姓　　名____________

准考证号____________

绝密★启用前

湘豫名校联考
2023年8月高三秋季入学摸底考试
数　　学

注意事项：

1. 本试卷共6页。时间120分钟，满分150分。答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置，并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上，然后认真核对条形码上的信息，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。作答非选择题时，将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|y=\ln(x+1)\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $(-3,-1]$　　B. $(-1,3)$　　C. $(-2,-1]$　　D. $(-1,+\infty)$

2. 设 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $\frac{2-\mathrm{i}}{z}-\mathrm{i}=1$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为

A. $-\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

3. 已知直线 $l:y=2\sqrt{2}x+b$ 与圆 $C:(x-1)^2+(y+1)^2=9$ 相切，则实数 $b=$

A. $8-2\sqrt{2}$ 或 $-10-2\sqrt{2}$　　B. -11 或 9

C. 11 或 -9　　D. $-8+2\sqrt{2}$ 或 $10+2\sqrt{2}$

4. 已知角 α 的终边上一点 $A(4,3)$，且 $\tan(\alpha+\beta)=2$，则 $\tan(3\pi-\beta)=$

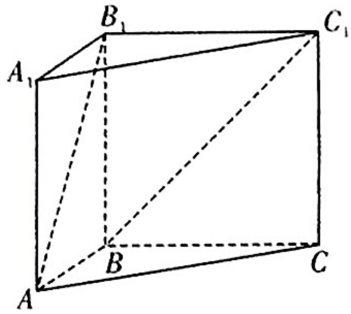
A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $-\frac{5}{2}$

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量的模为 $\sqrt{2}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量

的模为 1，且$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 135°

6. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=AC=AA_1$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值等于



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

7. 过抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，若直线 l 过点 $P(1,0)$，且 $|AB|=8$，则抛物线 C 的准线方程是

A. $y=-3$　　B. $y=-2$　　C. $y=-\dfrac{3}{2}$　　D. $y=-1$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-1-x}+2, x<-1,\\ 2-2^{x+1}, x>-1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的图象关于

A. 点$(1,-2)$对称　　B. 点$(-1,2)$对称

C. 直线 $x=1$ 对称　　D. 直线 $x=-1$ 对称

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知二项式$\left(x^m+\dfrac{1}{x}\right)^n(m,n\in\mathbf{N}^*)$展开式的第 5 项为 15，则

A. $\mathrm{A}_n^m=360$

B. $\mathrm{C}_{n+m}^{n-m}=\dfrac{\mathrm{A}_8^4}{\mathrm{A}_4^4}$

C. $\left(x^m+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式的系数的最大值为 20

D. $\left(x^m+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式的各项系数之和为 64

10. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_m+a_n=a_{m+n}$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，则下列结论正确的是

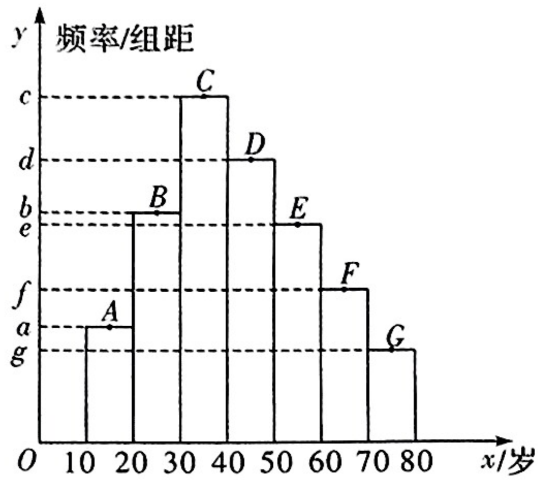
A. 若 $a_1=1$，则 $a_2=2$

B. 若 $p-t=s-q$，且 $p,q,s,t\in\mathbf{N}^*$，则 $a_p-a_t=a_s-a_q$

C. 若 $a_1=2$，则 $a_{1\,024}=1\,024$

D. 若 $a_1=1$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

11. 某书店为了解其受众人群，对 100 名顾客的年龄(x)进行调研，并将所统计的数据制成如图所示的频率分布直方图. 已知 $A,B,C,\cdots,G$ 是各个小矩形上短边的中点，若点 A,B,C 在一条直线上，点 C,D,E,F,G 在一条直线上，且 $c=0.024$，$g=0.0064$，则下列描述正确的是



A. f 的值为 0.010 8

B. 数据 x 的众数大于中位数

C. 数据 x 的中位数小于平均数

D. 数据 x 的第 80 百分位数大于 60

12. 若函数 $f(x)$ 满足：① $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+2)=f(x-2)$，② $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(2-x)=f(x)$，③$x\in[-1,1]$时，$f(x)=(x+1)^2-1$，则下列结论正确的是

A. $f(22)=0$

B. $|f(x_2)-f(x_1)|$的最大值为 4

C. $f(x)$的单调递减区间为$[2k+1,2k+3]$，$k\in\mathbf{Z}$

D. 若曲线 $y=k|x-1|-1$ 与 $f(x)$的图象有 6 个不同的交点，则实数 k 的取值范围为$\left(\frac{1}{2},1\right)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,2)$，若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则实数 m 的一个可能取值为________.(答案不唯一)

14. 对具有线性相关关系的变量 x,y，有一组观测数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$，其经验回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+\hat{a}$，且 $\bar{x}=10$，$\bar{y}=8$，则相应于点$(9.5,10)$的残差为________.

