广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数学

（本试卷共6页，22小题，满分150分. 考试时间120分钟.）

注意事项：

1. 答卷前，考生必须用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号填写在答题卡相应的位置上.

2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题同的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；不能答在试卷上.

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，涉及作图的题目，用2B铅笔画图. 答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；改动的答案也不能超出指定的区域. 不准使用铅笔、圆珠笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.

4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，满分40分. 在每小题给出的四个选项中，有一项是符合题目要求的）

1.已知集合 $P=\{x|x<3\}$，$Q=\{x|-2<x<2\}$，则（　　）

A. $P\subseteq Q$　　B. $Q\subseteq P$　　C. $P\cap Q=P$　　D. $P\cup Q=Q$

2. 某中学甲、乙、丙、丁四名学生去A、B、C、D四个社区展开"厉行节约，反对餐饮浪费"宣传活动，每名学生只去一个社区，每个社区一名学生。甲说我不去A社区，乙说我不去A社区也不去D社区，丙说我不去B社区.若甲、乙、丙三人中只有甲和乙说了真话，则去D设区的是（　　）

A.甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

3. 已知 z_1，z_2 都是复数，z_2 的共轭复数为 $\overline{z_2}$，下列命题中，真命题的是（　　）

A.若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1=z_2$　　B.若 $z_1>z_2$，则 $|z_1|>|z_2|$

C. 若 $z_1=z_2$，则 $z_1=\overline{z_2}$　　D. 若 $z_1=\overline{z_2}$，则 z_1+z_2 为实数

4.已知第二象限角 θ 的终边上有两点 A(-1,a)，B(b，2)，且 $\cos\theta+3\sin\theta=0$，则 $3a-b$=（　　）

A.-7　　B.-5　　C.5　　D. 7

5. $(x^2+1)(2x-\frac{1}{x})^6$ 展开式的常数项是（　　）

A. 160　　B. 100　　C. -100　　D. -160

6. 已知函数 $f(x)=xe^x+\frac{x}{e^x}$，且 $f(1+a)+f(-a^2+a+2)>0$，则 a 的取值范围是（　　）

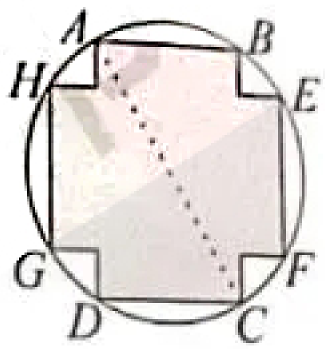
A. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-1,3)$

C. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-3,1)$

7. 学生到工厂参加实践劳动，永薄铁皮制作一个圆柱体，圆柱体的全面积为 8π，则该圆柱体的外接球的表面积的最小值是（　　）

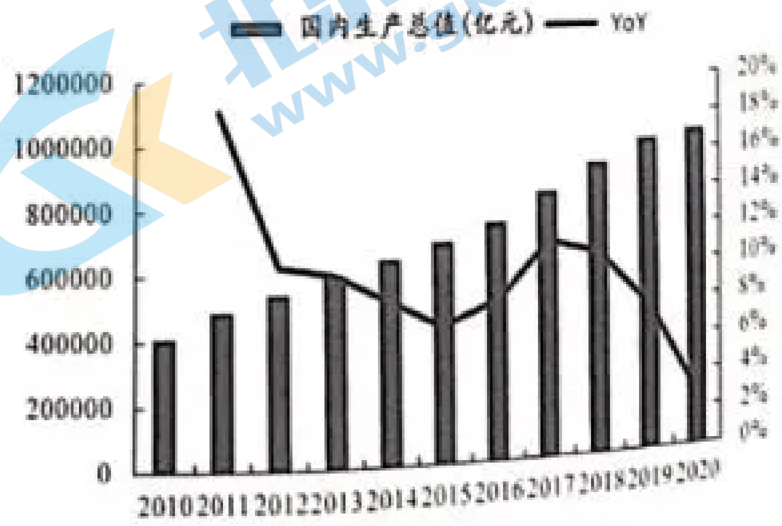
A. $4(\sqrt{5}-1)\pi$　　B. $8(\sqrt{5}-1)\pi$　　C. $4(\sqrt{5}+1)\pi$　　D. $8(\sqrt{5}+1)\pi$

