

2020 年全国高中数学联赛重庆赛区预赛试题

一、填空题

1. 已知向量 a, b 满足 $|a-b|=3, |a+2b|=6, a^2+a \cdot b-2b^2=-9$, 则 $|b| = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ 均为实数, 若集合 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的所有非空真子集的元素之和为 28, 则 $a_1+a_2+a_3+a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 若二次实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 有 2 个虚根 x_1, x_2 , 且 $x_1^3 \in R$, 则 $\frac{ac}{b^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设圆 $O: x^2+y^2=5$ 与抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 交于点 $A(x_0, 2)$, AB 为圆 O 的直径, 过 B 的直线与 C 交于两不同点 D, E , 则直线 AD 与 AE 的斜率之积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 若实数 x, y 满足 $2^x+4x+12 = \log_2(y-1)^3+3y+12=0$, 则 $x+y = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 若 x, y 为实数, 则 $|2x+y|, |x-y|, |1+y|$ 这三个数中的最大数的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 四面体 $ABCD$ 中, $AB \perp BC, CD \perp BC, BC=2$, 且异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60° . 若四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $\sqrt{5}$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 有长为 $2^n (n=0, 1, \dots, 1009)$ 的线段各三条, 则由这 3030 条线段能构成不全等的三角形的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

二、解答题

9. 设实数 $t \in [0, \pi]$, 若关于 x 的方程 $\cos(x+t) = 1 - \cos x$ 有解, 求 t 的取值范围.
10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $x = -\sqrt{2}b$ 有且只有一个交点, 点 P 为椭圆 C 上任一点, $P_1(-1, 0), P_2(1, 0)$, 且 $\overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_2}$ 的最小值为 $\frac{a}{2}$.
 - (1) 求椭圆 C 的方程;
 - (2) 设直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于不同两点 A, B , 点 O 为坐标原点, 且 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 当 $\triangle AOB$ 的面积 S 最大时, 求 $T = \frac{1}{|MP_1|^2} - 2|MP_2|$ 的取值范围.
11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$.
 - (1) 求证: $1 + a_n a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是完全平方数;
 - (2) 记 $b_n = \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right] \cdot \left\{ \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right\}$, 求证: $\prod_{k=2}^{2020} b_k$ 是整数. (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$.)

2020 年全国高中数学联赛重庆赛区预赛试题参考答案

一、填空题

1. 已知向量 a, b 满足 $|a-b|=3, |a+2b|=6, a^2+a \cdot b-2b^2=-9$, 则 $|b|$ = _____.

答案: $\sqrt{7}$

解析: 由条件, 知 $a^2+a \cdot b-2b^2=(a-b) \cdot (a+2b)=-9$, 所以 $|3b|=|(a+2b)-(a-b)|$
 $=\sqrt{[(a+2b)-(a-b)]^2}=\sqrt{(a+2b)^2+(a-b)^2-2(a+2b) \cdot (a-b)}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$, 所以
 $|b|=\sqrt{7}$.

2. 设 $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ 均为实数, 若集合 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的所有非空真子集的元素之和为 28, 则 $a_1+a_2+a_3+a_4$ = _____.

答案: 4

解析: 含有元素 $a_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的非空真子集有 7 个, 所以 $I=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的所有非空真子集的元素之和为 $7(a_1+a_2+a_3+a_4)=28$, 从而 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$.

3. 若二次实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 有 2 个虚根 x_1, x_2 , 且 $x_1^3 \in R$, 则 $\frac{ac}{b^2}$ = _____.

答案: 1

解析: 注意 $x_2=\overline{x_1}$, 由 $x_1^3 \in R \Rightarrow x_1^3=\overline{x_1^3}=(\overline{x_1})^3=x_2^3 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0$
 $\Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2=0 \Rightarrow (x_1+x_2)^2=x_1x_2 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c}{a} \Rightarrow b^2=ac \Rightarrow \frac{ac}{b^2}=1$.

4. 设圆 $O: x^2+y^2=5$ 与抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 交于点 $A(x_0, 2)$, AB 为圆 O 的直径, 过 B 的直线与 C 交于两不同点 D, E , 则直线 AD 与 AE 的斜率之积为 _____.

答案: 2

解析: 可求得点 $A(1, 2), B(-1, -2)$, 设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$, 则由 B, D, E 三点共线可得

$$\frac{y_1+2}{x_1+1}=\frac{y_2+2}{x_2+1} \Rightarrow y_1y_2+2(y_1+y_2)=4$$

$$\Rightarrow k_{AD} \cdot k_{AE} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 1} \cdot \frac{y_2 - 2}{x_2 - 1} = \frac{16}{y_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) + 4} = 2.$$

5. 若实数 x, y 满足 $2^x + 4x + 12 = \log_2(y - 1)^3 + 3y + 12 = 0$, 则 $x + y =$ _____.

