2022 北京石景山高三一模

数　　学

本试卷共 6 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将答题卡交回。

第一部分(选择题共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1.设全集 $U=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 1\}$,集合 $A=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x^2\geqslant 3\right\}$,则 $C_U A=$

A.$[1,\sqrt{3})$　　B.$[1,\sqrt{3}]$　　C.$(\sqrt{3},+\infty)$　　D.$[\sqrt{3},+\infty)$

2.复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=1-\mathrm{i}$,则 $z=$

A.$-\mathrm{i}$　　B.i　　C.-1　　D.1

3.从 $1,2,3,4,5$ 中不放回地抽取 2 个数,则在第 1 次抽到偶数的条件下,第 2 次抽到奇数的概率是

A.$\dfrac{2}{5}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{3}{5}$　　D.$\dfrac{3}{4}$

4.设 l 是直线，α,β 是两个不同的平面,则下列命题中正确的是

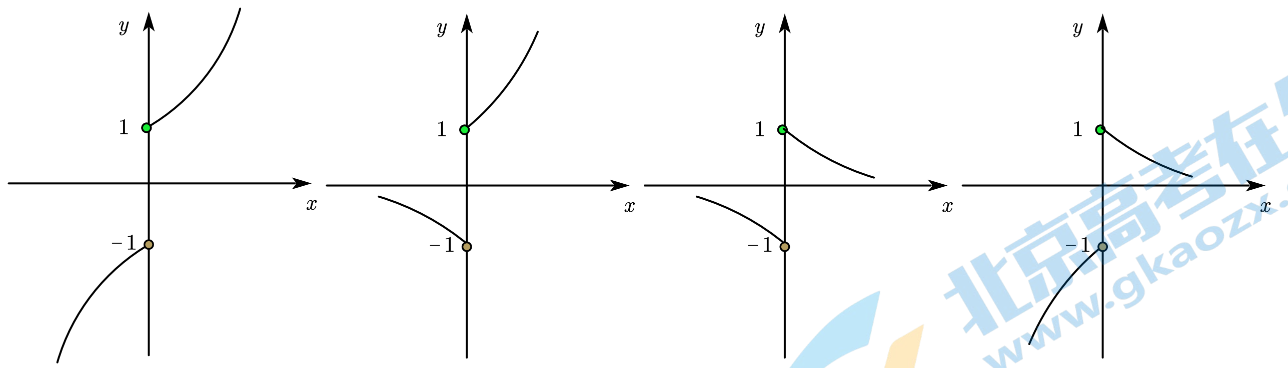
A.若 $l//\alpha,l//\beta$,则 $\alpha//\beta$　　B.若 $l//\alpha,l\perp\beta$,则 $\alpha\perp\beta$

C.若 $\alpha\perp\beta,l\perp\alpha$,则 $l\perp\beta$　　D.若 $\alpha\perp\beta,l//\alpha$,则 $l\perp\beta$

5.已知圆 $C:(x-3)^2+y^2=9$,过点 $(1,2)$ 的直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点,则弦 AB 长度的最小值为

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

6.函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|\cdot 3^x}$ 的图象大致为



A　　　　B　　　　C　　　　D

7.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_6+a_9=36$,设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则$S_{11}=$

A.12　　　　B.99　　　　C.132　　　　D.198

8.在ΔABC中,$\sin^2 A=\sin B\sin C$,若$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$,则$\angle B$的大小是

A.$\dfrac{\pi}{6}$　　　　B.$\dfrac{\pi}{4}$　　　　C.$\dfrac{\pi}{3}$　　　　D.$\dfrac{2\pi}{3}$

9.“$m<4$"是“$2x^2-mx+1>0$在$x\in(1,+\infty)$上恒成立"的

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

10.设A,B为抛物线$C:y=x^2$上两个不同的点,且直线AB过抛物线C的焦点F,分别以A,B为切点作抛物线C的切线,两条切线交于点P.则下列结论:

①点P一定在抛物线C的准线上;

②$PF\perp AB$;

③ΔPAB的面积有最大值无最小值.

其中,正确结论的个数是

A.0　　　　B.1　　　　C.2　　　　D.3

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

11.函数 $f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x+2}$ 的定义域是_________.