8. 如图，有一种变压器，铁芯的截面是正十字形（阴影部分，其中矩形 ABCD 绕其对称中心，按顺时针方向旋转 90 度后与矩形 EFGH 重合），已知 AB=2，正十字形有一个外接圆，从外接圆内部随机取一点，此点取自正十字形的概率为 $\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\pi}$，则 $\tan\angle ACD$=（　　）



二、填空题（**本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.**）

9. 2020 年，中国经济在疫情阻击战的基础上实现了正增长，国内生产总值首次突破百万亿大关. 根据中国统计局官方提供的数据，2010 年~2020 年，中国国内生产总值（单位：亿元）的条形图和国内生产总值年增长率（YoY）的折线图如图，根据该图，下列结论正确的是（　　）



A. 2017 年国内生产总值的年增长率最大

B. 2011 年国内生产总值的年增长率最大

C. 这 11 年国内生产总值的年增长率不断减小

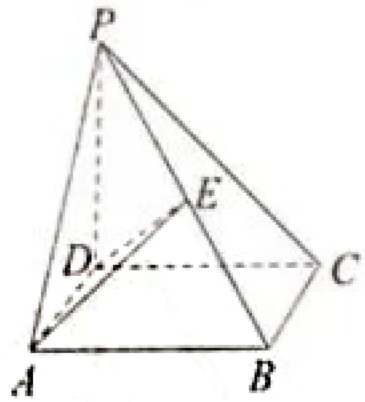
D. 这 11 年国内生产总值的年增长率逐年增长

10. 过双曲线$C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$的左焦点 F 作直线 l 交 C 于 A、B 两点，则（　　）

A.若$|AB|=1$，则直线 l 只有 1 条　　　　B. 若$|AB|=2$，则直线 l 有 2 条

C. 若$|AB|=3$，则直线 l 有 3 条　　　　D. 若$|AB|=4$，则直线 l 有 4 条

11. 如图，四棱锥 P—ABCD 的底面为矩形，PD⊥底面 ABCD，AD=1，PD=AB=2，点 E 是 PB 的中点，过 ADE 三点的平面α与平面 PBC 的交线为 l，则（　　）



A. l∥平面 PAD

B. AE∥平面 PCD

C.直线 PA 与 l 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. 平面α截 P—ABCD 四棱锥所得的上、下两部分几何体的体积之比为$\frac{3}{5}$

12.对于函数$f(x)=\begin{cases}-4x^2+1, x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\\ -f(x-1), x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\\ \frac{1}{2}f(x-2), x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)\end{cases}$，则下列结论正确的是（　　）

A.任取$x_1,x_2\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<2$恒成立

B. $f(0)+f(2)+f(4)+f(6)\cdots+f(2020)=2-\frac{1}{2^{1010}}$

C. 对任意 $x>0$，不等式$f(x)\le\frac{k}{x}$恒成立，则实数 k 的取值范围是$[1,+\infty)$

D.函数$y=f(x)-\ln(x-\frac{1}{2})$有且仅有 2 个零点

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13.已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=2$，$a_4+a_5=10$，则$\log_2 a_6$=_____.

14. 在△ABC 中，∠ABC=90°，AB=$\sqrt{3}$，AC=3，点 D 在 AC 上，且 AD=2DC，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$=_____.

15.若直线 $y=-2x+\frac{2}{3}$ 与曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-ax$ 相切，则 a=______.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点为 F_1（-2, 0）和 F_2（2, 0）. 直线 l 过点 F_1，F_2 点关于直线 l 对称点 A 在 C 上，且 $(\overrightarrow{F_1A}+2\overrightarrow{F_1F_2})\cdot\overrightarrow{AF_2}=8$，则 C 的方程为______________.

四、解答题（本大题共 6 小题，满分 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本题满分 10 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

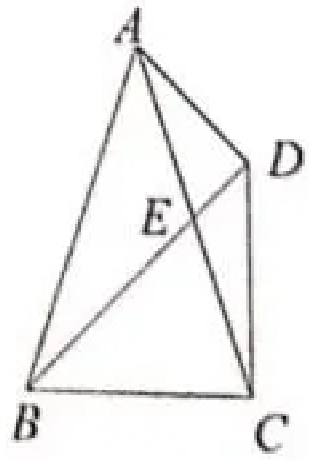
（2）令 $b_n=\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本题满分 12 分）

如图，在四边形 ABCD 中，△BCD 是等腰直角三角形，∠BCD=90°，∠ADB=90°，sin∠ADB=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，BD=2，AC 与 BD 交于点 E.