15. 若 $x_1,x_2(x_1<x_2)$是函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+(a-1)x$ 的两个极值点，且 $f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{11}{2}$，则实数 a 的取值范围是________.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$平面 ABC，底面$\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形，若该三棱锥外接球的表面积为 15π，则该三棱锥体积的最大值为________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$f(A)=\sqrt{3}$，且 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 $\sqrt{3}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

一个不透明口袋里有大小、形状、质量完全相同的 10 个小球，其中有 1 个红色球、2 个绿色球、3 个黑色球，其余的是白色球，采取放回式抽样法，每次抽取前充分搅拌.

(1)50 名学生先后各从口袋里随机抽取 1 个球，设抽取到的球为黑色或红色的次数为 X，求 X 的数学期望；

(2)甲、乙两人进行游戏比赛，规定：抽到红色球得 100 分，抽到绿色球得 50 分，抽到黑色球得 0 分，抽到白色球得 -10 分. 两人各从口袋里抽取两次，每次随机抽取一个球，求甲的得分比乙的得分高，且差值大于 100 分的概率.

19.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$($n\in \mathbf{N}^*$)满足以下三个条件,从中任选一个.

条件①:T_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和,$b_1=1$,$b_n\neq 0$,$b_nb_{n+1}=2T_n$,且 $a_n=\frac{b_n}{2^n}$;

条件②:数列$\{b_n\}$是首项为 1 的等比数列,且 b_1,$2b_2$,$4b_3$ 成等差数列;数列$\{c_n\}$的各项均为正数,H_n 为其前 n 项和,且 $2H_n=c_n(c_n+1)$,数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\frac{1}{2}b_nc_n$;

条件③:数列$\{b_n\}$满足 $b_{n+2}+b_n-2b_{n+1}=2^n$,$b_1=1$,$b_2=3$,且 $a_n=\frac{n}{b_n+1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,证明:$\frac{1}{2}\leqslant S_n<2$.

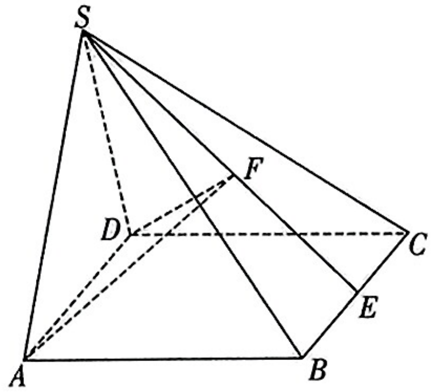
注:若选择多个条件分别解答,则按第一个解答计分.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $S-ABCD$ 中,$\triangle SAD$ 是等边三角形,四边形 $ABCD$ 是矩形,平面 $SAD\perp$平面 $ABCD$,且$\sqrt{3}SA=2AB$,E,F 分别是 BC,SE 的中点.

(1)证明:$SE\perp$平面 ADF;

(2)求二面角 $A-SB-C$ 的正弦值.



21.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中,已知 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点,M 为椭圆 C 上的一个动点,$\angle F_1MF_2$ 的最大值为 $120°$,且点 M 到右焦点 F_2 距离的最小值为 $2-\sqrt{3}$,直线 l 交椭圆 C 于异于椭圆右顶点 A 的两个点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)若以 PQ 为直径的圆恒过点 A,求证:直线 l 恒过定点,并求此定点的坐标.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x-x^2+ax$.

(1)若 $f(x)\leqslant 0$,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{1}{e},b\right]$,且 $f(x)$ 的极大值为 M,求证:$M\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$.

湘豫名校联考
2023年8月高三秋季入学摸底考试
数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	B	B	D	D	B	BCD	ABD	AC	ABD

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．C　**【命题意图】**本题考查集合的运算、解一元二次不等式及对数函数的定义域，考查了数学运算的核心素养．

【解析】因为集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}=(-2,3)$，$B=\{x|y=\ln(x+1)\}=(-1,+\infty)$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,-1]$．所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(-2,-1]$．故选C．

2．D　**【命题意图】**本题考查复数的乘、除法运算及复数的相关概念，考查了数学运算的核心素养．

【解析】由题可得 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}$ 的虚部为 $\dfrac{3}{2}$．故选D．