12.在 $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^5 的系数是_________.（用数字填写答案）

13.正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+2}=a_{n+1}^2, n\in\mathbf{N}^*$.若 $a_5=9, a_2a_4=1$,则 a_2 的值为_________.

14.设点 F_1, F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左,右焦点,点 P 是椭圆 C 上任意一点,若使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=m$ 成立的点恰好是 4 个,则实数 m 的一个取值可以为_________.

15.已知非空集合 A, B 满足: $A\cup B=\mathbf{R}, A\cap B=\varnothing$,函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x\in A,\\ 3x-2, x\in B\end{cases}$ 对于下列结论:

①不存在非空集合对 (A,B),使得 $f(x)$ 为偶函数;

②存在唯一非空集合对 (A,B),使得 $f(x)$ 为奇函数;

③存在无穷多非空集合对 (A,B),使得方程 $f(x)=0$ 无解.

其中正确结论的序号为_________.

三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明,演算步程或证明过程。

16.(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=m\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(m>0,\omega>0)$ 只能同时满足下列三个条件中的两个:

①函数 $f(x)$ 的最大值为 2;

②函数 $f(x)$ 的图象可由 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象平移得到;

③函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 π.

（1）请写出这两个条件的序号,说明理由,并求出 $f(x)$ 的解析式;

（2）在 ΔABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, $A=\dfrac{\pi}{3}, a=f(A)$,求 ΔABC 面积的最大值.

17.(本小题 13 分)

某学校高中三个年级共有 300 名学生,为调查他们的课后学习时间情况,通过分层抽样获得了 20 名学生一周的课后学习时间,数据如下表(单位：小时):

高一年级	7	7.5	8	8.5	9			
高二年级	7	8	9	10	11	12	13	
高三年级	6	6.5	7	8.5	11	13.5	17	18.5

（1）试估计该校高三年级的学生人数;

（2）从高一年级和高二年级抽出的学生中,各随机选取一人,高一年级选出的人记为甲,高二年级选出的人记为乙,求该周甲的课后学习时间不大于乙的课后学习时间的概率:

（3）再从高中三个年级中各随机抽取一名学生,他们该周的课后学习时间分别是$8,9,10$(单位:小时),这三个数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为$\overline{x_1}$,表格中的数据平均数记为$\overline{x_0}$,试判断$\overline{x_0}$与$\overline{x_1}$的大小.(结论不要求证明)

18.(本小题 14 分)

如图 1,在平面四边形$PDCB$中,$PD//BC, BA\perp PD, PA=AB=BC=1, AD=\dfrac{1}{2}$.将$\Delta PAB$沿$BA$翻折到$\Delta SAB$的位置,使得平面$SAB\perp$平面$ABCD$,如图 2 所示.

（1）设平面SDC与平面SAB的交线为l,求证:$BC\perp l$;

（2）在线段SC上是否存在一点Q(点Q不与端点重合),使得二面角$Q-BD-C$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,请说明理由.

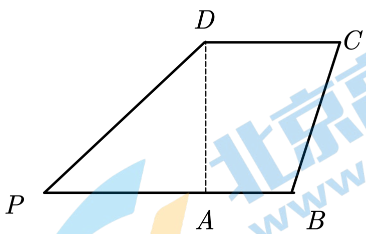


图1

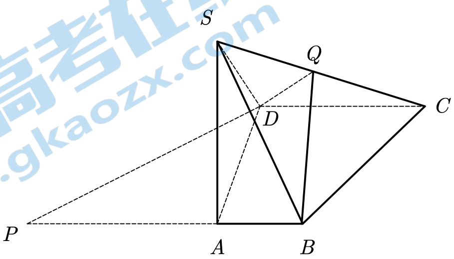


图2

19.(本小题 15 分)

设函数 $f(x)=x^2+m\ln(x+1)(m\in\mathbf{R})$.

（1）若 $m=-1$,

①求曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

②当 $x\in(1,+\infty)$ 时,求证: $f(x)<x^3$.

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一零点,求实数 m 的取值范围.