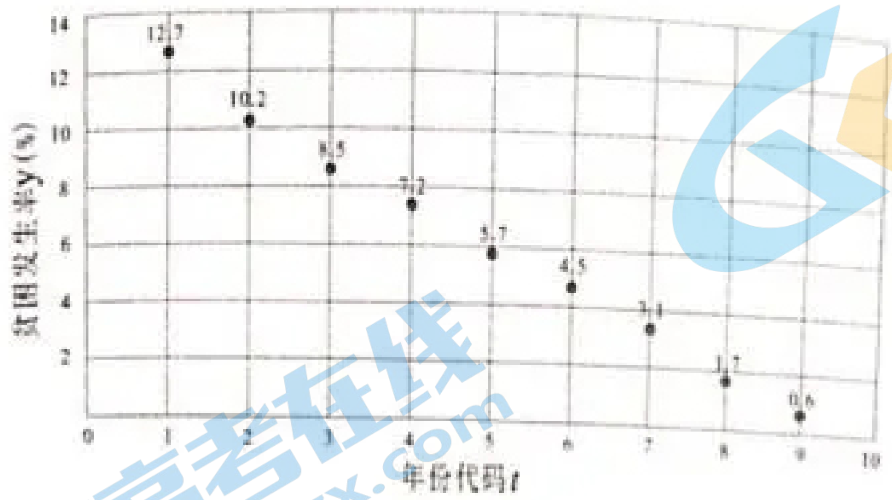
（1）求 sin∠ACD；

（2）求△ABE 的面积.



19. （本题满分 12 分）

习近平总书记指出:在扶贫的道路上，不能落下任何一个贫困家庭，丢下一个贫困群众.根据相关统计，2010 年以后中国贫困人口规模呈逐年下降趋势，2011 年~2019 年，全国农村贫困发生率的散点图如下:



注：年份代码 1～9 分别对应年份 2011 年～2019 年.

（1）求 y 关于 t 的回归直线方程（系数精确到 0.01）;

（2）已知某贫困地区的农民人均年纯收入 X（单位：万元）满足正态分布 N（1.6，0.36），若该地区约有 97.72%的农民人均年纯收入高于该地区最低人均年纯收入标准，则该地区最低人均年纯收入标准大约为多少万元？.

参考数据与公式: $\sum_{i=1}^{9} y_i = 54.2$，$\sum_{i=1}^{9} t_i y_i = 183.6$

回归方程$\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$中斜率和截距的最小二乘估计分别为$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$

，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx0.6826$；

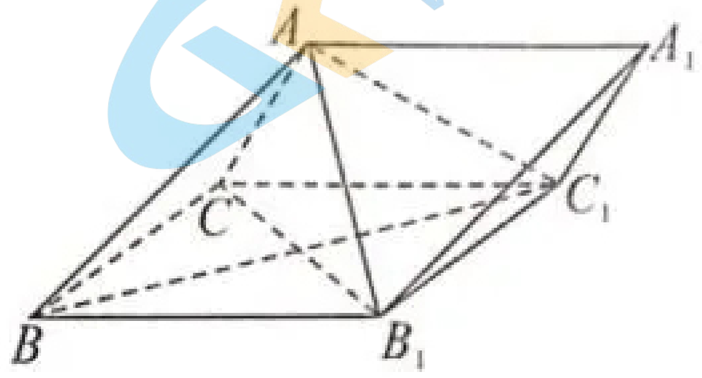
$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx0.9544$；$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx0.9974$.

20. （本题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 BB_1C_1C 是菱形，$\angle ABB_1=\angle ABC$.

（1）求证：$B_1C\perp$ 平面 ABC_1；

（2）若 $BB_1=B_1C=2$，$AB=AC_1$，且二面角 B_1-AB-C 为直二面角，求三棱锥 C_1-ABB_1 的体积.



21.（本题满分 12 分）

已知抛物线 C：$x^2=2py\ (p>0)$上的点到点 $A(0，p)$的距离的最小值为 2.

