2020年北京市高考适应性测试

数学参考答案

一、选择题（共10题，每题4分，共40分）

（1）B	（2）C	（3）C	（4）A	（5）A
（6）D	（7）B	（8）C	（9）A	（10）D

二、填空题（共5题，每题5分，共25分）

（11） 1　　　　（12） -2

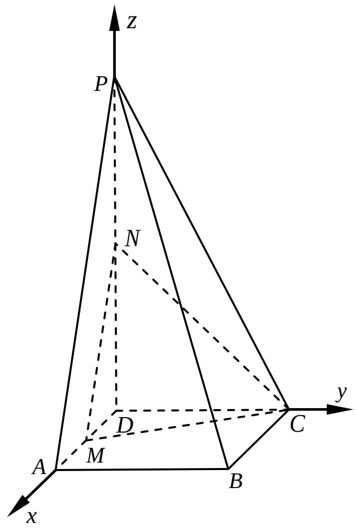
（13） 1　　　　（14） $\frac{3}{4}$　　$\frac{15\sqrt{7}}{4}$

（15） ①③

注：第14题第一空3分,第二空2分；第15题全部选对得5分，不选或有错选得0分，其他得3分。

三、解答题（共6题，共85分）

（16）（共14分）



解：（Ⅰ）因为 M, N 分别为 AD, PD 的中点，

所以 $PA // MN$．

又因为 $PA \not\subset$ 平面 MNC，

所以 $PA //$ 平面 MNC．

（Ⅱ）如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$．设 $AD=2$，

则 $B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,4)$，$M(1,0,0)$，

$N(0,0,2)$，$\overrightarrow{PB}=(2,2,-4)$，

$\overrightarrow{NC}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,0,2)$．

设平面 MNC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NC}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}-x+2z=0,\\ 2y-2z=0.\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $x=2$，$y=1$．所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,1)$．

设直线 PB 与平面 MNC 所成角为 α，

所以 $\sin\alpha = |\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{PB}\rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|} = \dfrac{1}{6}$.

（17）（共 14 分）

解 1：选择①

因为 $a_3 = 12$，所以 $a_1 = 3$.

所以 $S_n = \dfrac{3(1-2^n)}{1-2} = 3(2^n - 1)$.

令 $S_k > 2020$， 即 $2^k > \dfrac{2023}{3}$.

所以使得 $S_k > 2020$ 的正整数 k 的最小值为 10.

解 2：选择②

因为 $a_3 = 12$，所以 $a_1 = 48$，

$$S_n = \frac{48\times(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 96(1-\frac{1}{2^n}).$$

因为 $S_n < 96 < 2020$，

所以不存在满足条件的正整数 k.

解 3：选择③

因为 $a_3 = 12$，所以 $a_1 = 3$，

所以 $S_n = \dfrac{3\times(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = 1-(-2)^n$.

令 $S_k > 2020$，即 $1-(-2)^k > 2020$，整理得 $(-2)^k < -2019$.

当 k 为偶数时，原不等式无解；

当 k 为奇数时，原不等式等价于 $2^k > 2019$，

所以使得 $S_k > 2020$ 的正整数 k 的最小值为 11.

（18）（共 14 分）

解：设事件 A_i 为“甲是 A 组的第 i 株植物”，

事件 B_i 为“乙是 B 组的第 i 株植物”，

事件 C_i 为“丙是 C 组的第 i 株植物”，$i=1,2,\cdots,7$.

由题意可知 $P(A_i)=P(B_i)=P(C_i)=\dfrac{1}{7}$，$i=1,2,\cdots,7$.

（Ⅰ）设事件 D 为“丙的高度小于 15 厘米”，由题意知，$D=C_1\cup C_2$，又 C_1 与 C_2 互斥，

所以事件 D 的概率 $P(D)=P(C_1\cup C_2)=P(C_1)+P(C_2)=\dfrac{2}{7}$.