20.(本小题 15 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长等于 $2\sqrt{3}$,离心率 $e=\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）过右焦点 F 作斜率为 k 的直线 l,与椭圆 C 交于 A,B 两点,线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P,判断 $\dfrac{|PF|}{|AB|}$ 是否为定值,请说明理由.

21.(本小题 15 分)

若数列 $\{a_n\}$ 中存在三项,按一定次序排列构成等比数列,则称 $\{a_n\}$ 为“等比源数列”.

（1）已知数列 $\{a_n\}$ 为 $4,3,1,2$,数列 $\{b_n\}$ 为 $1,2,6,24$,分别判断 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是否为"等比源数列",并说明理由;

（2）已知数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n=2^{n-1}+1$,判断 $\{c_n\}$ 是否为“等比源数列”,并说明理由:

（3）已知数列 $\{d_n\}$ 为单调递增的等差数列,且 $d_1\neq 0, d_n\in\mathbf{Z}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$,求证 $\{d_n\}$ 为“等比源数列".

参考答案

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	D	B	B	D	C	C	B	C

二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $\{x|x>-1\}$； 12. 35； 13. $\frac{1}{3}$； 14. 0（答案不唯一）； 15. ①③.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 85 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. （本小题 13 分）

解：（I）函数 $f(x)=m\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 满足条件为①③，

理由如下：由题意可知条件①②互相矛盾，

故③为函数 $f(x)=m\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 满足的条件之一，

由③可知：$T=2\pi$，所以 $\omega=1$．故②不合题意，

所以函数 $f(x)=m\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 满足条件为①③，

由①知：$A=2$，所以 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$. .... 7 分

（II）由题意可得 $a=f(A)=f(\frac{\pi}{3})=2\sin\frac{\pi}{2}=2$，

由余弦定理得 $4=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

所以 $4=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$，当且仅当 $b=c$ 时取“=”

所以 $bc\leqslant 4$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

所以△ABC 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. .... 13 分

17. （本小题 13 分）

解:（I）抽出的 20 位学生中，来自高三年级的有 8 名，根据分层抽样方法，

可得高三年级的学生共有 $300\times\frac{8}{20}$=120（人）； . . . . 3 分

（II）设事件 A_i 为“甲是现有样本中高一年级中的第 i 个学生”，$i=1,2,3,4,5$，

事件 C_j 为“乙是现有样本中高二年级中的第 j 个学生”，$j=1,2,3,4,5,6,7$，

由题意知：$P(A_i)=\frac{1}{5}$，$P(C_j)=\frac{1}{7}$，由于事件 A_i 与事件 C_j 相互独立，

所以 $P(A_iC_j)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{35}$，

设事件 B 为“该周甲的学习时间不大于乙的学习时间”，

由题意知，$\bar{B}=A_2C_1\cup A_3C_1\cup A_4C_1\cup A_4C_2\cup A_5C_1\cup A_5C_2$，

由于 A_2C_1、A_3C_1、A_4C_1、A_4C_2、A_5C_1、A_5C_2 彼此互斥，所以

$P(\bar{B})$=$P(A_2C_1\cup A_3C_1\cup A_4C_1\cup A_4C_2\cup A_5C_1\cup A_5C_2)$

$=P(A_2C)+P(A_3C_1)+P(A_4C_1)+P(A_4C_2)+P(A_5C_1)+P(A_5C_2)=6\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{6}{35}$

所以 $P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{6}{35}=\frac{29}{35}$，

故该周甲的课后学习时间不大于乙的课后学习时间概率为 $\frac{29}{35}$． . . . . 7 分

（III）$\overline{x_{高一}}=\frac{7+7.5+8+8.5+9}{5}=8$，$\overline{x_{高二}}=\frac{7+8+9+10+11+12+13}{7}=10$，$\overline{x_{高三}}=\frac{6+6.5+7+8.5+11+13.5+17+18.5}{8}=11$