（1）求 C 的方程；

（2）若点 F 是 C 的焦点，过 F 作两条相互垂直的直线 l_1，l_2 与 C 交于 M，N 两点，与 C 交于 P，Q 两点，线段 MN，PQ 的中点分别是 S，T，是否存在定圆使得直线 ST 截该圆所得的线段长为定值？若存在，写出一个定圆的方程；若不存在，请说明理由.

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x-1)^2(a>0)$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：对任意 $n\in N^*$，都有 $1+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2}<\dfrac{2n}{\sqrt{n+1}}$.

2021 年广州市普通高中毕业班综合测试（二）

数学试题参考答案及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	D	C	B	B	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9. BD　　10. ABD　　11. ACD　　12. B

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．3　　14．3　　15．3　　16．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．

17.（10 分）

（1）解法 1：　由 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，得 $S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})$，　……………………1 分

得 $a_{n+1}=2a_n\ (n\geq 2)$，　……………………2 分

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\ (n\geq 2)$，　……………………3 分

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $q=2$．　……………………4 分

因为 $a_1=1$，

所以 $a_n=2^{n-1}$．　……………………5 分

解法 2：由 $S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，得 $S_3+2S_1=3S_2$，　……………………1 分

得 $a_1+a_2+a_3+2a_1=3(a_1+a_2)$，　……………………2 分

整理得$a_3=2a_2$，即$\dfrac{a_3}{a_2}=2$. ……………………………3 分

因为$\{a_n\}$是等比数列，所以$q=\dfrac{a_3}{a_2}=2$. ……………………………4 分

因为$a_1=1$，

所以$a_n=2^{n-1}$. ……………………………5 分

解法 3：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

若$q=1$，由于$a_1=1$，则$a_n=1$，$S_n=n$. ……………………………1 分

因而$S_{n+1}+2S_{n-1}=(n+1)+2(n-1)=3n-1\neq 3S_n(n\geq 2)$，与题设$S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$矛盾，

所以$q\neq 1$. ……………………………2 分

由$S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n(n\geq 2)$，

得$\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}+2\times\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}=3\times\dfrac{1-q^n}{1-q}$， ……………………………3 分

解得$q=2$. ……………………………4 分

因为$a_1=1$，所以$a_n=2^{n-1}$. ……………………………5 分

（2）解法 1：由（1）得$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. ……………………………6 分

则$S_{n+1}=2^{n+1}-1$. ……………………………7 分

所以$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………8 分

所以$T_n=\left(\dfrac{1}{2-1}-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$ ……………9 分

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………10 分

解法 2：由（1）得$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. ……………………………6 分

因为$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}$ ……………………………7 分

$=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$. ……………………………8 分

所以 $T_n=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$ ……………………………9 分

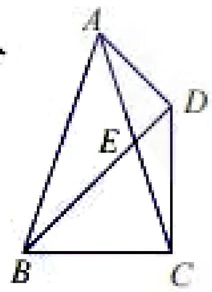
$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}$

$=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$. ……………………………10 分

18. (12 分)

（1）解：因为$\triangle BCD$是等腰直角三角形，$\angle BCD=90^\circ$，$BD=2$，

所以 $BC=CD=\sqrt{2}$，$\angle CBD=\angle CDB=45^\circ$. …………1 分



因为 $\angle ADB=90^\circ$，$\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $0^\circ<\angle ABD<90^\circ$，$\cos\angle ABD=\sqrt{1-\sin^2\angle ABD}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$， ………2 分

$AB=\frac{BD}{\cos\angle ABD}=\sqrt{5}$，$AD=AB\sin\angle ABD=1$. ……………………………4 分

在$\triangle ACD$中，$\angle ADC=135^\circ$，

由余弦定理得 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos135^\circ}$

$=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$=\sqrt{5}$. ……………………………5 分

由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin135^\circ}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，

得 $\sin\angle ACD=\frac{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………6 分

（2）解法 1：在$\triangle ACD$中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，

得 $\sin\angle CAD=\frac{CD\cdot\sin\angle ACD}{AD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………7 分

由于$0^\circ < \angle CAD < 90^\circ$，得$\cos\angle CAD = \sqrt{1-\sin^2\angle CAD} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……8 分