答案: -2

解析: 令 $s = x - 2$, 则 $2^x + 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow 2^s = -s - 5$; 令 $t = y - 1$, 则 $\log_2(y - 1)^3 + 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow \log_2 t = -t - 5$. 注意函数 $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 且函数 $y = -x - 5$ 的图像也关于直线 $y = x$ 对称, 而 $y = x$ 与 $y = -x - 5$ 的交点横坐标为 $-\frac{5}{2}$, 所以 $s + t = -5$, 从而 $x + y = s + t + 3 = -2$.

6. 若 x, y 为实数, 则 $|2x + y|, |x - y|, |1 + y|$ 这三个数中的最大数的最小值是 _____.

答案: $\frac{1}{2}$

解析: $\max\{|2x + y|, |x - y|, |1 + y|\} \geq \frac{1}{6}(|2x + y| + 2|x - y| + 3|1 + y|),$

$$\geq \frac{1}{6} \cdot |(2x + y) - 2(x - y) - 3(1 + y)| = \frac{1}{2}$$

当且仅当 $x = 0, y = -\frac{1}{2}$ 时取到最小值.

7. 四面体 $ABCD$ 中, $AB \perp BC, CD \perp BC, BC = 2$, 且异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60° .

若四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $\sqrt{5}$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 _____.

答案: $2\sqrt{3}$

解析: 考察直三棱柱 $ABD_1 - A_1CD$, 其中 $BC = 2, \angle ABD_1 = 60^\circ$, 则四面体 $ABCD$ 为满足题设条件的四面体, 且四面体 $ABCD$ 的外接球与三棱柱 $ABD_1 - A_1CD$ 的外接球相同. 设三棱柱底面三角形 $\triangle ABD_1$ 的外接圆半径为 r , 则 $r^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 5 \Rightarrow r = 2$. $\triangle ABD_1$ 中, 由正

弦定理, $\frac{AD_1}{\sin \angle ABD_1} = 2r \Rightarrow AD_1 = 2\sqrt{3}$; 再由余弦定理,

$$AD_1^2 = AB^2 + BD_1^2 - 2AB \cdot BD_1 \cdot \cos \angle ABD_1 \Rightarrow AB^2 + BD_1^2 - AB \cdot BD_1 = 12, \text{ 从而由均}$$

值不等式可得 $AB \cdot BD_1 \leq 12$, 所以

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{ABD_1 - A_1CD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BD_1 \cdot \sin \angle ABD_1 \cdot BC \leq 2\sqrt{3}, \text{ 当三棱柱 } ABD_1 - A_1CD \text{ 为}$$

正三棱柱时可取等，故四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 $2\sqrt{3}$.

8. 有长为 2^n ($n = 0, 1, \dots, 1009$) 的线段各三条，则由这 3030 条线段能构成不全等的三角形的个数为_____.

(用数字作答)

答案: 510555

解析: (1) 若 $0 \leq i < j < k \leq 1009$, 则 $2^i + 2^j < 2^j + 2^j = 2^{j+1} \leq 2^k$, 那么 $2^i, 2^j, 2^k$ 一定不构成三角形;

(2) 若 $0 \leq i < j \leq 1009$, 则 $2^i + 2^i = 2^{i+1} \leq 2^j$, 那么 $2^i, 2^i, 2^j$ 一定不构成三角形;

(3) 若 $0 \leq i < j \leq 1009$, 则 $2^i + 2^j > 2^j, 2^j + 2^j > 2^i$, 那么 $2^i, 2^j, 2^j$ 一定构成三角形;

(4) 若 $0 \leq k \leq 1009$, 则 $2^k, 2^k, 2^k$ 一定构成等边三角形.

综合(1),(2),(3),(4)知, 构成三角形的只能是 $2^i, 2^j, 2^j$ ($i < j$) 或等边三角形, 共有

$$C_{1010}^2 + 1010 = 510555 \text{ 个.}$$

二、解答题

9. 设实数 $t \in [0, \pi]$, 若关于 x 的方程 $\cos(x+t) = 1 - \cos x$ 有解, 求 t 的取值范围.

解: 原方程等价于 $\cos\left(x + \frac{t}{2}\right) \cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$,4 分

当 $t = \pi$ 时, 方程左边等于 0, 显然无解;

当 $t \in [0, \pi)$ 时, 方程进一步等价于 $\cos\left(x + \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2 \cos \frac{t}{2}}$, 注意 $\cos\left(x + \frac{t}{2}\right) \in [-1, 1]$, 且

$$\cos \frac{t}{2} > 0,$$

故方程有解当且仅当 $0 < \frac{1}{2 \cos \frac{t}{2}} \leq 1$ 12 分

$$\text{即 } \frac{1}{2} \leq \cos \frac{t}{2} \leq 1, \text{ 解得 } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

综上所述, $t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 16 分

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与直线 $x = -\sqrt{2}b$ 有且只有一个交点, 点 P 为椭圆

C 上任一点, $P_1(-1,0), P_2(1,0)$, 且 $\overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_2}$ 的最小值为 $\frac{a}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 C 交于不同两点 A, B , 点 O 为坐标原点, 且

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 当 $\triangle AOB$ 的面积 S 最大时, 求 $T = \frac{1}{|MP_1|^2} - 2|MP_2|$ 的取值范围.

