2024 年度高三寒假新结构适应性测试模拟试卷（四）

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x|x=2k,\ k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=(\quad)$

A．$\{0,\ 2\}$　　B．$\{-2,\ 0\}$

C．$\{-2,\ 0,\ 2\}$　　D．$\{-2,\ -1,\ 0\}$

2．已知复数 $z=\cos75°+\mathrm{i}\sin75°$，则 $\dfrac{|z|^2}{z^2}=(\quad)$

A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

C．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D．1

3．设 D 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$，则$(\quad)$

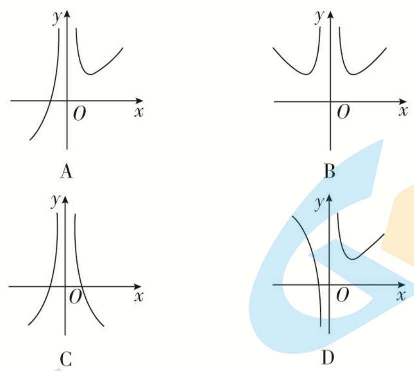
A．$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}$

B．$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

C．$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$

D．$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}$

4．函数 $f(x)=x+\dfrac{\cos x}{x^2}$的大致图象为$(\quad)$

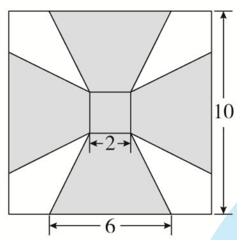


5．下列直线中，不是圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的公切线的一条直线是(　　)

A．$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$　　　　B．$y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$

C．$y=\frac{5}{12}x-\frac{13}{12}$　　　　D．$x=-1$

6．如图所示是一块边长为 10 cm 的正方形铝片，其中阴影部分由四个全等的等腰梯形和一个正方形组成，将阴影部分裁剪下来，并将其拼接成一个无上盖的容器(铝片厚度不计)，则该容器的容积为(　　)



A．$\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm³　　　　B．$\frac{104\sqrt{3}}{3}$ cm³

C．$80\sqrt{3}$ cm³　　　　D．$104\sqrt{3}$ cm³

7．已知函数 $f(x)$满足 $2f(x)+f(-x)=-2x$，若 $2^a=\log_2 b=c$，则(　　)

A．$f(a)<f(b)<f(c)$

B．$f(c)<f(b)<f(a)$

C．$f(a)<f(c)<f(b)$

D．$f(b)<f(c)<f(a)$

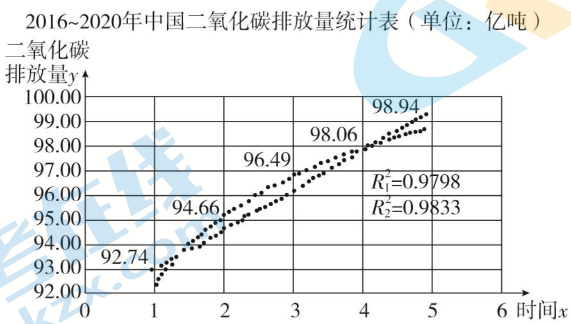
8．已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $a_n=n-1+\dfrac{8}{2n-1}$，$b_n=\dfrac{3n-7}{2^{n-1}}$，若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$(\lambda-a_n)(\lambda-b_n)<0$，则实数$\lambda$的取值范围是(　　)

A．$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{18}{5}\right]$　　B．$\left[\dfrac{5}{8},\dfrac{18}{5}\right]$

C．$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{3}\right]$　　D．$\left[\dfrac{5}{8},\dfrac{11}{3}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．进入 21 世纪以来，全球二氧化碳排放量增长迅速，自 2000 年至今，全球二氧化碳排放量增加了约 40%，我国作为发展中国家，经济发展仍需要大量的煤炭能源消耗．下图是 2016～2020 年中国二氧化碳排放量的统计图表(以 2016 年为第 1 年)．利用图表中的数据计算可得，采用某非线性回归模型拟合时，$R_1^2=0.9798$；采用一元线性回归模型拟合时，经验回归方程为$\hat{y}=1.58x+91.44$，$R_2^2=0.9833$.则下列说法正确的是(　　)



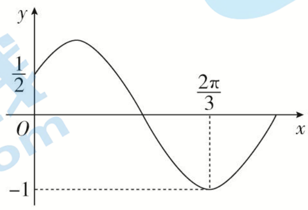
A．由图表可知，二氧化碳排放量 y 与时间 x 正相关

B．由决定系数可以看出，线性回归模型的拟合程度更好

C．利用经验回归方程计算 2019 年所对应的样本点的残差为 - 0.30

D．利用经验回归方程预计 2025 年中国二氧化碳排放量为 107.24 亿吨

10．已知 $f(x)$是定义在闭区间上的偶函数，且在 y 轴右侧的图象是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0，0<\varphi<\pi)$图象的一部分(如图所示)，则(　　)



