2024届"皖南八校"高三第二次大联考

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x\in \mathbf{N}^*\mid x^2-4x-5\leqslant 0\}$，$N=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{0,1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$　　D. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$

2. 形如 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 我们称为"二阶行列式"，规定运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，若在复平面上的一个点 A 对应复数为 z，其中复数 z 满足 $\begin{vmatrix} z & 1-\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} & 1 \end{vmatrix}=\mathrm{i}$，则点 A 在复平面内对应坐标为

A. $(3,2)$　　B. $(2,3)$

C. $(-2,3)$　　D. $(3,-2)$

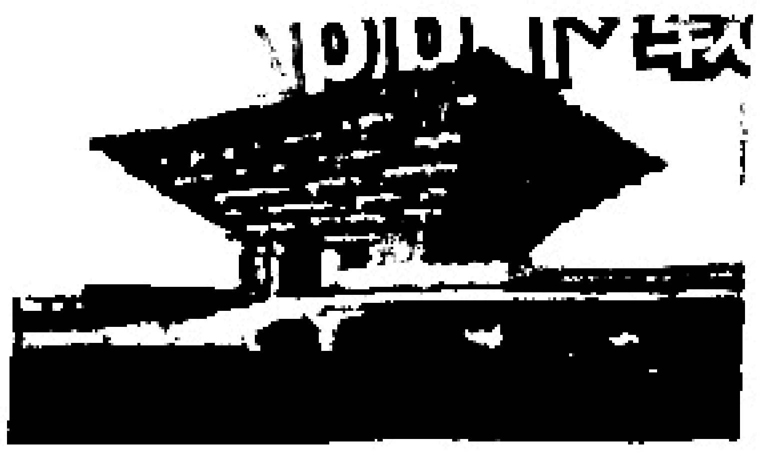
3. 已知动点的坐标满足方程 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}-y-1=0$，则动点 M 的轨迹是

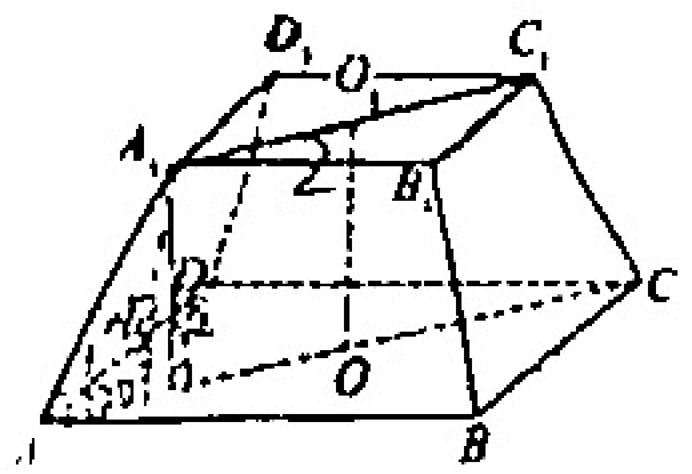
A. 椭圆　　B. 双曲线　　C. 抛物线　　D. 圆

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,m)$，$\boldsymbol{b}=(m+1,-1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{c}=(2,1)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影向量的坐标是

A. $\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)$

5. 中国国家馆，以城市发展中的中华智慧为主题，表现出了"东方之冠，鼎盛中华，天下粮仓，富庶百姓"的中国文化精神与气质。如图，现有一个与中国国家馆结构类似的正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，上下底面的中心分别为 O_1 和 O，若 $AB=2A_1B_1=4$，$\angle A_1AB=60°$，则正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为





A. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{20\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{28\sqrt{6}}{3}$

6. 已知数列$\{a_n\}$是递增数列，且$a_n\in\mathbf{N}^*$，数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n=67$，则a_1的最大值为

A. 5　　　　B. 6

C. 7　　　　D. 8

7. 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，函数$g(x)$满足$g(x)+g(-x)=0$，且$f(x)$，$g(x)$在$(-\infty,0]$单调递减，则

A. $f(g(x))$在$[0,+\infty)$单调递减　　　　B. $g(g(x))$在$(-\infty,0]$单调递减

C. $g(f(x))$在$[0,+\infty)$单调递减　　　　D. $f(f(x))$在$(-\infty,0]$单调递减

8. 已知点P在直线$x+y-6=0$上，过点P作圆$O:x^2+y^2=4$的两条切线，切点分别为A，B，点M在圆$C:(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=1$上，则点$M$到直线$AB$距离的最大值为

A. $\sqrt{5}$　　　　B. $\sqrt{5}+1$

C. $2\sqrt{2}$　　　　D. $2\sqrt{2}+1$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 下列说法正确的是

A. 一组数据2、3、3、4、5、7、7、8、9、11的第80百分位数为8.5

B. 在回归分析中，可用决定系数R^2判断模型拟合效果，R^2越小，模型的拟合效果越好

C. 若变量ξ服从$N(17,\sigma^2)$，$P(17<\xi\leqslant 18)=0.4$，则$P(\xi>18)=0.1$

D. 将总体划分为2层，通过分层抽样，得到两层的样本平均数和样本方差分别为$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$和s_1^2，s_2^2，若$\bar{x}_1=\bar{x}_2$，则总体方差$s^2=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2)$

