北京一零一中 2019-2020 学年度高三第一学期统考二

一、选择题共 8 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A=\{-1,1,2\}$，$B=\{a+1,a^2-2\}$，若 $A\cap B=\{-1,2\}$，则 a 的值为（ ）

(A) -2 或 -1　　(B) 0 或 1　　(C) -2 或 1　　(D) 0 或 -2

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，那么 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于（ ）

(A) $(4,-8)$　　(B) $(4,0)$　　(C) $(0,4)$　　(D) $(-4,8)$

3. 已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，且 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，那么 $\sin\alpha=$（ ）

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{101}=$（ ）

(A) $2^{100}-3$　　(B) $2^{101}-3$　　(C) $2^{102}-1$　　(D) $2^{102}-3$

5. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$，则下列说法一定正确的是（ ）

(A) $f(x)$ 为奇函数　　(B) $f(x)+1$ 为奇函数　　(C) $f(x)$ 为偶函数　　(D) $f(x)+1$ 为偶函数

6. 在 $\triangle ABC$ 中，“$\cos A<\cos B$”是“$\sin A>\sin B$”的（ ）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 设 x_1,x_2,x_3 均为实数，且 $(\frac{1}{3})^{x_1}=\log_2(x_1+1)$，$(\frac{1}{3})^{x_2}=\log_3x_2$，$(\frac{1}{3})^{x_3}=\log_2x_3$，则（ ）

(A) $x_1<x_3<x_2$　　(B) $x_3<x_2<x_1$　　(C) $x_3<x_1<x_2$　　(D) $x_2<x_1<x_3$

8. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{5})\ (\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，下述四个结论：

① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点；　② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点；

③ $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{10})$ 单调递增；　④ ω 的取值范围是 $[\frac{12}{5},\frac{29}{10})$。

其中所有正确结论的编号是（ ）

(A) ①④　　(B) ②③　　(C) ①②③　　(D) ①③④

二、填空题共 6 小题。

9. 已知复数 z 满足 $z+\frac{3}{z}=0$，则 $|z|=$________。

10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$, 若将其图象向右平移 $\varphi\ (\varphi>0)$ 个单位长度后所得的图象关于原点对称, 则 φ 的最小值为______.

11. 不等式 $2^n>n^2-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 不是恒成立的, 请你只对该不等式中的数字作适当调整, 使得不等式恒成立. 请写出其中一个恒成立的不等式: ______

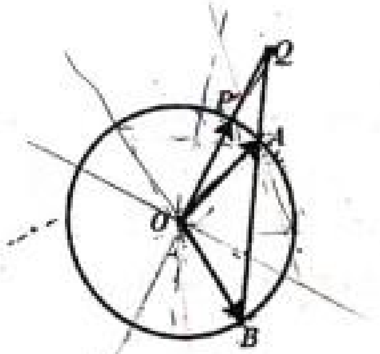
12. 纸张的规格是指纸张制成后, 经过修整切边, 裁成一定的尺寸. 现在我国采用国际标准, 规定以 $A0, A1, A2, B1, B2, \cdots$ 等标记来表示纸张的幅面规格. 复印纸幅面规格只采用 A 系列和 B 系列, 其中系列的幅面规格为:

① $A0, A1, A2, \cdots, A8$ 所有规格的纸张的幅宽 (以 x 表示) 和长度 (以 y 表示) 的比例关系都为 $x:y=1:\sqrt{2}$;

②将 $A0$ 纸张沿长度方向对开成两等分, 便成为 $A1$ 规格, $A1$ 纸张沿长度方向对开成两等分, 便成为 $A2$ 规格, $\cdots$, 如此对开至 $A8$ 规格.

现有 $A0, A1, A2, \cdots, A8$ 纸各一张. 若 $A4$ 纸的宽度为 2 dm, 则 $A0$ 纸的面积为______ dm^2; 这 9 张纸的面积之和等于______ dm^2.

13. 如图, A, B, P 是圆 O 上的三点, OP 的延长线与线段 BA 的延长线交于圆 O 外一点 Q, 若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$, 则 $a+b$ 的取值范围是______.



14. 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个周期函数, $f(x)$ 的周期为 4, $g(x)$ 的周期为 2, 且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x\in(0,2]$ 时, $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$, $g(x)=\begin{cases}k(x+2), & 0<x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 其中 $k>0$. 若在区间 $(0,9]$ 上, 关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 k 的取值范围是______.

三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3 = 6, a_5 + a_8 = 26$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 2^{a_n} + n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对应的边分别是 a, b, c, $a\sin B = \sqrt{3}b\cos A$.

(1) 求 $\angle A$ 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{21}, b = 5$, 求 c 的值.

17. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})} + 2\sin x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及其单调递增区间;

(2) 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ 时，对任意 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $mt^2 - mt + 2 \geqslant f(x)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < 3$ 时，记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 求 $M - m$ 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = e^x \cdot (a + \ln x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $y = -\frac{x}{e}$ 垂直，求 a 的值;

(2) 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$. 当 $a \in (0, \ln 2)$ 时，证明: $g(x)$ 存在极小值点 x_0, 且 $f(x_0) < 0$.

20. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：对于任意的正整数 n, $a_n \in \mathbf{N}^*$, $a_n < a_{n+1}$, 且 $a_{2n} = 2a_n$, 则称该数列为“跳级数列”.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为“跳级数列”, 且 $a_4 = 4$, 求 a_3, a_{101} 的值;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为“跳级数列”, 则对于任意一个大于 a_1 的质数 p, 在数列 $\{a_n\}$ 中总有一项是 p 的倍数;

(3) 若 p 为奇质数, 则存在一个“跳级数列” $\{a_n\}$, 使得数列 $\{a_n\}$ 中每一项都不是 p 的倍数.

北京一零一中2019-2020学年度第一学期高三数学统考二参考答案

1. C 2. A 3. D 4. D 5. B 6. C 7. A 8. D 9. $\sqrt{3}$. 10. $\frac{\pi}{12}$.

11. $2^n > n^2 - c(c>1)$; $3^n > n^3 - 1$; $4^n > n^2 - 1$ (答案不唯一).

12. $64\sqrt{2}$, $\frac{511\sqrt{2}}{4}$.

根据题意A4的长宽分别是$2\sqrt{2}$, 2; A3的长宽分别是4, $2\sqrt{2}$; A2的长宽分别是$4\sqrt{2}$, 4; A1的长宽分别是8, $2\sqrt{2}$; A0的长宽分别是$8\sqrt{2}$, 8; 所以A0的面积为$64\sqrt{2}$; A0, A1, A2, …, A8纸张的面积是以首项为$64\sqrt{2}$, 公比为$\frac{1}{2}$的等比数列,

所以这9张纸的面积之和等于 $\frac{64\sqrt{2}[1-(\frac{1}{2})^9]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{511\sqrt{2}}{4}$.

13. $(0,1)$. 14. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

15.

(1) 设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1, 公差为d,

则$\begin{cases} a_1 + 2d = 6, \\ a_1 + 4d + a_1 + 7d = 26, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 2. \end{cases}$

所以$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$.

(2) 由(1) 可得$b_n = 2^{2n} + n = 4^n + n$,

所以$s_n = \frac{4(1-4^n)}{1-4} + \frac{n(1+n)}{2} = \frac{4^{n+1}-4}{3} + \frac{n+n^2}{2}$.

16.

(1) 在$\triangle ABC$中, 由正弦定理$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得$a\sin B = b\sin A$.

又$a\sin B = \sqrt{3}b\cos A$, 得$\tan A = \sqrt{3}$.

由于$0 < A < \frac{\pi}{2}$, 所以$A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $a = \sqrt{21}$, $b = 5$, $A = \frac{\pi}{3}$,

在$\triangle ABC$中, 由余弦定理$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

得$21 = 5^2 + c^2 - 2\cdot 5\cdot c\cdot\frac{1}{2}$, 即$c^2 - 5c + 4 = 0$,

解得$c = 1$, 或$c = 4$.

当$c = 1$时, $\cos B = \frac{1^2 + (\sqrt{21})^2 - 5^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{21}} < 0$.

此时, $\triangle ABC$为钝角三角形, 舍去.

经检验, $c = 4$满足题意.

17. (1) 由$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \neq 0$ 得$x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

因

为

$f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}+2\sin x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}+2\sin x=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$．

因为函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$，$k\in\mathbf{Z}$，

又由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

但 $x\neq k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi-\frac{\pi}{4})$ 和 $(2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4})$，

$k\in\mathbf{Z}$．

(2) 由(1)得 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$．

因为 $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$，所以 $x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{3\pi}{4},\frac{11\pi}{12}]$，

所以 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(\frac{\pi}{2})=1$．

则题目等价于 $mt^2-mt+2\geq 1$ 恒成立，即 $mt^2-mt+1\geq 0$ 恒成立，

当 $m=0$ 时，有 $1\geq 0$ 恒成立；

当 $m\neq 0$ 时，有 $m>0$ 且 $\Delta=m^2-4m\leq 0$，得到 $m\in(0,4]$．

综上，$m\in[0,4]$．

18.

(1) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$．

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$．

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{a}{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,\frac{a}{3})$ 时，$f'(x)<0$．

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\frac{a}{3},+\infty)$ 单调递增，在 $(0,\frac{a}{3})$ 单调递减；

若 $a=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

若 $a<0$，则当 $x\in(-\infty,\frac{a}{3})\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\frac{a}{3},0)$ 时，$f'(x)<0$．

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{a}{3})$，$(0,+\infty)$ 单调递增，在 $(\frac{a}{3},0)$ 单调递减．

(2) 当 $0<a<3$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $(0,\frac{a}{3})$ 单调递减，在 $(\frac{a}{3},1)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}+2$，最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$．

于是$m=-\frac{a^3}{27}+2$，$M=\begin{cases}4-a, & 0<a<2,\\ 2, & 2\le a<3.\end{cases}$所以$M-m=\begin{cases}2-a+\frac{a^3}{27}, & 0<a<2,\\ \frac{a^3}{27}, & 2\le a<3.\end{cases}$

当$0<a<2$时，可知$2-a+\frac{a^3}{27}$单调递减，所以$M-m$的取值范围是$(\frac{8}{27},2)$.