3．A　**【命题意图】**本题考查直线与圆的位置关系，考查了数学运算、直观想象的核心素养．

【解析】依题知圆心 $C(1,-1)$，半径为3，则 $\dfrac{|2\sqrt{2}-(-1)+b|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=3$，解得 $b=8-2\sqrt{2}$ 或 $b=-10-2\sqrt{2}$．故选A．

4．B　**【命题意图】**本题考查三角函数的定义、正切的和角公式、诱导公式，考查了数学运算的核心素养．

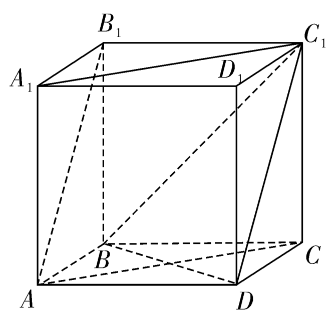
【解析】设 $\tan\beta=t$，由题可得 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{3}{4}+t}{1-\frac{3}{4}t}=2$，解得 $t=\dfrac{1}{2}$．所以 $\tan(3\pi-\beta)=-\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$．故选B．

5．B　**【命题意图】**本题考查向量的几何意义、向量的数量积运算、向量的夹角，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养．

【解析】由题可得 $\begin{cases}\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|}=\sqrt{2},\\ \dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=1,\end{cases}$ 所以 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\sqrt{2}$．因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=0$，所以 $2|\boldsymbol{a}|^2-3|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，所以 $2\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{b}|^2}-3-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，即 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=45°$．故选B．

6．D　**【命题意图】**本题考查异面直线所成的角、余弦定理，考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养．

【解析】如图，将该几何体补成一个直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，由题易得底面 $ABCD$ 为菱形，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形．连接 DC_1，BD，易得 $AB_1\,/\!/\,DC_1$，所以 $\angle BC_1D$（或其补角）是异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角．设 $AB=1$，则 $BC_1=DC_1=\sqrt{2}$，$BD=2\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle BC_1D=\dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times(\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{4}$．故选D．



7. D 【命题意图】本题考查抛物线的概念、直线与抛物线的位置关系，考查了逻辑推理、数学运算等核心素养.

【解析】因为直线 l 过点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$P(1,0)$，所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{p}{2}(x-1)$. 由 $\begin{cases}y=-\frac{p}{2}(x-1),\\x^2=2py,\end{cases}$ 得 $x^2+p^2x-p^2=0$，$\Delta>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-p^2$，$x_1x_2=-p^2$. 因为 $|AB|=\sqrt{1+\frac{p^2}{4}}|x_2-x_1|=\sqrt{1+\frac{p^2}{4}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(1+\frac{p^2}{4}\right)(p^4+4p^2)}=\frac{p(p^2+4)}{2}=8$，整理得 $p^3+4p-16=(p-2)(p^2+2p+8)=0$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的准线方程是 $y=-\frac{p}{2}=-1$. 故选 D.

8. B 【命题意图】本题考查函数的图象变换、函数的奇偶性，考查了直观想象、数学建模、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $g(x)=f(x-1)-2=\begin{cases}2^{-x},x<0,\\-2^x,x>0,\end{cases}$ 又 $g(x)$ 的定义域关于原点对称，且 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,2)$ 对称. 故选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. BCD 【命题意图】本题考查二项式展开式及二项式系数问题、排列数、组合数的计算，考查了数学运算的核心素养.

【解析】$T_5=C_n^4\cdot(x^m)^{n-4}\cdot\frac{1}{x^4}=C_n^4\cdot x^{mn-4m-4}$，由题可得 $\begin{cases}C_n^4=15,\\mn-4m-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=6,\\m=2,\end{cases}$ 所以 $A_6^2=30$，A 错误；$C_{n+m}^{n-m}=C_8^4=\frac{A_8^4}{A_4^4}$，B 正确；$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式系数的最大值为 $C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$，C 正确；令 $x=1$，则 $(1+1)^6=64$，即 $\left(x^m+\frac{1}{x}\right)^n$ 展开式的各项系数之和为 64，D 正确. 故选 BCD.