所以$\tan\angle CAD = \frac{\sin\angle CAD}{\cos\angle CAD} = \frac{1}{2}$. ……9 分

在Rt△ADE中，$DE = AD\cdot\tan\angle CAD = \frac{1}{2}$，

$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot DE = \frac{1}{4}$. ……10 分

在Rt△ABD中，$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot BD = 1$. ……11 分

所以△ABE的面积为$S = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta ADE} = \frac{3}{4}$. ……12 分

解法 2：由（1）知$AC = AB = \sqrt{5}$，$BC = \sqrt{2}$，

则$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot\sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \frac{3}{2}$. ……7 分

由于$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BE\cdot\sin\angle ABD = \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\cdot BE\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{2}BE$， ……8 分

$S_{\Delta CBE} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot BE\cdot\sin\angle CBD = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\cdot BE\cdot\sin 45^\circ = \frac{1}{2}BE$， ……9 分

所以$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta CBE}$. ……10 分

因为$S_{\Delta ABE} + S_{\Delta CBE} = S_{\Delta ABC}$， ……11 分

所以△ABE的面积为$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4}$. ……12 分

解法 3：由$\sin\angle ACD = \frac{\sqrt{10}}{10}$，且$0^\circ < \angle ACD < 90^\circ$，

得$\cos\angle ACD = \sqrt{1-\sin^2\angle ACD} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. ……7 分

在△CDE中，$\angle CED = 180^\circ - \angle ACD - \angle CDB = 135^\circ - \angle ACD$，

则$\sin\angle CED = \sin(135^\circ - \angle ACD)$

$= \sin 135^\circ\cos\angle ACD - \cos 135^\circ\sin\angle ACD$ ……8 分

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{10}}{10}$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$ ……………………………9 分

由正弦定理得 $\frac{DE}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin\angle CED}$，

得 $DE=\frac{CD\cdot\sin\angle ACD}{\sin\angle CED}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{1}{2}.$ ……………………………10 分

所以 $BE=BD-DE=\frac{3}{2}.$ ……………………………11 分

所以$\triangle ABE$的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AB\cdot\sin\angle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{4}.$ …12 分

解法 4：由 $\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $0^\circ<\angle ACD<90^\circ$，

得 $\cos\angle ACD=\sqrt{1-\sin^2\angle ACD}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$ ……………………………7 分

因为 $\angle ACB=\angle BCD-\angle ACD=90^\circ-\angle ACD$，

所以 $\cos\angle ACB=\cos\left(90^\circ-\angle ACD\right)=\sin\angle ACD=\frac{\sqrt{10}}{10}$， ……………………8 分

$\sin\angle ACB=\sin\left(90^\circ-\angle ACD\right)=\cos\angle ACD=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$ ……………………9 分

在$\triangle BCE$中，$\angle BEC=180^\circ-45^\circ-\angle ACB=135^\circ-\angle ACB$，

则 $\sin\angle BEC=\sin\left(135^\circ-\angle ACB\right)$

$$=\sin 135^\circ\cos\angle ACB-\cos 135^\circ\sin\angle ACB$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$ ……………………………10 分

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BEC}=\frac{BE}{\sin\angle ACB}$，

得 $BE=\dfrac{BC\cdot\sin\angle ACB}{\sin\angle BEC}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{3}{2}$. ……………………………11 分

所以△ABE 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AB\cdot\sin\angle ABD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3}{4}$.…12 分

19.（12 分）

（1）解：由散点图中数据和附注中参考数据得 $\bar{t}=5$，$\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})^2=60$，

$\bar{y}=\dfrac{54.2}{9}\approx 6.02$， ……………………………3 分

得 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{9}t_iy_i-9\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{183.6-5\times 54.2}{60}=\dfrac{-87.4}{60}\approx -1.46$， ……………………………5 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=6.02-(-1.46)\times 5=13.32$. ……………………………6 分

所以 y 关于 t 的回归直线方程为 $\hat{y}=-1.46t+13.32$. ……………………………7 分

（2）解：由题意 $X\sim N(1.6,0.36)$，$P(X>\mu-2\sigma)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0.9544}{2}=0.9772$，……9 分