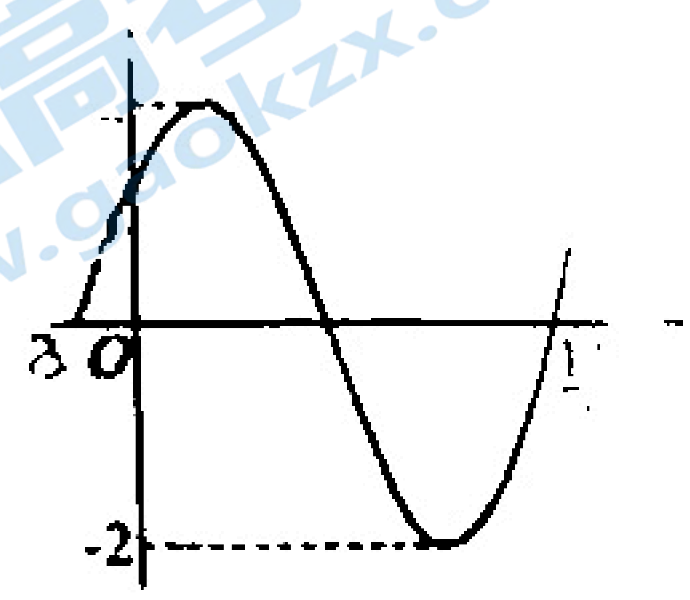
10. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，且$f(0)=1$，若$g(x)=f(x+a)$为奇函数，则$|a|$可能取值为

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{5\pi}{12}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{12}$



11. 若函数$f(x)=ae^x+be^{-x}+cx$，既有极大值点又有极小值点，则

A. $ac<0$　　　　B. $bc<0$

C. $a(b+c)<0$　　　　D. $c^2+4ab>0$

12. 已知一圆锥，其母线长为l且与底面所成的角为$60°$，下列空间几何体可以被整体放入该圆锥的是（参考数值：$\sqrt{3}\approx1.73$，$\sqrt{2}\approx1.41$）

A. 一个半径为$0.28l$的球

B. 一个半径为$0.28l$与一个半径为$0.09l$的球

C. 一个边长为$0.45l$且可以自由旋转的正四面体

D. 一个底面在圆锥底面上，体积为$0.04\pi l^3$的圆柱

三、填空题：共4小题，每小题5分，共20分.

13. 二项式$(x-2)(1+x)^n$的展开式中，所有项系数和为-256，则x^2的系数为________（用数字作答）.

14. 随机变量ξ有3个不同的取值，且其分布列如下：

ξ	$4\sin\alpha$	$4\cos\alpha$	$2\sin 2\alpha$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	a

则$E(\xi)$的最小值为________.

15. 已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过左焦点$F_1$作直线$l$与双曲线交于$A$，$B$两点（$B$在第一象限），若线段$AB$的中垂线经过点$F_2$，且点$F_2$到直线$l$的距离为$\sqrt{5}a$，则双曲线的离心率为________.

16. 已知函数$f(x)=a\ln x+\frac{e^{2x}}{e^2x^a}-2x+1$，$(a>0)$有唯一零点，则$a$的值为________.

四、解答题：共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$2\sqrt{S_n}=a_n+1$，$n\in N^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

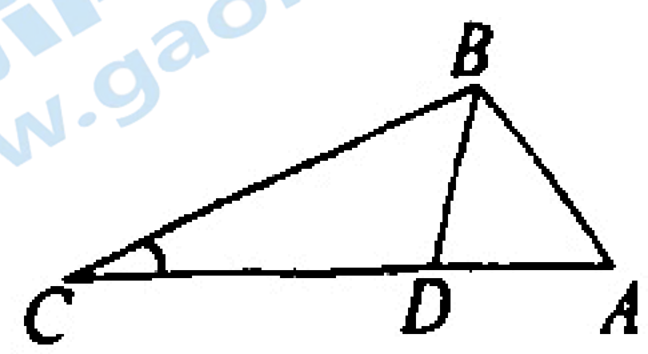
(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$和$T_n$.

18.（12分）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b^2-a^2=ac$.

(1)求证：$B=2A$；

(2)如图：点D在线段AC上，且$AD=BD=\frac{1}{2}CD$，求$\cos C$的值.

