c=4\sqrt{3}$.--------------------------------------8 分

（II）因为 $b=12$，$c=4\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\bullet 12\bullet 4\sqrt{3}\bullet\frac{1}{2}=12\sqrt{3}$.-----------13 分

（18）（共 14 分）

解：（I）$\mu_1>\mu_2$，$\eta_1<\eta_2$.---------------------------------2 分

（II）由题意可知，随机抽取的教师对该菜品非常满意的概率为 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

----------------------------3 分

X 的取值为 0，1，2，3，----------------------------4 分

则 $X\sim B(3,\frac{1}{4})$，$P(X=k)=C_3^k(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{3-k}(k=0,1,2,3)$.

所以 $P\left(X=0\right)=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$，-------------------5 分

$P\left(X=1\right)=C_3^1\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$，---------------------------6 分

$P\left(X=2\right)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$，--------------------------7 分

$P\left(X=3\right)=C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$.-------------------------8 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

--------------------------9 分

故 X 的期望 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.--------------------------10 分

（III）设事件 A 为“教师对该菜品满意”，设事件 B 为“教师对该菜品非常满意”，设事件 C 为“学生对该菜品不满意”，设事件 D 为“学生对该菜品满意”，设事件 E 为“教师的满意度等级高于学生的满意度等级”

则 $E=AC\cup BC\cup BD$.-------------------------------11 分

易知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{2}$，$P(D)=\frac{2}{5}$.

因为事件 AC,BC，BD 彼此互斥，事件 A，B，C，D 彼此独立，

所以 $P(E)=P(AC)+P(BC)+P(BD)$

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)+P(B)P(D)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{19}{40}$.----14 分

所以教师的满意度等级高于学生的满意度等级的概率为 $\frac{19}{40}$.

（19）（共 14 分）

解：（I）由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，----------------------------1 分

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$.------------------------------3 分

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.--------------------4 分

（II）解法一：

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(0,t)$ $(t\neq 1)$，

所以直线 AN 的斜率为 $k_1=\frac{y_1-t}{x_1}$，

直线 BN 的斜率为 $k_2=\frac{y_2-t}{x_2}$.------------------------6 分

所以 $\angle ANM=\angle BNM$ 当且仅当 $k_1+k_2=0$.-------------7 分

即满足 $\frac{y_1-t}{x_1}+\frac{y_2-t}{x_2}=\frac{x_2y_1-tx_2+x_1y_2-tx_1}{x_1x_2}$

$=\dfrac{x_2(kx_1+1)-tx_2+x_1(kx_2+1)-tx_1}{x_1x_2}$

$=\dfrac{2kx_1x_2+(1-t)(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$=0$.--------------------------------9 分

即 $2kx_1x_2+(1-t)(x_1+x_2)=0$.

根据题意，直线 l 的方程为 $y=kx+1$.-----------------10 分

由 $\begin{cases} y=kx+1 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kx-6=0$.---------------11 分

则 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=-\dfrac{6}{2k^2+1}$.----------------13 分

所以 $2k\cdot\dfrac{-6}{2k^2+1}+(1-t)\dfrac{-4k}{2k^2+1}=\dfrac{4k(t-4)}{2k^2+1}=0$.

又因为 $k\neq 0$，

所以 $t=4$.--14 分

因此在 y 轴上存在点 N 使得 $\angle ANM=\angle BNM$，点 N 的

坐标为 $(0,4)$.

（II）解法二：

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(0,t)$ $(t\neq 1)$，

当 t=0 时，$N(0,0)$，显然 $\angle ANM\neq\angle BNM$，不满足题意.

所以直线 AN 的斜率为 $k_1=\dfrac{y_1-t}{x_1}$.--------------------5 分

所以直线 AN 的方程为 $(y_1-t)x-x_1y+x_1t=0$.

所以原点 O 到直线 AN 的距离为 $d_1=\dfrac{|x_1t|}{\sqrt{(y_1-t)^2+x_1^2}}$.

同理可得原点 O 到直线 BN 的距离为 $d_2=\frac{|x_2t|}{\sqrt{(y_2-t)^2+x_2^2}}$.-6 分

所以 $\angle ANM=\angle BNM$ 当且仅当 $d_1=d_2$.----------------7 分

即 $\frac{|x_1t|}{\sqrt{(y_1-t)^2+x_1^2}}=\frac{|x_2t|}{\sqrt{(y_2-t)^2+x_2^2}}$.

因为 $t\neq 0$，

所以 $\frac{x_1^2}{(y_1-t)^2+x_1^2}=\frac{x_2^2}{(y_2-t)^2+x_2^2}$.

根据题意，直线 l 的方程为 $y=kx+1$.-----------------8 分

所以 $\frac{x_1^2}{(kx_1+1-t)^2+x_1^2}=\frac{x_2^2}{(kx_2+1-t)^2+x_2^2}$.

整理得 $2(1-t)kx_1x_2(x_1-x_2)=-(1-t)^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

因为 $x_1\neq x_2$， $t\neq 0$，

所以 $x_1-x_2\neq 0$， $1-t\neq 0$.