三组总平均值 $\overline{x_0}=\frac{40+70+88}{20}=9.9$，新加入的三个数 $8,9,10$ 的平均数为 9，

比 $\overline{x_0}$ 小，故拉低了平均值，所以 $\overline{x_1}<\overline{x_0}$． . . . . 13 分

18．（本小题 14 分）

解：（I）依题意，$AD\perp AB$

因为 $PD\parallel BC$，所以 $BC\perp AB$，

由于平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$，且交线为 AB，

$BC\subset$ 平面$ABCD$，

所以 $BC\perp$ 平面 SAB，

因为 l 是平面 SDC 与平面 SAB 的交线，

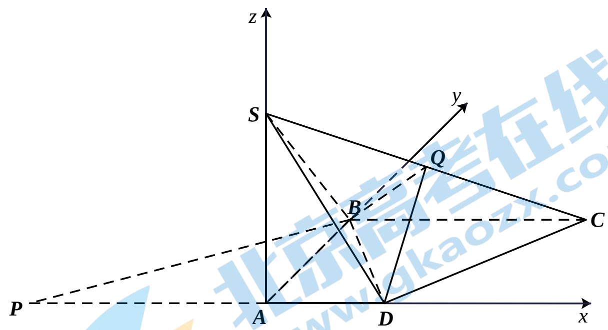
所以 $l\subset$ 平面 SAB，

故 $BC\perp l$． . . . . 6 分

（II）由（I）可知，$AD\perp$ 平面 SAB，所以 $AD\perp SA$，由题意可知 $SA\perp AB,AD\perp AB$．

以点 A 为坐标原点，分别以 AD,AB,AS 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，

$C(1,1,0)$，$D(\frac{1}{2},0,0)$，$S(0,0,1)$，



$\overrightarrow{BD}=(\frac{1}{2},-1,0)$，$\overrightarrow{SC}=(1,1,-1)$，

设 $\overrightarrow{SQ}=\lambda\overrightarrow{SC}(0<\lambda<1)$，则 $Q(\lambda,\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{BQ}=(\lambda,\lambda-1,1-\lambda)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 QBD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}x-y=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=\lambda x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，可得 $\vec{n}=(2,1,\dfrac{1-3\lambda}{1-\lambda})$，

由于 $\vec{m}=(0,0,1)$ 是平面 CBD 的一个法向量，

依题意，二面角 $Q-BD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

所以 $\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\left|\dfrac{1-3\lambda}{1-\lambda}\right|}{1\times\sqrt{4+1+(\dfrac{1-3\lambda}{1-\lambda})^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}\in(0,1)$，

所以当点 Q 是棱 SC 的中点时，符合题意．．．．．．．．．．．．．14 分

19．（本小题 15 分）

解：（I）$m=-1$，所以 $f(x)=x^2-\ln(x+1)$．

（i）$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x+1}$，$k=f'(0)=-1$．

又 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 点处的切线方程为 $y=-x$．．．．．．．．．．．．．．4 分

（ii）令 $F(x)=f(x)-x^3=x^2-\ln(x+1)-x^3$，

$F'(x)=2x-\dfrac{1}{x+1}-3x^2=\dfrac{-3x^3-x^2+2x-1}{x+1}=\dfrac{-3x^3-(x-1)^2}{x+1}$，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F(x)<F(1)=-\ln 2<0$，

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)<x^3$．．．．．．．．．．．．．．10 分

（II）$f(x)=x^2+m\ln(x+1)$，$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

$f'(x)=2x+\dfrac{m}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+m}{x+1}=0$，即 $2x^2+2x+m=0$．

当 $4-8m\le 0$ 即 $m\ge\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(0)=0$，所以在 $(0,1)$ 上无零点，不合题意；

当 $4-8m>0$ 即 $m<\dfrac{1}{2}$ 时 $2x^2+2x+m=0$ 有两根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$；

当 $2\times(-1)^2+2\times(-1)+m>0$ 即 $0<m<\dfrac{1}{2}$ 时，$x_1\in(-1,-\dfrac{1}{2})$，$x_2\in(-\dfrac{1}{2},0)$，

此时 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(0)=0$，所以在 $(0,1)$ 上无零点，不合题意；

当 $m=0$ 时 $f(x)=x^2$，此时 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点，不合题意；

当 $m<0$ 时 $x_1\in(-\infty,-1)$，$x_2\in(0,+\infty)$，

此时 $f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，$f(0)=0$，

所以 $f(x_2)<0$， $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一零点，即 $f(1)>0$ 即可．解得 $m>-\dfrac{1}{\ln 2}$．