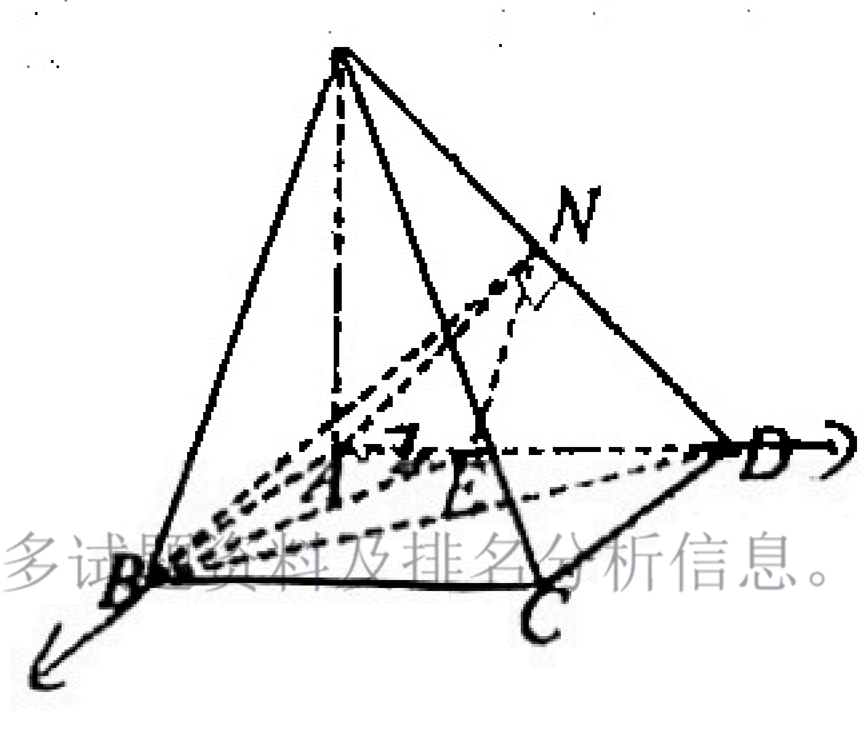


19.（12分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，棱$PA\perp$平面$ABCD$，底面四边形$ABCD$是矩形，$PA=AD=6$，点N为棱PD的中点，点E在棱AD上，$AD=3AE$.

(1)求证：$PC\perp AN$；

(2)已知平面PAB与平面PCD的交线l与直线BE所成角的正切值为$\frac{1}{2}$，求二面角$N-BE-D$的余弦值.



20.（12 分）

人工智能（AI）是一门极富挑战性的科学，自诞生以来，理论和技术日益成熟. 某公司研究了一款答题机器人，参与一场答题挑战. 若开始基础分值为 m（m（　　）分，每轮答 2 题，都答对得 1 分，仅答对 1 题得 0 分，都答错得 -1 分. 若该答题机器人答对每道题的概率均为 $\frac{1}{2}$，每轮答题相互独立，每轮结束后机器人累计得分为 X，当 $X=2m$ 时，答题结束，机器人挑战成功，当 $X=0$ 时，答题也结束，机器人挑战失败.

（1）当 $m=3$ 时，求机器人第一轮答题后累计得分 X 的分布列与数学期望；

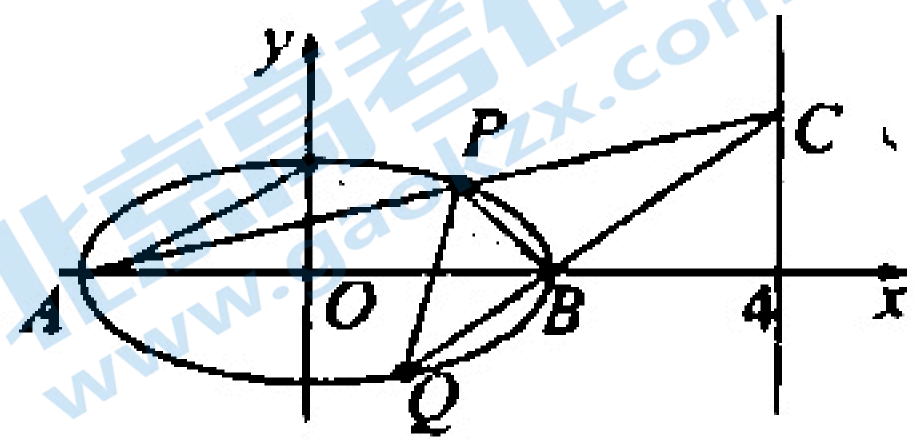
（2）当 $m=4$ 时，求机器人在第 6 轮答题结束且挑战成功的概率.

21.（12 分）

如图，已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点分别为 A、B，P 是椭圆 M 上异于 A、B 的动点，满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$，当 P 为上顶点时，$\triangle ABP$ 的面积为 2.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）若直线 AP 交直线 l：$x=4$ 于 C 点，直线 CB 交椭圆于 Q 点，求证：直线 PQ 过定点.



22.（12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-e^{-x}$，$(a\in\mathbf{R})$.

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，求此时 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-(a+1)x$，且存在 x_1，x_2 分别为 $g(x)$ 的极大值点和极小值点.

（ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（ⅱ）若 $a\in(0,1)$，且 $g(x_1)+kg(x_2)>0$，求实数 k 的取值范围.