所以 $\mu-2\sigma=1.6-2\times 0.6=0.4$ 时，满足题意. ……………………………11 分

所以该地区最低人均年纯收入标准大约为 0.4 万元. ……………………………12 分

20. (12 分)

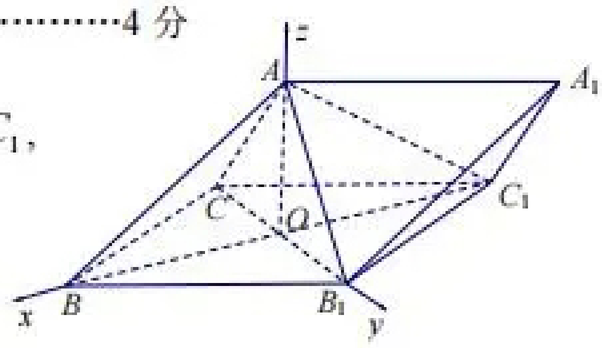
（1）证明：记 $BC_1\cap B_1C=O$，连结 AO，

因为侧面 BB_1C_1C 是菱形， 所以 $B_1C\perp BC_1$，$BB_1=BC$. ……………………………1 分

因为 $\angle ABB_1=\angle ABC$，$AB=AB$， 所以△ $ABB_1\cong$△ABC. ……………………………2 分

所以 $AB_1=AC$. ……………………………3 分

因为 O 是 B_1C 的中点， 所以 $AO\perp B_1C$.……………………………4 分



因为 $AO\cap BC_1=O$，$AO\subset$ 平面 ABC_1，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1. ……………………………5 分

（2）解法 1：

因为 $AB=AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO\perp BC_1$. ……………………………6 分

由（1）可知$B_1C\perp AO$，因为$BC_1\cap B_1C=O$，

所以$AO\perp$面BB_1C_1C.　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………………7 分

以O为原点建立如图的空间直角坐标系$O-xyz$，设$AO=t$，　……………………………8 分

因为$BB_1=B_1C=2$，所以$B_1O=1$，$BO=\sqrt{3}$.

则$B\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$B_1(0,1,0)$，$C(0,-1,0)$，$A(0,0,t)$，

$\overrightarrow{B_1A}=(0,-1,t)$，$\overrightarrow{B_1B}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(-\sqrt{3},0,t\right)$，$\overrightarrow{CA}=(0,1,t)$

设平面AB_1B的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则有

$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1A}=-y_1+tz_1=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1B}=\sqrt{3}x_1-y_1=0$，

令$y_1=\sqrt{3}$，得平面AB_1B的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=\left(1,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{t}\right)$.　……………………………9 分

设平面ABC的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则有

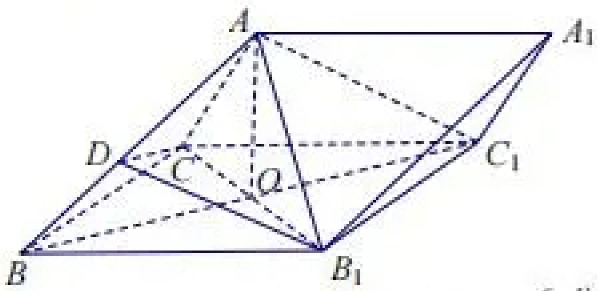
$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BA}=-\sqrt{3}x_2+tz_2=0$，$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CA}=y_2+tz_2=0$，

令$x_2=\sqrt{3}$，则$y_2=-3$，$z_2=\dfrac{3}{t}$.

则平面ABC的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=\left(\sqrt{3},-3,\dfrac{3}{t}\right)$.　……………………………10 分

由题意知$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{t^2}=0$，解得$t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.　……………………………11 分

所以$V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　……………………………12 分



解法 2：作$CD\perp AB$于D，连接B_1D，

由（1）知$\Delta ABB_1\cong\triangle ABC$，

所以$B_1D\perp AB$，$CD=B_1D$.　……………………………6 分

所以$\angle B_1DC$是二面角B_1-AB-C的平面角，依题意得$\angle B_1DC=90^\circ$.　…………7 分

因为$BB_1=B_1C=2$，所以$CD=B_1D=\sqrt{2}$.