所以 $2kx_1x_2=-(1-t)(x_1+x_2)$.------------------------10 分

由 $\begin{cases} y=kx+1 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kx-6=0$.--------------11 分

则 $x_1+x_2=-\frac{4k}{2k^2+1}$， $x_1x_2=-\frac{6}{2k^2+1}$.----------------13 分

所以 $2k\frac{(-6)}{2k^2+1}=-(1-t)\frac{(-4k)}{2k^2+1}$.

又 $k\neq 0$，

所以 $4(1-t)=-12$.

所以 $t=4$.--------------------------------------14 分

因此在 y 轴上存在点 N 使得 $\angle ANM=\angle BNM$ ，点 N 的

坐标为$(0,4)$.

（20）（共 15 分）

解：（I）$f'(x)=e^x-2mx$，---------------------------------2 分

因为曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-ex+e$，

所以$f'(1)=-e$，即$e-2m=-e$.--------------------4 分

所以$m=e$.---------------------------------------5 分

（II）存在$x_0\in[0,1]$，使得$f(x_0)\geq 2$等价于

$f(x)=e^x-mx^2\geq 2$在区间$[0,1]$上有解，-------------6 分

显然$x=0$不是$f(x)\geq 2$的解，

即等价于$m\leq\dfrac{e^x-2}{x^2}$在区间$(0,1]$上有解.---------------7 分

设$g(x)=\dfrac{e^x-2}{x^2}$，$x\in(0,1]$，

则$g'(x)=\dfrac{xe^x-2e^x+4}{x^3}$.----------------------------9 分

设$h(x)=xe^x-2e^x+4$，$x\in(0,1]$，

则$h'(x)=e^x(x-1)\leq 0$.-----------------------------11 分

所以$h(x)$在区间$(0,1]$上单调递减.

所以$h(x)\geq h(1)=4-e>0$.-------------------------12 分

所以$g'(x)>0$，所以$g(x)$在区间$(0,1]$上单调递增.

所以$g(x)_{\max}=g(1)=e-2$.-------------------------14 分

依题意需$m\leq e-2$，

所以m的取值范围为$(-\infty,e-2]$.-------------------15 分

（21）（共 15 分）

解：（I）21，1，2，0，1，5，5，5，5，5.------------------4 分

（II）当 $k=2$ 时，根据题意 $a_1+a_2=2b$ 为偶数，并且 $0\le a_2\le 1$，

所以 $a_2=\begin{cases}0，若a_1为偶数\\1，若a_1为奇数\end{cases}$.

从而 a_2 由 a_1 唯一确定.----------------------------------6 分

接下来用反证法，假设数列的某一项可以有两种不同取值.

假设第 $k+1$ 项是第 1 个可以有两种不同取值的项，

即前面 k 项 a_1，a_2,…，a_k 由 a_1 唯一确定.

记第 $k+1$ 项的两种取值为 a_{k+1} 和 c_{k+1}（$a_{k+1}\ne c_{k+1}$），

根据题意存在 b，$c\in\mathbf{N}$ 使得

$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}=(k+1)b$ ………①

且 $a_1+a_2+...+a_k+c_{k+1}=(k+1)c$ ………②

并且满足 $0\le a_{k+1}$，$c_{k+1}\le k$. ----------------------------8 分

由①②两式作差可知 $|a_{k+1}-c_{k+1}|$ 是 $k+1$ 的倍数，

又因为 $|a_{k+1}-c_{k+1}|\le k$，

可知 $a_{k+1}=c_{k+1}$，矛盾.

从而对任意 $n\ge 2$，数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 由 a_1 唯一确定. ---10 分

（III）**方法一：**因为 $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}\le S_k+k$，

所以 $\dfrac{S_{k+1}}{k+1}<\dfrac{S_{k+1}}{k}\le\dfrac{S_k+k}{k}=\dfrac{S_k}{k}+1$.------------------------11 分

因为 $\dfrac{S_{k+1}}{k+1},\dfrac{S_k}{k}$ 都是正整数，由整数的离散性有 $\dfrac{S_{k+1}}{k+1}\le\dfrac{S_k}{k}$.---13 分

因此，存在 m_0，当 $n \ge m_0$ 时，$\dfrac{S_n}{n}$ 为常数.----------------14 分

不妨记为 $\dfrac{S_n}{n}=c$，从而当 $n \ge m_0$ 时，有 $S_n = cn$.

所以 $\{S_n\}$ 从第 m_0 项起为等差数列.----------------------15 分

方法二： 一方面，记 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = bk$.

如果 $b \le k$，取 $a_{k+1} = b$，

那么 $S_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = b(k+1)$ 是 $k+1$ 的倍数.------11 分

同理 $a_{k+2} = b$，$a_{k+3} = b, \ldots$，

即从第 $k+1$ 项起，数列 $\{a_n\}$ 为常数.----------------------12 分

另一方面，由于 $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} \le S_k + k$，

所以 $S_n \le S_1 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = n_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}$.----------------13 分

当 $n \ge n_0$ 时，$S_n \le n + \dfrac{n(n-1)}{2} < n^2$，

所以当 $n \ge n_0$ 时，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = bn$，满足 $b \le n$.

取 $k = n_0$，则从第 k 项起，数列 $\{S_n\}$ 为等差数列.-----------15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。