

绵阳市高中 2021 级第二次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

ABACC ABDDC AB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 14. $\frac{3}{7}$ 15. $\frac{1}{2}$ 16. $\sqrt{2}x \pm y = 0$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d ,

$$\text{则} \begin{cases} 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 45 \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 60 \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{解得} \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 5 \end{cases}, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\therefore a_n = 2n + 3; \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right), \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4n+10} = \frac{n}{10n+25}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

18. 解：(1) $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$$= \frac{100(20 \times 20 - 30 \times 30)^2}{60 \times 40 \times 50 \times 50} = 4 > 3.841, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

故有 95% 的把握认为喜欢旅游与性别有关. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 根据题意，全市男性市民喜欢旅游的概率为 $\frac{2}{5}$ ， $\xi \sim (2, \frac{2}{5})$, $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

ξ 的可以取值为 0, 1, 2, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

$$P(\xi = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$P(\xi=1) = C_2^1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{12}{25}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$P(\xi=2) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

ξ 的分布列如下:

ξ	0	1	2
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$\dots\dots\dots 11 \text{分}$

$$\therefore E(\xi) = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. 解: (1) $\because a(b \cos c - c \cos B) = a\left(b \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$$= \frac{2b^2 - 2c^2}{2} = b^2 - c^2 = c^2, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\therefore b^2 = 2c^2; \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(2) $\because \overline{BA} \cdot \overline{BC} = c,$

$$\therefore c \cdot a \cdot \cos B = c, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\therefore a \cos B = 1, \text{①} \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

又 $\because b \sin A = \sqrt{2}, \text{②}$

$$\frac{\text{②}}{\text{①}} \text{得: } \frac{b \sin A}{a \cos B} = \frac{\sin B \sin A}{\sin A \cos B} = \tan B = \sqrt{2}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

又 $\because B$ 是 $\triangle ABC$ 的内角,

$$\therefore \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } a \cos B = 1, \text{ 则 } a = \frac{1}{\cos B} = \sqrt{3}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

\therefore 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得:

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 3 + c^2 - 2c, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

由 (1) 知: $b^2 = 2c^2,$

$$\therefore 2c^2 = 3 + c^2 - 2c,$$

$$\therefore c = 1 \text{ 或 } c = -3 \text{ (舍)}, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{又 } b^2 = 2c^2, \text{ 则 } b = \sqrt{2}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

20. 解: (1) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx - 2 \\ x^2 = 2py \end{cases}, \text{消 } y \text{ 整理得: } x^2 - 2pkx + 4p = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以: } x_1 + x_2 = 2pk, \quad x_1x_2 = 4p, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore k_{FA}k_{FB} = \frac{y_1 - \frac{p}{2}}{x_1} + \frac{y_2 - \frac{p}{2}}{x_2} = \frac{kx_1 - (2 + \frac{p}{2})}{x_1} + \frac{kx_2 - (2 + \frac{p}{2})}{x_2}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 - (2 + \frac{p}{2})(x_1 + x_2)}{x_1x_2}$$

$$= 2k - \frac{k}{2}(2 + \frac{p}{2}) = k(1 - \frac{p}{4}) = 0 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以 $p = 4$, 即抛物线 E 的方程为: $x^2 = 8y$; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 可知: $x_1 + x_2 = 8k$, $x_1x_2 = 16$ $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

且 $\Delta = 64k^2 - 64 > 0$, 所以: $k^2 > 1$,

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 8\sqrt{k^2 - 1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } FA \text{ 的方程为: } y = \frac{y_1 - 2}{x_1}x + 2, \text{ 所以: } x_M = \frac{4x_1}{2 - y_1} = \frac{4x_1}{4 - kx_1}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{同理: } x_N = \frac{4x_2}{2 - y_2} = \frac{4x_2}{4 - kx_2},$$

$$\text{所以 } |MN| = |x_M - x_N| = \left| \frac{4x_1}{4 - kx_1} - \frac{4x_2}{4 - kx_2} \right| \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \left| \frac{16(x_1 - x_2)}{16 - 4k(x_1 + x_2) + k^2x_1x_2} \right| \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{8\sqrt{k^2 - 1}}{|1 - k^2|} = \frac{8}{\sqrt{k^2 - 1}} \geq 16 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq k < -1 \text{ 或 } 1 < k \leq \frac{\sqrt{5}}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 令 $g(x) = x^2 + ax - a$, 则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上至少有一个零点. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$g(x)$ 的对称轴为: $x = -\frac{a}{2}$,

①当 $a=0$ 时, $g(x)=x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上恰有一个零点, 符合题意; 2分

②当 $a>0$ 时, 对称轴 $x = -\frac{a}{2} < 0$, 则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 是增函数,

而 $g(0) = -a < 0$, $g(1) = 1 > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上必有一个零点, 符合题意; 3分

③当 $a < 0$ 时, 对称轴 $x = -\frac{a}{2} > 0$,

则 $g(x)$ 在 $[0, -\frac{a}{2})$ 上是减函数, 在 $[-\frac{a}{2}, +\infty)$ 是增函数,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上至少有一个零点,

\therefore 只需 $\Delta = a^2 + 4a \geq 0$, 则 $a \leq -4$, 4分

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ 5分

(2) 解法一: $f'(x) = \frac{-(x+a)(x-2)}{e^x}$, 6分

$\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调函数, 则 $a = -2$, 7分

$\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调递减函数,

$\therefore f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{e^x}$, 要证 $x_1 + x_2 \geq 2$, 即证 $x_1 \geq 2 - x_2$,