2024 届“皖南八校”高三第二次大联考·数学

参考答案、解析及评分细则

1. B　$x^2-4x-5\leqslant 0$，解得：$-1\leqslant x\leqslant 5$，所以 $M=\{x\in \mathbf{N}^*\mid -1\leqslant x\leqslant 5\}=\{1,2,3,4,5\}$，$N=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，所以 $M\cap N=\{1,2,3,4\}$. 故选 B.

2. A　由题意得 $z=(1+2i)(1-i)=i$，$\therefore z=3+2i$. 故选 A.

3. C　等式变形为 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=y+1$，表示动点 $M(x,y)$ 到点 $F(0,1)$ 和直线 $y=-1$ 的距离相等，所以动点 M 的轨迹是抛物线. 故选 C.

4. A　$a\perp b$，故 $2(m+1)-m=0$，解得 $m=-2$，所以 $a=(2,-2)$，则 a 在 c 方向上的投影向量为 $\frac{a\cdot c}{|c|}\cdot\frac{c}{|c|}=\frac{2\times 2-2\times 1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$. 故选 A.

5. B　$AA_1=\frac{\frac{1}{2}(AB-A_1B_1)}{\cos\angle A_1AB}=2$，因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台，$AB=2A_1B_1=4$，所以 $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2\sqrt{2}$，$A_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{2}A_1B_1=\sqrt{2}$，所以 $OO_1=\sqrt{AA_1^2-(AO-A_1O_1)^2}=\sqrt{2}$，所以该四棱台的体积为 $V=\frac{1}{3}OO_1(S_{ABCD}+S_{A_1B_1C_1D_1}+\sqrt{S_{ABCD}S_{A_1B_1C_1D_1}})=\frac{\sqrt{2}}{3}(16+4+8)=\frac{28\sqrt{2}}{3}$. 故选 B.

6. C　因为 $a_n\in\mathbf{N}^*$，为使 a_5 取最大，则 $a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=4,a_6=a_5+1,a_7=a_5+2,a_8=a_5+3,a_9=a_5+4,a_{10}=a_5+5$，所以 $S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10+6a_5+15=67$，则 $(a_5)_{max}=7$. 故选 C.

7. C　由题意知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，$g(x)$ 为奇函数，在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 设 $0\leqslant x_1<x_2$，则 $g(x_2)<g(x_1)\leqslant 0$，$f(g(x_2))>f(g(x_1))$，所以 $f(g(x))$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，故 A 错误；设 $x_1<x_2\leqslant 0$，则 $g(x_1)>g(x_2)$，$g(g(x_1))<g(g(x_2))$，$g(g(x))$ 在 $(-\infty,0]$ 单调递增，故 B 错误；不妨设 $0\leqslant x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，$g(f(x_1))>g(f(x_2))$，所以 $g(f(x))$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，故 C 正确；取 $f(x)=x^2-1$，则 $f(f(x))=(x^2-1)^2-1$，$f(f(-2))=8$，$f(f(-1))=-1$，$f(f(x))$ 在 $(-\infty,0]$ 可能不单调，故 D 错误. 故选 C.

8. B　根据题意，设点 $P(m,n)$，则 $m+n=6$，过点 P 作圆 $O:x^2+y^2=4$ 的切线，切点分别为 A,B，则有 $OA\perp PA$，$OB\perp PB$，则点 A,B 在以 OP 为直径的圆上，以 OP 为直径的圆的圆心为 $D(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$，半径 $r=\frac{1}{2}|OP|=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$，则其方程为 $(x-\frac{m}{2})^2+(y-\frac{n}{2})^2=\frac{m^2+n^2}{4}$，变形可得 $x^2+y^2-mx-ny=0$，联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2+y^2-mx-ny=0\end{cases}$，可得圆 D 和圆 O 公共弦 AB 为：$mx+ny-4=0$，又由 $m+n=6$，则有 $mx+(6-m)y-4=0$，变形可得 $m(x-y)+6y-4=0$，则有 $\begin{cases}x-y=0\\6y-4=0\end{cases}$，可解得 $x=y=\frac{2}{3}$，故直线 AB 恒过定点 $Q(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，点 M 在圆 $C:(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{4}{3})^2=1$ 上，$C(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$，则点 M 到直线 AB 距离的最大值为 $|CQ|+1=\sqrt{(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3})^2+(-\frac{4}{3}-\frac{2}{3})^2}+1=\sqrt{5}+1$. 故选 B.

9. AC　对于 A，数据 2，3，3，4，5，7，7，8，9，11 共 10 个数，因为 $10\times 80\%=8$，因此，这组数据的第 80 百分位数为 $\frac{8+9}{2}=8.5$，故 A 正确；对于 B，在回归分析中，可用决定系数 R^2 的值判断模型拟合效果，R^2 越大，模型的拟合效果越好，故 B 错误；对于 C，因为变量 ξ 服从 $N(17,\sigma^2)$，$P(17<\xi\leqslant 18)=0.4$，则 $P(\xi>18)=0.5-P(17<\xi\leqslant 18)=0.5-0.4=0.1$，故 C 正确；对于 D，不妨设两层的样本容量分别为 m,n，总样本平均数为 $\overline{x}$，则 $s^2=\frac{m}{m+n}[s_1^2+(\overline{x}-\overline{x}_1)^2]+\frac{n}{m+n}[s_2^2+(\overline{x}-\overline{x}_2)^2]$，易知只有当 $m=n$，$\overline{x}_1=\overline{x}_2$ 时，有 $s^2=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2)$，故 D 错误. 故选 AC.