10. ABD 【命题意图】本题考查数列的性质、累乘求通项、数列求和，考查了逻辑推理、数学运算、数学抽象的核心素养.

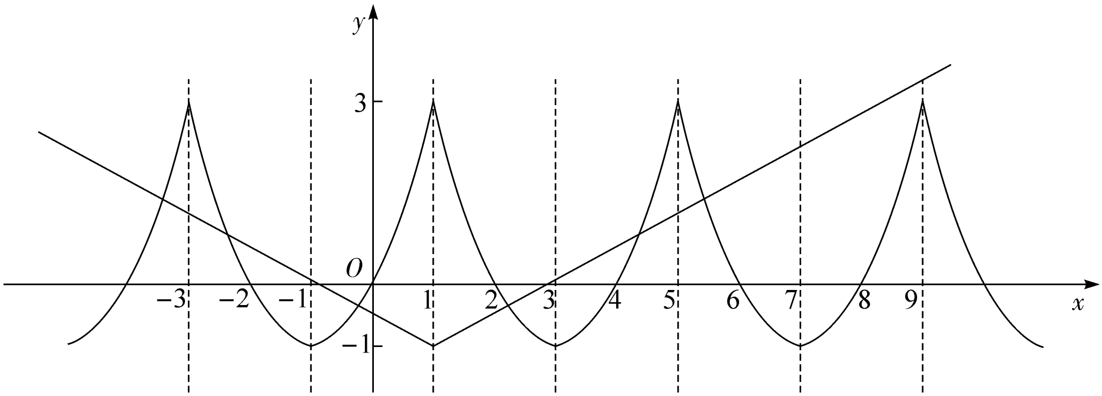
【解析】令 $m=n=1$，则 $a_2=a_1+a_1=1+1=2$，A 正确；由题可知 $a_p+a_q=a_{p+q}$，$a_s+a_t=a_{s+t}$，因为 $p-t=s-q$，所以 $p+q=s+t$，所以 $a_{p+q}=a_{s+t}$. 所以 $a_p+a_q=a_s+a_t$，即 $a_p-a_t=a_s-a_q$，B 正确；令 $n=m$，则 $a_{2n}=2a_n$，所以 $\frac{a_2}{a_1}=2,\frac{a_4}{a_2}=2,\frac{a_8}{a_4}=2,\cdots,\frac{a_{1\,024}}{a_{512}}=2$，累乘可得 $\frac{a_{1\,024}}{a_1}=2^{10}$，所以 $a_{1\,024}=2^{10}a_1=2\,048$，C 错误；令 $m=1$，则 $a_{n+1}-a_n=a_1=1$，所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $S_n=n\times1+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n(n+1)}{2}$，D 正确. 故选 ABD.

11. AC 【命题意图】本题考查频率分布直方图、统计数字特征，考查了数据分析、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $\frac{0.024-0.006\,4}{4}=0.004\,4$，所以 $d=0.024-0.004\,4=0.019\,6$，$e=0.019\,6-0.004\,4=0.015\,2$，$f=0.015\,2-0.004\,4=0.010\,8$. 因为 $0.1-0.019\,6-0.015\,2-0.010\,8-0.006\,4=0.048$，所以 $b=\frac{0.048}{3}=0.016$，$a=0.048-0.024-0.016=0.008$，A 正确；数据 x 的众数的估计值为 $\frac{30+40}{2}=35$，设中位数为 t，因为 $(0.008+0.016+0.024)\times10=0.48$，所以 $0.019\,6\times(t-40)=0.02$，解得 $t\approx41.02$，即数据 x 的中位数约为 41.02，所以数据 x 的众数小于中位数，B 错误；因为 $\overline{x}=15\times0.08+25\times0.16+35\times0.24+45\times0.196+55\times0.152+65\times0.108+75\times0.064=42.6$，所以平均数大于中位数，C 正确；因为 $1-(0.010\,8+0.006\,4)\times10=0.828$，所以数据 x 的第 80 百分位数小于 60，D 错误. 故选 AC.

12. ABD 【命题意图】本题考查函数的图象与性质，考查了直观想象、数学抽象、数学运算的核心素养.

【解析】由 $f(x+2)=f(x-2)$，得 $f(x)=f(x+4)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 由 $f(2-x)=f(x)$，得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 因为 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=(x+1)^2-1$，所以 $f(22)=f(2)=f(0)=(0+1)^2-1=0$，A 正确；由题易得 $f(x)_{\max}=f(1)=(1+1)^2-1=3$，$f(x)_{\min}=f(-1)=(-1+1)^2-1=-1$，所以 $|f(x_2)-f(x_1)|_{\max}=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=3-(-1)=4$，B 正确；作 $f(x)$ 的图象如图所示，易得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[4k+1,4k+3]$，$k\in\mathbf{Z}$，C 错误；因为曲线 $y=k|x-1|-1$ 与 $f(x)$ 的图象有 6 个不同的交点，所以 $\begin{cases}k|5-1|-1<3,\\k|9-1|-1>3,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<k<1$，D 正确. 故选 ABD.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 0（答案不唯一，只需 $m<1$ 即可） 【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算及平面向量的模，考查了数学运算的核心素养.

【解析】方法一：因为 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,2)$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2+m,3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2-m,-1)$. 又因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以 $\sqrt{(-2+m)^2+3^2}>\sqrt{(-2-m)^2+(-1)^2}$，解得 $m<1$.

方法二：因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2>\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，故 $-2m+2>0$，解得 $m<1$. 所以 m 的一个可能取值为 0.（答案不唯一，只需 $m<1$ 即可）

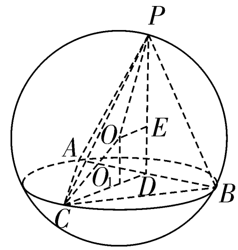
14. 0.4 【命题意图】本题考查线性回归分析，考查了数学运算、逻辑推理、数据分析等核心素养.