结合 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 所以只需证 $f(x_1) \leq f(2 - x_2)$, 8分

而 $f(x_1) = \frac{2}{e} - f(x_2)$, 即证 $f(2 - x_2) + f(x_2) - \frac{2}{e} \geq 0$ (*) 9分

令 $h(x) = f(2 - x) + f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{e^x} + \frac{x^2 - 2x + 2}{e^{2-x}}$ 10分

$= (x^2 - 2x + 2)(\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2-x}})$ 11分

$\geq 1 \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{2-x}}} = 2 \sqrt{\frac{1}{e^2}} = \frac{2}{e}$, 当 $x=1$ 时, 等号成立,

\therefore (*) 成立. 命题得证. 12分

解法二: $f'(x) = \frac{-(x+a)(x-2)}{e^x}$, 6分

∵ $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调函数, 则 $a = -2$,

∴ $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调递减函数,

∴ $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{e^x}$, $f'(x) = \frac{-(x-2)^2}{e^x}$, 且 $f(1) = \frac{1}{e}$,

当 $x_1 = x_2 = 1$ 时, $f(x_1) + f(x_2) = \frac{2}{e}$, 符合题意;

当 $x_1 < x_2 \leq 1$ 时, $f(x_1) + f(x_2) > \frac{2}{e}$, 不符合题意;

当 $1 \leq x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) + f(x_2) < \frac{2}{e}$, 不符合题意; 7 分

∴ $x_1 < 1 < x_2$, 要证 $x_1 + x_2 > 2$, 即证 $x_1 > 2 - x_2$,

结合 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 所以只需证 $f(x_1) < f(2 - x_2)$,

而 $f(x_1) = \frac{2}{e} - f(x_2)$, 即证 $f(2 - x_2) + f(x_2) - \frac{2}{e} > 0$ 对任意 $x_2 > 1$ 成立. (*) 8 分

令 $h(x) = f(2 - x) + f(x) - \frac{2}{e}$,

∴ $h'(x) = -f'(2 - x) + f'(x) = \frac{x^2}{e^{2-x}} + \frac{-(x-2)^2}{e^x} = \frac{(xe^x)^2 - [e(x-2)]^2}{e^2 e^x}$, 9 分

令 $p(x) = (xe^x)^2 - [e(x-2)]^2 = (xe^x + ex - 2e)(xe^x - ex + 2e)$,

函数 $y = xe^x + ex - 2e$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 则 $xe^x + ex - 2e > 0$, 10 分

函数 $y = xe^x - ex + 2e (x > 1)$, 则 $y' = (x+1)e^x - e > e$,

∴ $y = xe^x - ex + 2e$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 则 $xe^x - ex + 2e \geq 2e$, 11 分

∴ $p(x) = h'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

∴ $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 则 $h(x) > h(1) = 0$,

∴ (*) 成立, 命题得证. 12 分

22. (1) 由题意: $(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1 - t^2 + t^2 = 1$, 且 $x = 3\sqrt{1-t^2} \geq 0$, 2 分

∴ 曲线 C 的普通方程为: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \geq 0)$ 3 分

∴ 曲线 C 的极坐标方程为 $\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{9} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{4} = 1 (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$,

即 $\rho^2 = \frac{36}{4 + 5 \sin^2 \theta} (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$; 5 分

(2) 由 (1) 得 $\rho^2 = \frac{36}{4+5\sin^2\theta}$,

因为且 $OA \perp OB$, 不妨设 $A(\rho_1, \theta)$, $B(\rho_2, \theta + \frac{\pi}{2})$, 6 分

$\therefore \rho_1^2 = \frac{36}{4+5\sin^2\theta}$, 7 分

$\therefore \rho_2^2 = \frac{36}{4+5\sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{36}{4+5\cos^2\theta}$, 8 分

$\therefore \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}$ 9 分

$= \frac{4+5\sin^2\theta + 4+5\cos^2\theta}{36} = \frac{8+5}{36} = \frac{13}{36}$ 10 分

23. (1) 证明: 因为 $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(ax^2 + by^2) = x^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{by^2}{a} + y^2$

$\geq x^2 + y^2 + 2\sqrt{\frac{ax^2}{b} \cdot \frac{by^2}{a}} = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$, 3 分

$\therefore \frac{(x+y)^2}{ax^2 + by^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 4 分

当且仅当 $\frac{ax^2}{b} = \frac{by^2}{a}$, 即 $ax = by$ 时, 等号成立; 5 分

(2) 函数 $f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{5x^2 + 4x + 2} = \frac{(2x+1)^2}{5x^2 + 4x + 2} = \frac{[x+(x+1)]^2}{3 \cdot x^2 + 2 \cdot (x+1)^2}$ 7 分

根据 (1) 的结论, $\frac{[x+(x+1)]^2}{3 \cdot x^2 + 2 \cdot (x+1)^2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, 8 分

当且仅当 $3x = 2(x+1)$, 即 $x = 2$ 时, 等号成立. 9 分

\therefore 函数 $f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{5x^2 + 4x + 2}$ ($x > 0$) 的最大值为 $\frac{5}{6}$, 此时 $x = 2$ 10 分