10. BD　由图象可得 $A=2$，再根据 $f(0)=2\sin\varphi=1$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，又 $T=\frac{2\pi}{\omega}>\frac{11}{12}\pi$，则 $0<\omega<\frac{24}{11}$，又 $\omega\times\frac{11\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $\omega=2$，故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 要使 $g(x)=f(x+a)$ 为奇函数，则 $g(0)=f(a)=0$，所以 $2a+\frac{\pi}{6}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $a=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$，当 $k=0$ 时 $a=-\frac{\pi}{12}$，当 $k=1$ 时 $a=\frac{5\pi}{12}$，B、D 符合，其它选项不符合. 故选 BD.

11. ACD　由题知方程 $f'(x)=ae^x-be^{-x}+c=\frac{ae^{2x}+ce^x-b}{e^x}=0\Leftrightarrow ae^{2x}+ce^x-b=0$ 有两不等实根 x_1,x_2，令 $t=e^x, t>0$，则方程 $at^2+ct-b=0$ 有两个不等正实根 t_1,t_2，其中 $t_1=e^{x_1}, t_2=e^{x_2}$，$\begin{cases}a\neq0\\ \Delta=c^2+4ab>0\\ t_1+t_2=-\frac{c}{a}>0\\ t_1t_2=-\frac{b}{a}>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}c^2+4ab>0\\ ac<0\\ ab<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bc>0\\ a(b+c)=ab+ac<0\end{cases}$，故 ACD 正确，B 错误. 故选 ACD.

12. ABC　如图 1，球 O_1 与圆锥侧面、底面均相切，球 O_2 与球 O_1、圆锥侧面相切，作圆锥的轴截面如图 2，设小球 O_1 半径为 r_1，球 O_1 与 BC 边相切于点 E，$\angle CBA=60^\circ$，$\angle DCB=30^\circ$，$O_1E\perp BC$，所以 $CO_1=2r_1$，$CD=3r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}l$，$\therefore r_1=\frac{\sqrt{3}}{6}l>0.28l$，故 A 正确；设小球 O_2 半径为 r_2，同理可知 $r_2=\frac{1}{3}r_1=\frac{\sqrt{3}}{18}l>0.09l$，故 B 正确；已知棱长为 a 的正四面体外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$，则 $\frac{\sqrt{6}}{4}a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}l$ 则边长 $a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}l$，$\because\frac{\sqrt{2}}{3}l>0.45l$，故 C 正确；如图 3，一圆柱内接圆锥，作圆锥的轴截面如图 4，设圆柱底面半径为 r_3，高为 h，则 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}l-\sqrt{3}r_3$，圆柱的体积 $V(r_3)=\pi r_3^2h=\pi r_3^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l-\sqrt{3}r_3\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi(lr_3^2-2r_3^3)$，令 $V'(r_3)=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi(2lr_3-6r_3^2)=0$，得 $r_3=0$ 或 $r_3=\frac{1}{3}l$，则体积在 $\left(0,\frac{1}{3}l\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{3}l,\frac{1}{2}l\right)$ 上单调递减，$\therefore V(r_3)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{54}\pi l^3<0.04\pi l^3$，故 D 错误. 故选 ABC.

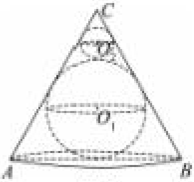


图 1

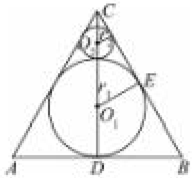


图 2

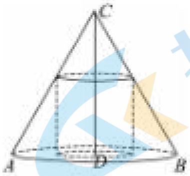


图 3

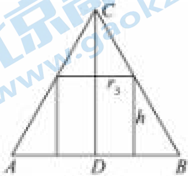


图 4

13. -48　令 $x=1$ 可得二项式 $(x-2)(1+x)^n$ 的所有项系数和为 $-2^n=-256$，所以 $n=8$. 二项式 $(1+x)^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot x^r, r=0,1,\cdots,8$，所以 $(x-2)(1+x)^n$ 的展开式中，x^2 的系数为 $C_8^1-2C_8^2=-48$.

14. $-\frac{5}{4}$　依题意知 $a=\frac{1}{2}$，则 $E(\xi)=\sin\alpha+\cos\alpha+\sin2\alpha$，设 $t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，$\sin2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=t^2-1$，所以 $E(\xi)=t^2+t-1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，当 $t=-\frac{1}{2}$ 时，$E(\xi)$ 取最小值 $-\frac{5}{4}$.

15. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　设双曲线 E 的半焦距为 $c, c>0$，$|BF_2|=|AF_2|$，根据题意得 $|BF_1|-|BF_2|=2a$，又 $|AF_2|-|AF_1|=|BF_2|-|AF_1|=2a$，$\therefore|AB|=|BF_1|-|AF_1|=4a$，设 AB 的中点为 C，在 $\triangle ACF_2$ 中，$|CF_2|=\sqrt{5}a$，$|AC|=2a$，$\therefore|AF_2|=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{5}a)^2}=3a$，则 $|AF_1|=a$，$|CF_1|=3a$，根据 $|CF_1|^2+|CF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

可知$(3a)^2+(\sqrt{5}a)^2=(2c)^2$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

16. 2 由题意知$a\ln x+\frac{e^{2x}}{e^2x^a}=2x-1$有唯一解，$x>0$，故$\frac{e^{2x}}{e^2x^a}=2x-1-a\ln x=\ln e^{2x}-\ln e-\ln x^a=\ln\frac{e^{2x}}{ex^a}$，设$\frac{e^{2x}}{ex^a}=t(t>0)$，即$\frac{t}{e}=\ln t$，设$F(t)=\frac{t}{e}-\ln t$，则$F'(t)=\frac{1}{e}-\frac{1}{t}$，当$t\in(0,e)$时，$F'(t)<0$，函数$F(t)$单调递减；当$t\in(e,+\infty)$时，$F'(t)>0$，函数$F(t)$单调递增；$F(t)_{min}=F(e)=0$，故方程$\frac{t}{e}=\ln t$有唯一解$t=e$，即$\frac{e^{2x}}{ex^a}=e$有唯一解，即$a\ln x=2x-2$有唯一解，设$g(x)=a\ln x-2x+2$，$g'(x)=\frac{a}{x}-2$，$a>0$，当$x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增；当$x\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减；当$x$趋近于0和$x$趋近于$+\infty$时，$g(x)$趋近于$-\infty$，故只需满足$g\left(\frac{a}{2}\right)=a\ln\frac{a}{2}-a+2=0$，设$h(a)=a\ln\frac{a}{2}-a+2$，$h'(a)=\ln\frac{a}{2}$，当$a\in(0,2)$时，$h'(a)<0$，函数$h(a)$单调递减；当$a\in(2,+\infty)$时，$h'(a)>0$，函数$h(a)$单调递增；故$h(a)_{min}=h(2)=0$，故$a=2$成立.

17. 解：(1)由$2\sqrt{S_n}=a_n+1$得$S_n=\frac{1}{4}(a_n+1)^2$，则$a_1=\frac{1}{4}(a_1+1)^2$，解得$a_1=1$，

当$n\geq2$时，$S_{n-1}=\frac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$，所以$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4}(a_n+1)^2-\frac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$，

整理得$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$，

因为$\{a_n\}$是正项数列，所以$a_n+a_{n-1}>0$，所以$a_n-a_{n-1}=2$，

所以$\{a_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列，所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$. ………………………… 5分

(2)由(1)可得，$a_n=2n-1$，

所以$b_n=a_n+\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}=2n-1+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=2n-1+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，

所以$T_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=n^2+1-\frac{1}{2n+1}$

$=n^2+\frac{2n}{2n+1}$. ………………………………………………………………………………………… 10分

18. (1)证明：由余弦定理得$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

又$b^2-a^2=ac$，可得$c^2-ac=2ac\cos B$，即$c-a=2a\cos B$，

由正弦定理得$\sin C-\sin A=2\sin A\cos B$，

而$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，代入上式，

可得$\sin A=\cos A\sin B-\sin A\cos B=\sin(B-A)$，

所以$A+B-A=\pi$(舍)或$A=B-A$，

即$B=2A$. ………………………………………………………………………………………… 6分

(2)解：因为$B=2A$，$AD=BD$，所以$\angle A=\angle ABD=\angle CBD$，

由正弦定理得$\frac{CD}{BD}=\frac{\sin\angle CBD}{\sin\angle C}=\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}=\frac{a}{c}$，

而$BD=\frac{1}{2}CD$，可得$a=2c$，

代入$b^2-a^2=ac$，可得$b=\sqrt{6}c$，

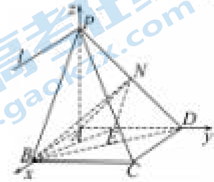
由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2c)^2+(\sqrt{6}c)^2-c^2}{4\sqrt{6}c^2}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$. ……………………………… 12分

19. (1)证明：因为$PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$，

又因为四边形$ABCD$是矩形，所以$AD\perp CD$，

因为$PA\cap AD=A$，所以$CD\perp$平面PAD.