【解析】因为 $\bar{x}=10$，$\bar{y}=8$，所以样本点的中心为 $(10,8)$. 又因为经验回归直线 $\hat{y}=-3.2x+\hat{a}$ 过样本点的中心，所以 $8=-3.2\times10+\hat{a}$，所以 $\hat{a}=40$. 所以经验回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+40$. 当 $x=9.5$ 时，$\hat{y}=-3.2\times9.5+40=9.6$，所以残差为 $10-9.6=0.4$.

15. $[-2,-1)$ 【命题意图】本题考查导数的应用及解不等式，考查了数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养.

【解析】因为 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+(a-1)x$，$x>0$，所以 $f'(x)=\frac{x^2+(a-1)x+1}{x}$. 因为 x_1，x_2 是函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+(a-1)x$ 的两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 有两个正根，即方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 有两个不同的正根 x_1，x_2. 所以 $\Delta=a^2-2a-3>0$，所以 $a>3$ 或 $a<-1$. 又 $x_1+x_2=1-a>0$，$x_1x_2=1$，得 $a<1$，故 $a<-1$. 因为 $f(x_1)+f(x_2)=\left[\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2+(a-1)x_1\right]+\left[\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^2+(a-1)x_2\right]=\ln x_1x_2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-x_1x_2+(a-1)(x_1+x_2)=\ln 1+\frac{1}{2}(1-a)^2-1-(a-1)^2=-\frac{1}{2}a^2+a-\frac{3}{2}$，又 $f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{11}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}a^2+a-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{11}{2}$，即 $a^2-2a-8\leqslant0$，解得 $-2\leqslant a\leqslant4$. 综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-2,-1)$.

16. $\frac{27}{8}$ 【命题意图】本题考查空间几何体的外接球及空间几何体的体积，考查了数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养.



【解析】如图所示，点 O 是三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，设球 O 的半径为 R，O_1 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，设圆 O_1 的半径为 r，点 P 到底面 ABC 的距离为 h，由题意，可得 $4\pi R^2=15\pi$，则 $R^2=\frac{15}{4}$. 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形，所以由正弦定理，可得 $2r=\frac{BC}{\sin A}=\frac{3}{\sin 60^\circ}$，则 $r=\sqrt{3}$. 所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2\times h=\frac{3\sqrt{3}}{4}h$，三棱锥 $P-ABC$ 的体积取最大值则需要 h 最大. 由题意可知，点 P 在过 AB 且与底面 ABC（此处底面 ABC 为水平）垂直的截面圆的圆周上运动，当点 P 运动到该圆的最高点时，h 最大. 如图所示，取 AB 的中点 D，连接 CD, PD, OO_1, PO, CO，过点 O 作 $OE\perp PD$. 由圆的对称性可知，此时 $PA=PB$，则 $PD\perp AB$. 又平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$PD\subset$ 平面 PAB，所以 $PD\perp$ 平面 ABC. 因为在 $\triangle OO_1C$ 中，$O_1O^2+O_1C^2=OC^2$，又 $O_1C=r=\sqrt{3}$，所以 $O_1O^2=OC^2-O_1C^2=R^2-r^2=\frac{3}{4}$. 易得四边形 OO_1DE 为矩形，所以 $ED=O_1O=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$EO=O_1D=\frac{1}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为在 $\triangle POE$ 中，$PE=\sqrt{PO^2-OE^2}=\sqrt{R^2-OE^2}=\sqrt{3}$，所以 $h_{\max}=PD=PE+ED=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $V_{\max}=\frac{27}{8}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】本题考查三角函数的恒等变换、解三角形，考查了数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】(1) 因为 $f(x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}=\sin x+\sqrt{3}(\cos x+1)-\sqrt{3}$

$=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，…………………… 2 分

又 $f(A)=\sqrt{3}$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………… 5 分

(2) 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}$，即 $\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，

所以 $a=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

由余弦定理得 $9=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立.

所以 $bc\leqslant 9$. …………………… 8 分

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

又 bc 的最大值为 9，

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. …………………… 10 分

18.【命题意图】本题考查二项分布、互斥事件、独立事件发生的概率，考查数据分析、数学运算的核心素养.

【解析】(1) 由题易得，随机抽取一球，为黑色球或红色球的概率为 $P=0.4$，…………………… 2 分

所以 $X\sim B(50,0.4)$.