因为 $AB=AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO\perp BC_1$. ……………………8 分

由（1）可知 $B_1C\perp AO$，因为 $BC_1\cap B_1C=O$，所以 $AO\perp$ 面 BB_1C_1C ……………9 分

设 $AO=x$，在 Rt△ AOB_1 中，$AB_1^2=B_1O^2+AO^2=1+x^2$，……………………10 分

在 Rt △ ADB_1 中，$AD=\sqrt{AB_1^2-B_1D^2}=\sqrt{x^2-1}$，

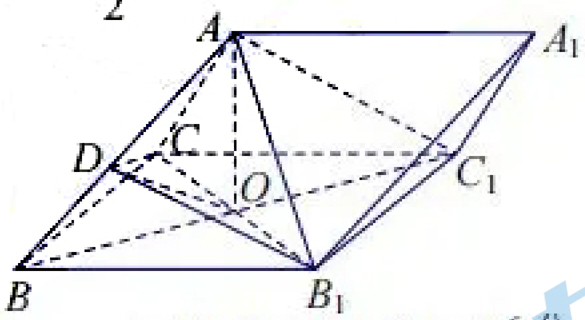
在 Rt △ AOB 中，$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{x^2+3}$，

在 Rt △ BDB_1 中，$BD=\sqrt{BB_1^2-B_1D^2}=\sqrt{2}$，

因为 $AB=BD+AD$，

则 $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2}$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………11 分

所以 $V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………12 分



解法 3：作 $CD\perp AB$ 于 D，连接 B_1D，DO，

由（1）知 △ $ABB_1\cong$△ ABC，

所以 $B_1D\perp AB$，$CD=B_1D$. ……………………6 分

所以 $\angle B_1DC$ 是二面角 B_1-AB-C 的平面角，依题意得 $\angle B_1DC=90°$. ………7 分

又 $CD\cap B_1D=D$，则 $AB\perp$ 平面 CDB_1.

因为 $DO\subset$ 平面 CDB_1，所以 $DO\perp AB$. ……………………8 分

因为 $BB_1=B_1C=2$，所以 $CD=B_1D=\sqrt{2}$，$DO=1$，$BO=\sqrt{3}$.

在 Rt △ BDB_1 中，$BD=\sqrt{BB_1^2-B_1D^2}=\sqrt{2}$.

因为 Rt △ AOB ~Rt△ BOD，

所以 $\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{DO}{BD}$，得 $AO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………9 分

因为 $AB=AC_1$，O 为 BC_1 的中点，所以 $AO\perp BC_1$. ……………………10 分

由（1）可知 $B_1C\perp AO$，因为 $BC_1\cap B_1C=O$，所以 $AO\perp$ 面 BB_1C_1C． ………11 分

所以$V_{C_1-ABB_1}=V_{A-BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times AO\times S_{\Delta BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………12 分

21.（12 分）

（1）解：设$B(x_0,y_0)$是抛物线C上的任一点，则$x_0^2=2py_0$. ……………………1 分

$|AB|=\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-p)^2}$

$=\sqrt{2py_0+y_0^2-2py_0+p^2}$

$=\sqrt{y_0^2+p^2}$. ……………………2 分

因为$y_0\ge 0$，

所以当$y_0=0$时，$|AB|_{\min}=\sqrt{p^2}=p$. ……………………3 分

依题意，得$p=2$.

所以C的方程为$x^2=4y$. ……………………4 分

（2）解法 1：因为点F是C的焦点，所以$F(0,1)$. ……………………5 分

根据题意，直线l_1的斜率k存在且$k\ne 0$，设$l_1:y=kx+1$，

由于$l_1\perp l_2$，则$l_2:y=-\frac{1}{k}x+1$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$S(x',y')$，

由$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$消去$y$，得$x^2-4kx-4=0$，

$\Delta=(4k)^2-4\times(-4)=16(k^2+1)>0$，

则$x_1+x_2=4k$. ……………………6 分

因为S是线段MN的中点，

所以$x'=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y'=kx'+1=2k^2+1$.