当$2\le a<3$时，$\frac{a^3}{27}$单调递增，所以$M-m$的取值范围是$[\frac{8}{27},1)$.

综上，$M-m$的取值范围是$[\frac{8}{27},2)$.

19.

(1) $f'(x)=e^x\cdot(a+\ln x)+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$.

依题意，有 $f'(1)=e\cdot(a+1)=e$，解得 $a=0$.

(2) 由(1) 得 $g(x)=e^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$，

所以 $g'(x)=e^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)+e^x\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=e^x\cdot(a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x)$.

因为 $e^x>0$，所以$g'(x)$与$a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$同号.

设 $h(x)=a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$，则 $h'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^3}=\frac{(x-1)^2+1}{x^3}$.

所以对任意$x\in(0,+\infty)$，有$h'(x)>0$，故$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

因为 $a\in(0,\ln 2)$，所以 $h(1)=a+1>0$，$h(\frac{1}{2})=a+\ln\frac{1}{2}<0$，

故存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $h(x_0)=0$.

$g(x)$与$g'(x)$在区间$(\frac{1}{2},1)$上的情况如下:

x	$(\frac{1}{2},x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$在区间$(\frac{1}{2},x_0)$上单调递减，在区间$(x_0,1)$上单调递增.

所以若$a\in(0,\ln 2)$，存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得x_0是$g(x)$的极小值点.

令 $h(x_0)=0$，得 $a+\ln x_0=\frac{1-2x_0}{x_0^2}$，

所以 $f(x_0)=e^{x_0}\cdot(a+\ln x_0)=e^{x_0}\cdot\dfrac{1-2x_0}{x_0^2}<0$.

20. (1) $a_3=3$，$a_{101}=101$.

(2) 数列为"跳级数列"，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n$ 为正整数，记 $s=\min\{a_{n+1}-a_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}$，可知 $s\in\mathbf{N}^*$，且 $p>s\geq a_2-a_1=a_1$．记 $m\in\{n\in\mathbf{N}^*\mid s=a_{n+1}-a_n\}$，

对于质数 p，必存在 k，使得 $2^k>p(k\in\mathbf{N}^*)$.

反复应用 $a_{2n}=2a_n$，得

$a_{2^k(m+1)}-a_{2^k m}=2(a_{2^{(k-1)}(m+1)}-a_{2^{(k-1)}m})=\cdots=2^{k-1}(a_{2(m+1)}-a_{2m})=2^k s$.

另一方面，因为对于满足 $2^k m\leq n\leq 2^k(m+1)-1$ 的任意 n，均有 $a_{n+1}-a_n\geq s$.

所以对于所有 $2^k m\leq n\leq 2^k(m+1)-1$，都有 $a_{n+1}-a_n=s$ (利用迭加).

这表明，数列 $a_{2^k m}$，$a_{2^k m+1}$，$a_{2^k m+2}$，$a_{2^k m+3}$，$\cdots$，$a_{2^k(m+1)}$ 是以 s 为公差的等差数列.

假设对于整数对 $(i,j)(0\leq i<j\leq p-1)$，均有 $a_{2^k m+j}-a_{2^k m+i}$ 是质数 p 的整数倍，

即 $a_{2^k m+j}-a_{2^k m+i}=(j-i)s$ 必为 p 的整数倍，$0<j-i<p$，且 $0<s\leq a_2-a_1=a_1<p$ 同时成立，知这与 p 为质数矛盾.

由此可知，$a_{2^k m},a_{2^k m+1},a_{2^k m+2},a_{2^k m+3},\cdots,a_{2^k m+p-1}$ 除以 p 所得余数互不相同.

(构造一个 p 的完全剩余系) 所以必有一个是 p 的倍数.

(3) 对于正整数 n，设 k_n 为非负整数，且满足 $2^{k_n}\leq n<2^{k_n+1}$.

则 $2^{k_n}\times 2\leq 2n<2^{k_n+1}\times 2$，即 $2^{k_n+1}\leq 2n<2^{k_n+2}$.

根据定义有 $2^{k_{2n}}\leq 2n<2^{k_{2n}+1}$，由 $k_n\leq k_{n+1}$，且 $k_{2n}=k_n+1$，

令 $a_n=np+2^{k_n}$，则 $a_{2n}=2np+2^{k_{2n}}=2np+2^{k_n+1}=2(np+2^{k_n})=2a_n$，

则显然 $\{a_n\}$ 为跳级数列，又 p 为奇质数，于是，2^{k_n} 不为 p 的倍数，因此 a_n 也不为 p 的倍数.