A．$f(x)$的定义域为$[-\pi，\pi]$

B．当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值

C．当 $x<0$ 时，$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{2\pi}{3}，-\frac{\pi}{6}\right]$

D．当 $x<0$ 时，$f(x)$有且只有两个零点$-\frac{5\pi}{12}$和$-\frac{11\pi}{12}$

11．已知过抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点 F 作直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，弦 AB 的中点为 Q，过 A，B 两点分别作抛物线的两条切线交于点 P，PQ 交抛物线 C 于点 M，过 M 作抛物线 C 的切线，分别交 PA，PB 于点 D，E，则(　　)

A．$PQ\perp x$ 轴

B．$DE/\!/AB$

C．$S_{\triangle MAB}=3S_{\triangle PDE}$

D．$S_{\triangle ADM}$，$S_{\triangle PDM}$，$S_{\triangle PEM}$，$S_{\triangle BEM}$成等比数列

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

12．二项式$\left(3x-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中所有二项式系数之和为 64，则二项式的展开式中常数项为________．

13．若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$ 在区间 $(a-4，a)$ 上存在最小值，则整数 a 的取值可以是________(写出满足题意的一个值即可)．

14．数学家高斯在各个领域中都取得了重大的成就．在研究一类二次型数论问题时，他在他的著作《算术研究》中首次引入了二次剩余的概念．二次剩余理论在噪音工程学、密码学以及大数分解等各个领域都有广泛的应用．已知对于正整数 a，$n(n\geq2)$，若存在一个整数 x，使得 n 整除 x^2-a，则称 a 是 n 的一个二次剩余，否则为二次非剩余．从 1 到 20 这 20 个整数中随机抽取一个整数 a，记事件 A 为"a 与 12 互质"，事件 B 为"a 是 12 的二次非剩余"，则 $P(A)=$________，$P(B|A)=$________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_n+S_{n+1}=S_n+(-1)^{n+1}\cdot n$．

(1)求 S_{2n}；

(2)令 $b_n=\frac{1}{S_{2n}}$，证明：$n\in\mathbf{N}^*$，$b_1+b_2+b_3+\dots+b_n<2$．

16．据统计，某城市居民年收入(所有居民在一年内收入的总和，单位：亿元)与某类商品销售额(单位：万元)的 10 年数据如下表所示：

第 n 年	居民年收入 x/亿元	商品销售额 y/万元
1	32.2	25.0
2	31.1	30.0
3	32.9	34.0
4	35.7	37.0

5	37.1	39.0
6	38.0	41.0
7	39.0	42.0
8	43.0	44.0
9	44.6	48.0
10	46.0	51.0

依据表格数据，得到下面一些统计量的值．

$\sum_{i=1}^{10} x_i$	$\sum_{i=1}^{10} y_i$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
379.6	391	247.624	568.9	m

(1)根据表中数据，得到样本相关系数 $r\approx0.95$.以此推断，y 与 x 的线性相关程度是否很强?

(2)根据统计量的值与样本相关系数 $r\approx0.95$，建立 y 关于 x 的经验回归方程(系数精确到 0.01)；

(3)根据(2)的经验回归方程，计算第 1 个样本点(32.2，25.0)对应的残差(精确到 0.01)，并判断若剔除这个样本点再进行回归分析，$\hat{b}$的值将变大还是变小？(不必说明理由，直接判断即可)

附：样本$(x_i，y_i)(i=1，2，…，n)$的相关系数 $r=$错误!，$\sqrt{2.297}\approx1.516$，

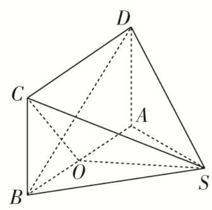
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}，\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

17．已知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，其图象相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$，若将其图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位得到函数 $y=g(x)$的图象．

(1)求函数 $y=g(x)$的解析式及图象的对称中心；

(2)在钝角三角形 ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $f\left(\frac{B}{2}\right)=g\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$，求$\frac{2c}{b}+\frac{5}{\cos A}$的取值范围．

18.如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形且垂直于侧面 SAB，O 为 AB 的中点，$SA=SB=AB=2$，$AD=\sqrt{2}$.



(1)证明：$BD\perp$平面 SOC；

(2)侧棱 SD 上是否存在点 E，使得平面 ABE 与平面 SCD 夹角的余弦值为$\frac{1}{5}$?若存在，求出$\frac{SE}{SD}$的值；若不存在，说明理由．

19．设抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，抛物线 C 上一点 A 的横坐标为 $x_1(x_1>0)$，过点 A 作抛物线 C 的切线 l_1，与 x 轴交于点 D，与 y 轴交于点 E，与直线 l：$y=\frac{p}{2}$交于点 M.当$|FD|=2$ 时，$\angle AFD=60°$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)若 B 为 y 轴左侧抛物线 C 上一点，过 B 作抛物线 C 的切线 l_2，与直线 l_1 交于点 P，与直线 l 交于点 N，求$\triangle PMN$ 面积的最小值，并求取到最小值时 x_1 的值．