所以 $E(X)=50\times0.4=20$. …………………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)甲、乙的得分情况可能为

得分情况	200	150	100	90	50	40	0	-10	-20
概率	$\frac{1}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{16}{100}$

…… 9 分

则甲的得分比乙的得分高，且差值大于 100 分的概率 $P=\frac{1}{100}\times\frac{85}{100}+\frac{4}{100}\times\frac{65}{100}+\frac{10}{100}\times\frac{40}{100}+\frac{8}{100}\times\frac{16}{100}=\frac{873}{10\ 000}=0.087\ 3$. …………………………………………………………………………………………………… 12 分

19.**【命题意图】**本题考查数列的通项、数列求和及不等式，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)若选条件①：因为 $b_nb_{n+1}=2T_n$，所以 $b_{n-1}b_n=2T_{n-1}(n\geqslant2)$，

两式相减，得 $b_n(b_{n+1}-b_{n-1})=2b_n(n\geqslant2)$.

因为 $b_n\neq0$，所以 $b_{n+1}-b_{n-1}=2(n\geqslant2)$.

又 $b_1=1$，$b_1b_2=2T_1$，所以 $b_2=2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的奇数项、偶数项分别是以 1，2 为首项，2 为公差的等差数列.

当 $n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_{2k-1}=1+(k-1)\times2=2k-1$；当 $n=2k,k\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_{2k}=2+(k-1)\times2=2k$.

综上所述，$b_n=n,n\in\mathbf{N}^*$. 所以 $a_n=\frac{n}{2^n}$. …………………………………………………………………… 5 分

若选条件②：设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

因为 $\{b_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，且满足 b_1，$2b_2$，$4b_3$ 成等差数列，

所以 $b_1=1$，且 $4b_2=b_1+4b_3$，即 $4q=1+4q^2$，解得 $q=\frac{1}{2}$，所以 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

因为数列 $\{c_n\}$ 的各项均为正数，H_n 为其前 n 项和，且满足 $2H_n=c_n(c_n+1)$，

所以当 $n=1$ 时，$2H_1=2c_1=c_1(c_1+1)$，则 $c_1=1$，

因为 $2H_n=c_n(c_n+1)$，所以 $2H_{n-1}=c_{n-1}(c_{n-1}+1)(n\geqslant2)$，

两式相减得 $2c_n=c_n^2-c_{n-1}^2+c_n-c_{n-1}(n\geqslant2)$，即 $(c_n+c_{n-1})(c_n-c_{n-1}-1)=0(n\geqslant2)$.

因为 $c_n>0$，故 $c_n-c_{n-1}-1=0(n\geqslant2)$，所以 $c_n-c_{n-1}=1(n\geqslant2)$.

所以数列 $\{c_n\}$ 为等差数列，故 $c_n=1+(n-1)\times1=n$.

所以 $a_n=\frac{1}{2}b_nc_n=\frac{n}{2^n}$. …………………………………………………………………………………………… 5 分

若选条件③：由 $b_{n+2}+b_n-2b_{n+1}=2^n$，得 $(b_{n+2}-b_{n+1})-(b_{n+1}-b_n)=2^n$.

令 $b_{n+1}-b_n=u_n$，则 $u_1=b_2-b_1=2$，$u_{n+1}-u_n=2^n$.

当 $n\geqslant2$ 时，$u_n=u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_n-u_{n-1})=2+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n$，

又 $u_1=2$ 满足上式，所以 $u_n=2^n$，即 $b_{n+1}-b_n=2^n$.

所以当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

又 $b_1=1$ 满足上式，所以 $b_n=2^n-1$，所以 $a_n=\frac{n}{b_n+1}=\frac{n}{2^n}$. …………………………………………………… 5 分

(2)证明：由(1)知 $a_n=\frac{n}{2^n}$，

则 $S_n=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}$ ①，

所以 $\frac{1}{2}S_n=1\times\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{2^n}+n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ ②.

①－②可得：

$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$.

所以 $S_n=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2+n}{2^n}$. …………………………………………………………………… 9 分

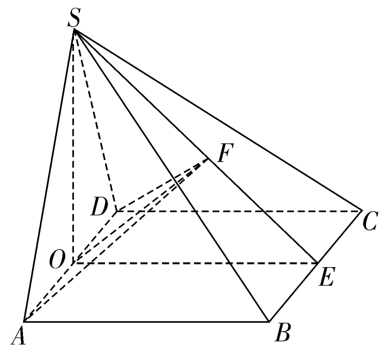
因为$\frac{2+n}{2^n}>0$，所以 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}<2$.

又 $S_{n+1}-S_n=\left(2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)-\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)=\frac{n+1}{2^{n+1}}>0$，所以$\{S_n\}$是递增数列.

所以 $S_n\geqslant S_1=2-\frac{1+2}{2^1}=\frac{1}{2}$，故$\frac{1}{2}\leqslant S_n<2$. ……………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查空间几何体的线面位置关系、二面角，考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)证明：



方法一：取 AD 的中点 O，连接 SO,OE,OF.

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，O,E 分别是 AD,BC 的中点，

所以 $EO\underline{\parallel}AB$，所以 $EO\perp AD$.

因为$\triangle SAD$是等边三角形，所以 $SO\perp AD$.

因为 $SO\cap OE=O$，所以 $AD\perp$平面 SOE.