所以$S(2k,2k^2+1)$. ……………………7 分

同理得$T\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$. ……………………8 分

则直线 ST 的斜率为 $k'=\dfrac{(2k^2+1)-\left(\dfrac{2}{k^2}+1\right)}{2k-\left(-\dfrac{2}{k}\right)}=\dfrac{k^2-1}{k}$. ……………………9 分

则直线 ST 的方程为 $y-(2k^2+1)=\dfrac{k^2-1}{k}(x-2k)$,

得 $y=\dfrac{k^2-1}{k}x+3$. ……………………10 分

所以直线 ST 恒过定点 $(0,3)$. ……………………11 分

所以存在定圆 $H:x^2+(y-3)^2=r^2$(r 为常数，且 $r\neq0$)，使得直线 ST 截圆 H 所得的线段长恒为定值 $2|r|$. ……………………12 分

解法 2：因为点 F 是 C 的焦点，所以 $F(0,1)$. ……………………5 分

根据题意，直线 l_1 的斜率 k 存在且 $k\neq0$，设 $l_1:y=kx+1$,

由于 $l_1\perp l_2$，则 $l_2:y=-\dfrac{1}{k}x+1$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$S(x',y')$,

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-4kx-4=0$,

$\Delta=(4k)^2-4\times(-4)=16(k^2+1)>0$,

则 $x_1+x_2=4k$. ……………………6 分

因为 S 是线段 MN 的中点,

所以 $x'=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y'=kx'+1=2k^2+1$.

所以 $S(2k,2k^2+1)$. ……………………7 分

同理得 $T\left(-\dfrac{2}{k},\dfrac{2}{k^2}+1\right)$. ……………………8 分

设点 $H(0,3)$,

由于 $k_{SH}=\dfrac{2k^2+1-3}{2k}=\dfrac{k^2-1}{k}$， $k_{TH}=\dfrac{\dfrac{2}{k^2}+1-3}{-\dfrac{2}{k}}=\dfrac{k^2-1}{k}$， ……………………9 分

所以 $k_{SH}=k_{TH}$. ……………………10 分

所以 S，T，H 三点共线.

所以直线 ST 恒过点 H. ……………………11 分

所以存在定圆 $H:x^2+(y-3)^2=r^2$（r 为常数，且 $r\neq0$），使得直线 ST 截圆 H 所得的线段长恒为定值 $2|r|$. ……………………12 分

22. (12 分)

（1）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2a(x-1)=\dfrac{2ax^2+1-2a}{x+1}$.

……………………1 分

① 若 $1-2a\geq0$，即 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$，则 $f'(x)\geq0$ 对 $x\in(-1,+\infty)$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增； ……………………2 分

② 若 $1-2a<0$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，则方程 $2ax^2+1-2a=0$ 的两根为 $x=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$；

当 $-1<x<-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$ 时，$f'(x)>0$；

当 $-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}<x<\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x>\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}$ 时，$f'(x)>0$；

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}},\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，

在 $\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………3 分

综上所述，当 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当$a>\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$\left(-1,-\sqrt{1-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(-\sqrt{1-\frac{1}{2a}},\sqrt{1-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递减，

在$\left(\sqrt{1-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递增. ……………………………4 分

（2）证明：当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}(x-1)^2$，

由（1）知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即对任意$x\in(0,+\infty)$，有$f(x)>f(0)=\frac{1}{2}$，

即$2\ln(x+1)+(x-1)^2>1$，整理得$2x-x^2<2\ln(x+1)$. ……………………………5 分

令$x=\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots,n)$，则$\frac{2k-1}{k^2}<2\ln\frac{1+k}{k}$. ……………………………6 分

累加得$1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}<2\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=2\ln(n+1)$.

……………………………7 分

下面证明：对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$\ln(n+1)<\frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

记函数$h(t)=2t\ln t-t^2+1(t>1)$，则$h'(t)=2(\ln t-t+1)$，$[h'(t)]'=2\left(\frac{1}{t}-1\right)$，

当$t>1$时，$[h'(t)]'<0$，故函数$h'(t)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减.

所以$h'(t)<h'(1)=0$. ……………………………8 分

故函数$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$h(t)<h(1)=0$.

即对$t>1$，有$2t\ln t<t^2-1$， ……………………………9 分

令$t=\sqrt{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$2\sqrt{n+1}\cdot\ln\sqrt{n+1}<\left(\sqrt{n+1}\right)^2-1=n$. ……………………………10 分

所以$\ln(n+1)<\frac{n}{\sqrt{n+1}}$. ……………………………11 分

所以$1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}<\frac{2n}{\sqrt{n+1}}$. ……………………………12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。