综上，若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一零点，则 $m\in(-\dfrac{1}{\ln 2},0)$． . . . . 15 分

20．（本小题 15 分）

解：（I）由题意可得 $2b=2\sqrt{3}$，所以 $b=\sqrt{3}$，

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，由 $a^2=b^2+c^2$ 得 $a=2,c=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． . . . . 5 分

（II）$\dfrac{|PF|}{|AB|}$ 为定值．

证明：由题意可知，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$，

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$，

设 AB 的中点为 $Q(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$， $y_0=k(x_0-1)=\dfrac{-3k}{3+4k^2}$．

当 $k\neq 0$ 时，线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-\dfrac{-3k}{3+4k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{4k^2}{3+4k^2})$，

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{k^2}{3+4k^2}$，即 $P(\dfrac{k^2}{3+4k^2},0)$，

所以 $|PF|=|\dfrac{k^2}{3+4k^2}-1|=\dfrac{3(1+k^2)}{3+4k^2}$．

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)}\,|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\dfrac{8k^2}{3+4k^2})^2-\dfrac{16(k^2-3)}{3+4k^2}}=\dfrac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$．

所以 $\dfrac{|PF|}{|AB|}=\dfrac{\dfrac{3(1+k^2)}{3+4k^2}}{\dfrac{12(1+k^2)}{3+4k^2}}=\dfrac{1}{4}$．

当 $k=0$ 时，直线 l 的方程为 $y=0$，

此时，$|AB|=2a=4$，$|PF|=c=1$， $\dfrac{|PF|}{|AB|}=\dfrac{1}{4}$．

综上 $\dfrac{|PF|}{|AB|}$ 为定值 $\dfrac{1}{4}$． . . . . 15 分

21．（本小题 15 分）

解：（I）$\{a_n\}$ 是“等比源数列”，$\{b_n\}$ 不是“等比源数列”．

$\{a_n\}$中"1，2，4"构成等比数列，所以$\{a_n\}$是"等比源数列"；

$\{b_n\}$中"1，2，6"，"1，2，24"，"1，6，24"，"2，6，24"均不能构成等比数列，所以$\{b_n\}$不是"等比源数列"．．．．．．．．．．．．．．．4 分

（II）$\{c_n\}$不是"等比源数列"．

假设$\{c_n\}$是"等比源数列"，因为$\{c_n\}$是单调递增数列，即$\{c_n\}$中存在的c_m，c_n，c_k（$m<n<k$）三项成等比数列，也就是$c_n^{\ 2}=c_mc_k$，即$(2^{n-1}+1)^2=(2^{m-1}+1)(2^{k-1}+1)$，

$2^{2n-2}+2^n=2^{m+k-2}+2^{m-1}+2^{k-1}$，两边时除以$2^{m-1}$得$2^{2n-m-1}+2^{n-m+1}=2^{k-1}+1+2^{k-m}$，

等式左边$2^{2n-m-1}+2^{n-m+1}$为偶数，

等式右边$2^{k-1}+1+2^{k-m}$为奇数．

所以数列$\{c_n\}$中不存在三项按一定次序排列构成等比数列．

综上可得$\{c_n\}$不是"等比源数列"．．．．．．．．．．．．．．．9 分

（III）证明：因为等差数列$\{d_n\}$单调递增，所以$d>0$．

因为$d_n\in\mathbf{Z}$则$d\geq 1$，且$d\in\mathbf{Z}$，所以数列$\{d_n\}$中必有一项$d_m>0$．

为了使得$\{d_n\}$为"等比源数列"，只需要$\{d_n\}$中存在第n项，第k项（$m<n<k$），

使得$d_n^{\ 2}=d_md_k$成立，即$[d_m+(n-m)d]^2=d_m[d_m+(k-m)d]$，

即$(n-m)[2d_m+(n-m)d]=d_m(k-m)$成立．

当$n=d_m+m$，$k=2d_m+(n-m)d+m$时，上式成立．所以$\{d_n\}$中存在d_m，d_n，d_k成等比数列．所以，数列$\{d_n\}$为"等比源数列"．．．．．．．．．．．．15 分

【若有不同解法，请酌情给分】