因为 $SE\subset$平面 SOE，所以 $AD\perp SE$. ………………………………… 3 分

因为$\sqrt{3}SA=2AB$，

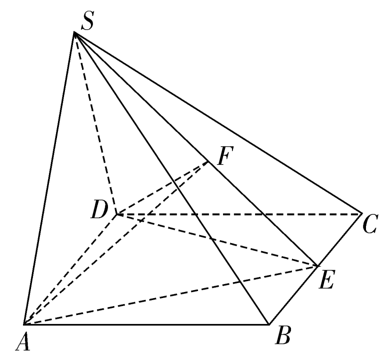
所以 $OS=SA\sin\angle SAD=\frac{\sqrt{3}}{2}SA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}AB=AB=OE$，

所以$\triangle SOE$是等腰三角形.

因为 F 是 SE 的中点，所以 $OF\perp SE$.

因为 $OF\cap AD=O$，

所以 $SE\perp$平面 ADF. ………………………………………………………………………… 6 分



方法二：不妨设 $AB=\sqrt{3}$，则 $SA=AD=SD=2$.

如图，连接 AE,DE，

因为 E 为 BC 的中点，所以 $AE=DE=2$.

所以 $SD=DE,SA=AE$. ………………………………………… 3 分

又 F 为 SE 的中点，

所以 $DF\perp SE,AF\perp SE$.

因为 $DF\cap AF=F$，

所以 $SE\perp$平面 ADF. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)方法一易得 AD,OE,SO 两两互相垂直，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

不妨设 $AB=\sqrt{3}$，则 $AD=2,OS=\sqrt{3}$，

则 $A(1,0,0)$，$B(1,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，$S(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{SB}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$.

设平面 SAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0,\\ \sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $z=1$，$y=0$，

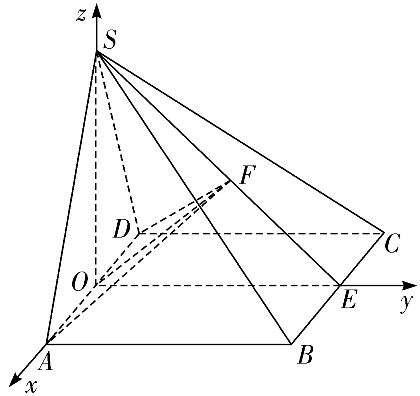
所以平面 SAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,1)$．…………… 8 分

设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x'+\sqrt{3}y'-\sqrt{3}z'=0,\\ -2x'=0,\end{cases}$

令 $y'=1$，则 $x'=0$，$z'=1$，

所以平面 SBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$．…………… 10 分



设二面角 $A-SB-C$ 的平面角为 θ，则

$|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|\sqrt{3}\times0+0\times1+1\times1|}{2\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$．

所以二面角 $A-SB-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$．………………………………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的位置关系及定点问题，考查了直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养.

【解析】(1)因为 $\angle F_1MF_2$ 的最大值为 $120°$，

所以 M 为短轴的顶点时，$\angle F_1MF_2=120°$，此时易得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又点 M 到右焦点 F_2 距离的最小值为 $2-\sqrt{3}$，即 $a-c=2-\sqrt{3}$，解得 $a=2$，$c=\sqrt{3}$.

又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $b=1$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：

方法一：当直线 l 的斜率不存在时，设 $l:x=m$，联立 $\begin{cases}x=m,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$

解得 $y=\pm\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}$，所以 $P\left(m,\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$，$Q\left(m,-\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$ 或 $P\left(m,-\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$，$Q\left(m,\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$.

又 $A(2,0)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\left(m-2,\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$，$\overrightarrow{AQ}=\left(m-2,-\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$ 或 $\overrightarrow{AP}=\left(m-2,-\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$，$\overrightarrow{AQ}=\left(m-2,\sqrt{1-\dfrac{m^2}{4}}\right)$，

因为以 PQ 为直径的圆恒过点 A，所以 $AP\perp AQ$.

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(m-2)^2-\left(1-\dfrac{m^2}{4}\right)=0$，解得 $m=\dfrac{6}{5}$ 或 $m=2$(舍去)，

此时直线 l 的方程为 $x=\dfrac{6}{5}$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时，易知直线 l 的斜率不为 0，设 $l:y=kx+n$，

联立 $\begin{cases}y=kx+n,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+1)x^2+8knx+4(n^2-1)=0$.

由 $\Delta>0$，得 $4k^2-n^2+1>0$，

由根与系数的关系，知 $x_1+x_2=-\dfrac{8kn}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4(n^2-1)}{4k^2+1}$. …………………………………… 8 分

因为$\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,y_2)$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=(k^2+1)x_1x_2+(kn-2)(x_1+x_2)+(n^2+4)=0$，

将 $x_1+x_2=-\dfrac{8kn}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4(n^2-1)}{4k^2+1}$代入上式整理得 $12k^2+5n^2+16kn=0$，

即$(6k+5n)(2k+n)=0$，所以 $n=-\dfrac{6}{5}k$ 或 $n=-2k$.