解: (1) 设点 $P(x, y)$, 由题意知 $a = \sqrt{2}b$, $C: x^2 + 2y^2 = a^2$, 则

$$\overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_2} = x^2 + y^2 - 1 = -y^2 + a^2 - 1,$$

当 $y = \pm b$ 时, $\overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{PP_2}$ 取得最小值, 即 $a^2 - b^2 - 1 = \frac{a}{2}$,

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} - 1 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2, b = \sqrt{2}, \text{ 故椭圆 } C \text{ 的 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$, 则

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 得 } (2k^2 + 1)x^2 + 4mkx + 2m^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{4mk}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 4}{2k^2 + 1}, \text{ 点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} \cdot \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{4mk}{2k^2 + 1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2m^2 - 4}{2k^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{m^2(4k^2 + 2 - m^2)}}{2k^2 + 1} \leq \sqrt{2} \cdot \frac{m^2 + (4k^2 + 2 - m^2)}{2k^2 + 1} = \sqrt{2}$$

S 取得最大值 $\sqrt{2}$, 当且仅当 $m^2 = 4k^2 + 2 - m^2$ 即 $m^2 = 2k^2 + 1$, ① $\dots\dots\dots 10$ 分

$$\text{此时 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2mk}{2k^2 + 1} = -\frac{2k}{m}, y_0 = kx_0 + m = -\frac{2k^2}{m} + m = \frac{1}{m}, \text{ 即}$$

$$m = \frac{1}{y_0}, k = -\frac{m}{2}x_0 = -\frac{x_0}{2y_0} \text{ 代入①式整理得 } \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1 (y_0 \neq 0),$$

即点 M 的轨迹为椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (y \neq 0)$

且点 P_1, P_2 为椭圆 C_1 的左、右焦点, 即 $|MP_1| + |MP_2| = 2\sqrt{2}$ 15 分

记 $t = |MP_1|$, 则 $t \in (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$

从而 $T = \frac{1}{|MP_1|^2} - 2|MP_2| = \frac{1}{t^2} - 2(2\sqrt{2} - t) = \frac{1}{t^2} + 2t - 4\sqrt{2}$, 则 $T' = 2 - \frac{2}{t^3}$,

令 $T' \geq 0$ 可得 $t \geq 1$, 即在 T 在 $(\sqrt{2} - 1, 1)$ 单调递减, 在 $(1, \sqrt{2} + 1)$ 单调递增,

且 $T(1) = 3 - 4\sqrt{2}, T(\sqrt{2} - 1) = 1 > T(\sqrt{2} + 1) = 5 - 4\sqrt{2}$,

故 T 的取值范围为 $[3 - 4\sqrt{2}, 1)$ 20 分

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$.

(1) 求证: $1 + a_n a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是完全平方数;

(2) 记 $b_n = \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right] \cdot \left\{ \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right\}$, 求证: $\prod_{k=2}^{2020} b_k$ 是整数. (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$.)

解: (1) 易知 $a_3 = 8$, 且 a_n 为整数. 用归纳法证明 $1 + a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$:

奠基: 当 $n = 1$ 时, $1 + a_1 a_3 = 1 + 1 \times 8 = 9 = a_2^2$, 成立;

假设 $n = k$ 时, $1 + a_k a_{k+2} = a_{k+1}^2$, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} 1 + a_{k+1} a_{k+3} &= 1 + a_{k+1} (3a_{k+2} - a_{k+1}) = 1 + 3a_{k+1} a_{k+2} - a_{k+1}^2 \\ &= 3a_{k+1} a_{k+2} - a_k a_{k+2} = a_{k+2} (3a_{k+1} - a_k) = a_{k+2}^2, \end{aligned}$$

那么 $n = k + 1$ 也成立;

由归纳原理, 知 $1 + a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 成立, 故 $1 + a_n a_{n+2}$ 是完全平方数.10 分

(2) 由 (1) 知 $\frac{a_{n+1}^2}{a_n} = a_{n+2} + \frac{1}{a_n}$, 所以 $b_k = \frac{a_{k+2}}{a_k} (k \geq 2)$, 于是

$$\prod_{k=2}^{2020} b_k = \frac{a_{2021} a_{2022}}{a_2 a_3} = \frac{a_{2021} a_{2022}}{24} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

由 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ 知 $a_{n+2} \equiv -a_n \pmod{3}$, 及 $a_2 \equiv 0 \pmod{3}$, 所以 $3 | a_{2022}$;

又 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$, 记 b_n 为 a_n 除以 8 的余数, 则 b_n 前六项为 1, 3, 0, 5, 7, 0, 由数学

归纳法易知 b_n 为周期数列, 所以 $8 | a_{2022}$; 故 $\frac{a_{2021} a_{2022}}{24}$ 是整数, 即证.20 分

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gaokzx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。