（Ⅱ）设事件 E 为“甲的高度大于乙的高度”. 由题意知，

$$E=A_4B_1\cup A_5B_1\cup A_6B_1\cup A_7B_1\cup A_5B_2\cup A_6B_2\cup A_7B_2\cup A_6B_3\cup A_7B_3\cup A_7B_4 .$$

所以事件 E 的概率
$$\begin{aligned}P(E)&=P(A_4B_1)+P(A_5B_1)+P(A_6B_1)+P(A_7B_1)+P(A_5B_2)\\&\quad+P(A_6B_2)+P(A_7B_2)+P(A_6B_3)+P(A_7B_3)+P(A_7B_4)\\&=10P(A_4B_1)\\&=10P(A_4)P(B_1)\\&=\frac{10}{49}.\end{aligned}$$

（Ⅲ）$\mu_0<\mu_1$.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\mathrm{e}^x(x-1)-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^a x^2$，所以 $f'(x)=x\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^a$.

所以 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线为 $y=-1$.

（Ⅱ）因为 $f'(x)=x\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^a=x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 a $(a<0)$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下：

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

由上表可知，当 $x=0$ 时， $f(x)$ 有极小值 $f(0)=-1$.

（Ⅲ）当 $x\leqslant 1$ 时， $f(x)<0$，且 $f(2)=\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^a>\mathrm{e}^2-2>0$.

由（Ⅱ）可知， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 的零点个数为 1.

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题设，得 $\begin{cases} b=1, \\ c=\sqrt{3}. \end{cases}$

所以 $a^2=b^2+c^2=4$，即 $a=2$.

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）设 $M(x_1,m)$，则 $N(-x_1,m)$， $x_1\neq 0$， $-1<m<1$.

所以直线 BM 的斜率为 $\dfrac{m-(-1)}{x_1-0}=\dfrac{m+1}{x_1}$.

因为直线 BD， BM 的斜率的积为 $-\dfrac{1}{4}$，

所以直线 BD 的斜率为 $-\dfrac{x_1}{4(m+1)}$.

直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{1-m}{x_1}x+1$.

直线 BD 的方程为 $y=-\dfrac{x_1}{4(m+1)}x-1$.

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{1-m}{x_1}x+1, \\ y=-\dfrac{x_1}{4(m+1)}x-1, \end{cases}$

解得点D的纵坐标为$y_D=\dfrac{-\frac{1}{4}x_1^{\ 2}-m^2+1}{-\frac{1}{4}x_1^{\ 2}+m^2-1}$.

因为点M在椭圆C上，所以$\dfrac{x_1^{\ 2}}{4}+m^2=1$，

则$y_D=0$.

所以点D在x轴上.

（21）（共14分）

解：（Ⅰ）$A_1=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）$A_0=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$经$\varphi_S$变换后得$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -6\end{pmatrix}$，

故$T_S(A_0)=1+3-3-6=-5$.

（Ⅲ）若$a_{11}\neq a_{12}$，在$\{1,2,3,4,5,6\}$的所有非空子集中，含有a_{11}且不含a_{12}的子集共2^4个，经过变换后第一行均变为$-a_{11},-a_{12}$；含有a_{12}且不含a_{11}的子集共2^4个，经过变换后第一行均变为$-a_{11},-a_{12}$；同时含有a_{11}和a_{12}的子集共2^4个，经过变换后第一行仍为a_{11},a_{12}；不含a_{11}也不含a_{12}的子集共2^4-1个，经过变换后第一行仍为a_{11},a_{12}.

所以经过变换后所有A_l的第一行的所有数的和为

$$2^4\times(-a_{11}-a_{12})+2^4\times(-a_{11}-a_{12})+2^4\times(a_{11}+a_{12})+(2^4-1)\times(a_{11}+a_{12})=-a_{11}-a_{12}.$$

若$a_{11}=a_{12}$，则$\{1,2,3,4,5,6\}$的所有非空子集中，含有a_{11}的子集共2^5个，经过变换后第一行均变为$-a_{11},-a_{12}$；不含有a_{11}的子集共2^5-1个，经过变换后第一行仍为a_{11},a_{12}.

所以经过变换后所有 A_l 的第一行的所有数的和为

$$2^5\times(-a_{11}-a_{12})+(2^5-1)\times(a_{11}+a_{12})=-a_{11}-a_{12}.$$

同理，经过变换后所有 A_l 的第二行的所有数的和为 $-a_{21}-a_{22}$.

所以 $T_S(A_0)$ 的所有可能取值的和为 $-a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22}$ ，

又因为 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\{1,2,\cdots,6\}$ ，

所以 $T_S(A_0)$ 的所有可能取值的和不超过 -4 .