当 $n=-2k$ 时，直线 l 为 $y=kx-2k=k(x-2)$，此时直线 l 过点 A，不符合题意，舍去；

当 $n=-\dfrac{6}{5}k$ 时，直线 l 为 $y=k\left(x-\dfrac{6}{5}\right)$，此时直线 l 过定点$\left(\dfrac{6}{5},0\right)$. ………………………………… 11 分

综上所述，直线 l 恒过定点$\left(\dfrac{6}{5},0\right)$. ………………………………………………………………… 12 分

方法二：

由题意知，直线 l 的斜率不为零，设直线 l 的方程为 $x=my+n$.

联立$\begin{cases}x=my+n,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$得$(4+m^2)y^2+2mny+n^2-4=0$.

由 $\Delta>0$，得 $m^2-n^2+4>0$.

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{2mn}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2+4}$. ………………………………………………………………… 6 分

因为 $A(2,0)$，所以$\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,y_2)$.

由题易知$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AQ}$，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$.

即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+y_1y_2+4=0$，

即$(m^2+1)y_1y_2+(mn-2m)(y_1+y_2)+n^2-4n+4=0$. ……………………………………………… 8 分

将 $y_1+y_2=-\dfrac{2mn}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2+4}$代入上式整理得 $5n^2-16n+12=0$，

解得 $n=2$ 或 $n=\dfrac{6}{5}$. ……………………………………………………………………………… 10 分

由题知直线 l 不过点 A，所以 $n=\dfrac{6}{5}$.

所以直线 l 的方程为 $x=my+\dfrac{6}{5}$.

所以直线 l 恒过定点$\left(\dfrac{6}{5},0\right)$. ……………………………………………………………………………… 12 分

方法三（平移齐次化）：

将椭圆向左平移两个单位长度得曲线 C'：$\dfrac{(x+2)^2}{4}+y^2=1$，

即$\dfrac{x^2}{4}+x+y^2=0$ ①，则平移后右顶点 $A'(0,0)$，记平移后 P,Q 的对应点分别为 P',Q'. ……………… 6 分

设直线 l'的方程为 $x=ty+s,s\neq0$，

所以$\dfrac{x-ty}{s}=1$.

将上式代入①得$\dfrac{x^2}{4}+y^2+x\cdot\dfrac{x-ty}{s}=0$，……………………………………………………………… 8 分

等式两边同时除以 x^2，

得$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{t}{s}\cdot\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{s}=0$.

由题易知 $A'P'\perp A'Q'$，所以 $k_{A'P'}\cdot k_{A'Q'}=-1$. ……………………………………………………… 10 分

即$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{s}=-1$，解得 $s=-\dfrac{4}{5}$.

所以直线 l' 的方程为 $x=ty-\frac{4}{5}$.

所以平移前直线 l 恒过定点 $\left(\frac{6}{5},0\right)$. …………………………………………………………………… 12 分

22.【命题意图】本题考查函数、方程及不等式的转化，函数的单调性、最值、极值问题，考查了数学运算、数学抽象、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 由题易得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)\leqslant 0$，不等式两边同除以 x，得 $\ln x-x+a\leqslant 0$.

设 $g(x)=\ln x-x+a, x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$. …………………………………………………………… 2 分

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………………… 4 分

所以 $g(x)\leqslant g(1)=\ln 1-1+a=-1+a$.

依题知 $-1+a\leqslant 0$，得 $a\leqslant 1$，

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2) 证明：$f'(x)=\ln x+1-2x+a$，

令 $t(x)=\ln x+1-2x+a, x>0$，则 $t'(x)=\frac{1}{x}-2$.

令 $t'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$t'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$t'(x)<0$，

所以 $t(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减. ……………………………………… 8 分

因为函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{1}{e},b\right]$，所以 $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0, f'(b)=0, b>\frac{1}{2}$.

所以 $\ln\frac{1}{e}+1-2\times\frac{1}{e}+a=0$，解得 $a=\frac{2}{e}$，

$\ln b+1-2b+a=0$，即 $\ln b=-1+2b-a=2b-1-\frac{2}{e}$.

又当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},b\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(b,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},b\right)$ 上单调递增，在 $(b,+\infty)$ 上单调递减. …………………… 10 分

所以 $f(x)$ 的极大值 $M=f(b)=b\ln b-b^2+b\cdot\frac{2}{e}=b\left(2b-1-\frac{2}{e}\right)-b^2+\frac{2b}{e}=b^2-b$.

因为 $f'(1)=\ln 1+1-2\times 1+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}-1<0, f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+1-2\times\frac{1}{2}+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}-\ln 2>0$，

所以 $b\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以 $b^2-b\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$，

所以函数 $f(x)$ 的极大值 $M\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$. ……………………………………………………………… 12 分