因为 $AN\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AN$.
因为 N 为 PD 中点，$PA=AD$，所以 $PD\perp AN$，
因为 $PD\cap CD=D$，所以 $AN\perp$ 平面 PCD，
因为 $PC\subset$ 平面 PCD，所以 $AN\perp PC$. ………………………………………………………………………… 6 分



(2)解：在矩形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$CD\subset$ 平面 PCD，$AB\not\subset$ 平面 PCD，
所以 $AB/\!/$ 平面 PCD.
又 $AB\subset$ 平面 PAB，平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$，所以 $AB/\!/l$.
所以 l 与直线 BE 所成角即为 $\angle ABE$.
在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AE=\frac{1}{3}AD=2$，$AB\perp AE$，
所以 $AB=\frac{AE}{\tan\angle ABE}=4$. ………………………………………………………………………………………… 8 分
以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系，
则 $B(4,0,0)$，$E(0,2,0)$，$N(0,3,3)$，所以 $\overrightarrow{BE}=(-4,2,0)$，$\overrightarrow{BN}=(-4,3,3)$.
设平面 BNE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，
则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-4x+2y=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BN}=-4x+3y+3z=0\end{cases}$，取 $z=2$，可得 $\boldsymbol{m}=(-3,-6,2)$. ………………………………… 10 分
又 $\overrightarrow{AP}=(0,0,6)$ 为平面 BDE 的一个法向量，
所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AP}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{12}{6\times7}=\frac{2}{7}$.
由图可知，二面角 $N-BE-D$ 为锐角，所以二面角 $N-BE-D$ 的余弦值为 $\frac{2}{7}$. ……………………………… 12 分

20. 解：(1)当 $m=3$ 时，第一轮答题后累计得分 X 所有取值为 4，3，2，
$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(X=3)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，
所以第一轮答题后累计得分 X 的分布列为：

X	4	3	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

所以 $E(X)=3$. ……… 6 分
(2)当 $m=4$ 时，设"第六轮答题后，答题结束且挑战成功"为事件 A，
此时情况有 2 种，分别为：
情况①：前 5 轮答题中，得 1 分的有 3 轮，得 0 分的有 2 轮，第 6 轮得 1 分；
情况②：前 4 轮答题中，得 1 分的有 3 轮，得 -1 分的有 1 轮，第 5，6 轮都得 1 分；
所以 $P(A)=C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)+C_4^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{1024}$. ……………………………… 12 分

21. (1)解：设椭圆上顶点 $P_0(0,b)$，
则 $k_{P_0A}\cdot k_{P_0B}=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{-a}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{4}$，
又 $S_{\triangle ABP_0}=\frac{1}{2}\times2ab=2$，
两式联立可解得 $a=2$，$b=1$，所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………… 4 分
(2)证明：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$C(4,t)$，
当直线 PQ 斜率不存在时，$x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，

则直线 AC：$y=\frac{t}{6}(x+2)$，BC：$y=\frac{t}{2}(x-2)$，

所以$\begin{cases} y_1=\frac{t}{6}(x_1+2), \\ -y_1=\frac{t}{2}(x_1-2) \end{cases}$,可解得 $x_1=1$.

此时直线 PQ 方程为 $x=1$,过定点 $(1,0)$; ………………………………………………………… 6 分

下面证明斜率存在时,直线 PQ 也经过 $(1,0)$.

法 1(设而求点):

联立直线 AC 与椭圆方程:$\begin{cases} y=\frac{t}{6}(x+2), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 整理得 $(t^2+9)x^2+4t^2x+4t^2-36=0$,

$\Delta=16t^4-4(t^2+9)(4t^2-36)>0$,

由韦达定理有 $x_1-2=\frac{-4t^2}{t^2+9}$,即 $x_1=\frac{18-2t^2}{t^2+9}$,所以 $y_1=\frac{t}{6}(x_1+2)=\frac{6t}{t^2+9}$,

所以 P 点坐标为 $\left(\frac{18-2t^2}{t^2+9},\frac{6t}{t^2+9}\right)$;

同理可得 Q 点坐标为 $\left(\frac{2t^2-2}{t^2+1},\frac{-2t}{t^2+1}\right)$. ………………………………………………………… 8 分

设点 $M(1,0)$,则 $\overrightarrow{MP}=\left(\frac{9-3t^2}{t^2+9},\frac{6t}{t^2+9}\right)$,$\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{t^2-3}{t^2+1},\frac{-2t}{t^2+1}\right)$,

因为 $\frac{9-3t^2}{t^2+9}\cdot\frac{-2t}{t^2+1}-\frac{6t}{t^2+9}\cdot\frac{t^2-3}{t^2+1}=0$,所以 $\overrightarrow{MP}\parallel\overrightarrow{MQ}$.

所以直线 PQ 过定点 $M(1,0)$,证毕. ………………………………………………………… 12 分

法 2(直曲联立):

当直线 PQ 斜率存在时,设直线 PQ 为 $y=kx+m$,

由 $k_{PA}=\frac{t}{6}$,$k_{BQ}=\frac{t}{2}$,可知 $k_{BQ}=3k_{PA}$,而 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$,

可得 $k_{BQ}\cdot k_{PB}=-\frac{3}{4}$,即 $\frac{y_2}{x_2-2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=-\frac{3}{4}$,

整理得 $3x_1x_2+4y_1y_2-6(x_1+x_2)+12=0$①. ………………………………………………………… 8 分

联立直线 PQ 与椭圆方程:$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$,

整理得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

所以 $\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=16(4k^2+1-m^2)>0$,则 $4k^2+1>m^2$.

由韦达定理有 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$②.

所以 $y_1\cdot y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}$③. ………………… 10 分

将②③代入①得 $3\times\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+4\times\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}+6\times\frac{8km}{4k^2+1}+12=0$.

可得 $(2k+m)(k+m)=0$,所以 $m=-2k$ 或 $m=-k$.

当 $m=-2k$ 时,直线 PQ 为 $y=kx-2k$,经过 $B(2,0)$,舍去.

所以 $m=-k$,此时直线 PQ 为 $y=kx-k$,经过定点 $(1,0)$.

直线 PQ 过定点得证. ………………………………………………………… 12 分

法 3(构造对偶式):

由 $k_{PA}=\frac{t}{6}$,$k_{BQ}=\frac{t}{2}$,可知 $k_{BQ}=3k_{PA}$.

又 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$,由椭圆对称性易知 $k_{QA}\cdot k_{QB}=-\frac{1}{4}$,

可得$\begin{cases}\dfrac{y_2}{x_2-2}=3\times\dfrac{y_1}{x_1+2}\\ \dfrac{y_1}{x_1-2}=3\times\dfrac{y_2}{x_2+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1y_2-3x_2y_1=-6y_1-2y_2 ①\\ x_2y_1-3x_1y_2=-2y_1-6y_2 ②\end{cases}$,

由①②可得 $x_1y_2-x_2y_1=y_2-y_1$, ………………………………………………………………………… 10分

直线 PQ 为 $y-y_1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,令 $y=0$ 得,$x=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}=1$,

所以直线 PQ 过定点$(1,0)$,证毕. ………………………………………………………………………… 12分

22. 解:(1) $f(x)$为偶函数,有 $f(-x)=ae^{-x}-e^{x}=f(x)=ae^{x}-e^{-x}$,则 $a=-1$, ……………………… 1分

所以 $f(x)=-e^{x}-e^{-x}$,$f'(x)=-e^{x}+e^{-x}$,

所以 $f(0)=-2$,$f'(0)=0$,

所以 $f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y+2=0$. ……………………………………………………… 4分

(2)(ⅰ)$g(x)=f(x)-(a+1)x=ae^{x}-e^{-x}-(a+1)x$,

$g'(x)=ae^{x}+e^{-x}-(a+1)=\dfrac{ae^{2x}-(a+1)e^{x}+1}{e^{x}}=\dfrac{(ae^{x}-1)(e^{x}-1)}{e^{x}}$,

因为函数 $g(x)$既存在极大值,又存在极小值,

则 $g'(x)=0$ 必有两个不等的实根,则 $a>0$,

令 $g'(x)=0$ 可得 $x=0$ 或 $x=-\ln a$,

所以 $-\ln a\neq 0$,解得 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

令 $m=\min\{0,-\ln a\}$,$n=\max\{0,-\ln a\}$,则有:

x	$(-\infty,m)$	m	(m,n)	n	$(n,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

可知 $g(x)$分别在 $x=m$ 和 $x=n$ 取得极大值和极小值,符合题意.

综上,实数 a 的取值范围是$(0,1)\cup(1,+\infty)$. ……………………………………………………… 8分

(ⅱ)由 $a\in(0,1)$,可得 $-\ln a>0$,

所以 $x_1=0$,$x_2=-\ln a$,$g(x_1)=a-1$,$g(x_2)=1-a+(a+1)\ln a$,且有 $g(x_2)<g(x_1)<0$,

由题意可得 $a-1+k[1-a+(a+1)\ln a]>0$ 对 $\forall a\in(0,1)$恒成立,

由于此时 $g(x_2)<g(x_1)<0$,则 $k<0$,

所以 $k(a+1)\ln a>(k-1)(a-1)$,则 $\ln a<\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{a-1}{a+1}$, ……………………………… 9分

令 $h(x)=\ln x-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$,其中 $0<x<1$,

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-2x\left(1-\dfrac{1}{k}\right)}{x(x+1)^2}=\dfrac{x^2+\dfrac{2}{k}x+1}{x(x+1)^2}$,

令 $x^2+\dfrac{2}{k}x+1=0$,则 $\Delta=\dfrac{4}{k^2}-4=\dfrac{4(1-k^2)}{k^2}$.

①当 $\Delta\leq 0$,即 $k\leq -1$ 时,$h'(x)\geq 0$,$h(x)$在$(0,1)$上是严格增函数,

所以 $h(x)<h(1)=0$,即 $\ln a<\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{a-1}{a+1}$,符合题意;

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！