

数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】 $z=(1+i^3)(i+i^2)=(1-i)(i-1)=2i$, 所以 $\bar{z}=-2i$, 故选 B.

2.A 【解析】 $A=\{x|x=2n, n\in\mathbb{N}\}=\{0,2,4,6,8,10,12,\dots\}$, $B=\{x|x=3n, n\in\mathbb{N}\}=\{0,3,6,9,12,15,\dots\}$, 所以 $A\cap B=\{0,6,12,18,\dots\}=\{x|x=6n, n\in\mathbb{N}\}$, 故选 A.

3.C 【解析】根据特称命题: $\exists x_0\in M, p(x_0)$ 的否定形式是全称命题: $\forall x\in M, \neg p(x)$, 可知“ $\exists x_0>1, x_0-2\ln x_0\leq 1$ ”的否定为“ $\forall x>1, x-2\ln x>1$ ”, 故选 C.

4.C 【解析】根据题意, 函数 $f(x)=\frac{1}{e^x-1}+a$, 其定义域为 $\{x|x\neq 0\}$. 由 $f(-x)=-f(x)$, 即 $\left(\frac{1}{e^{-x}-1}+a\right)+\left(\frac{1}{e^x-1}+a\right)=-1+2a=0$, 解得 $a=\frac{1}{2}$, 故选 C.

5.A 【解析】 $f'(x)=ae^x-2x$, 根据 $f(x)=ae^x-x^2+b$ 是增函数, 得 $f'(x)\geq 0$, 即 $ae^x-2x\geq 0, a\geq \frac{2x}{e^x}$, 令 $g(x)=\frac{2x}{e^x}$, 则 $g'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{2(1-x)}{e^x}$, 当 $x<1$ 时, $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 是增函数, 当 $x>1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 是减函数, $g(x)$ 有最大值 $g(1)=\frac{2}{e}$, 因此 $a\geq \frac{2}{e}$, 实数 a 的最小值是 $\frac{2}{e}$, 故选 A.

6.B 【解析】若 $ab\geq 2$, 则 $4^a+2^b\geq 2\sqrt{4^a\times 2^b}=2\sqrt{2^{2a}\times 2^b}=2\sqrt{2^{2a+b}}\geq 2\sqrt{2^{2\sqrt{2ab}}}\geq 2\sqrt{2^{2\sqrt{4}}}=8$, 当 $2a=b, ab=2$, 即 $a=1, b=2$ 时, 等号成立, 因此若不等式 $ab\geq 2$ 成立, 则不等式 $4^a+2^b\geq 8$ 成立; 反过来, 若 $4^a+2^b\geq 8$ 成立, 取 $a=2, b=\frac{1}{2}$, 但是 $ab=1$, 不等式 $ab\geq 2$ 不成立, 因此不等式 $4^a+2^b\geq 8$ 成立是不等式 $ab\geq 2$ 成立的必要不充分条件, 故选 B.

7.C 【解析】 $a=\frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta+1}=\frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2+1}=\sin \theta \cdot \cos \theta, b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \cos 2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2 \sin^2 \theta)=\sin^2 \theta=\sin \theta \cdot \sin \theta$.

$\sin \theta, c=\frac{1}{\cos \theta}-\cos \theta=\frac{1-\cos^2 \theta}{\cos \theta}=\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}=\sin \theta \cdot \tan \theta$, 根据 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$, 得 $\tan \theta>1, 1>\sin \theta>\cos \theta>0$, 即 $\tan \theta>\sin \theta>\cos \theta, \sin \theta \cdot \tan \theta>\sin \theta \cdot \sin \theta>\sin \theta \cdot \cos \theta$, 即 $c>b>a$, 故选 C.

8.A 【解析】 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 4π , 所以外接圆半径为 2, 不妨设三边 a, b, c 成等比数列, 则 $b^2=ac$. 又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geq \frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=c$ 时等号成立, 所以 $0<B\leq \frac{\pi}{3}$, 又 $\frac{b}{\sin B}=4$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b^2\sin B=8\sin^3 B\leq 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=3\sqrt{3}$, 故选 A.

9.ABC 【解析】若 (a, b) 为函数 $y=\log_2 x$ 图象上的一点, 则 $b=\log_2 a, 2^b=a$. 由 $2^b=a$, 得 (b, a) 为函数 $y=2^x$ 图象上的点, 故 A 正确; 由 $2^b=a$, 得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-b}=2^b=a$, 所以 $(-b, a)$ 为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象上的点, 故 C 正确; 由 $b=\log_2 a$, 得 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}=\log_2 a=b$, 所以 $\left(\frac{1}{a}, b\right)$ 为函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 图象上的点, 故 B 正确; 由 $b=\log_2 a$, 得 $\log_4 a=\frac{1}{2}\log_2 a=\frac{1}{2}b$, 所以 $\left(a, \frac{b}{2}\right)$ 为函数 $y=\log_4 x$ 图象上的点, 故 D 不正确, 故选 ABC.

10.CD 【解析】 $x^2+m=0$ 有两个不等的实数根 $\sin \theta, \cos \theta$, 则 $\sin^2 \theta+m=0, \cos^2 \theta+m=0$, 根据 $\sin^2 \theta+\cos^2 \theta=1$,

得 $1+2m=0, m=-\frac{1}{2}$, 故 D 正确; 于是 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}, \cos^2\theta=\frac{1}{2}$, 因为 $\sin\theta\neq\cos\theta$, 所以 $\begin{cases} \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 或

$\begin{cases} \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 于是 $\tan\theta=-1$, 故 A 不正确; $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-1$, 故 B 不正确; $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)=0$, 故 C 正确. 故选 CD.

11. AD 【解析】数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 $d>0$, 则 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$, 若 $b_n=-a_n$, 则 $b_n=-dn-a_1+d, -d<0$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是递减数列, 故 A 正确; 若 $b_n=a_n^2$, 取 $a_n=n-3$, 即 $a_1=-2, a_2=-1, a_3=0, a_4=1, a_5=2, b_1=4, b_2=1, b_3=0, b_4=1, b_5=4, b_1>b_2>b_3<b_4<b_5$, 数列 $\{b_n\}$ 不是递增数列, 故 B 不正确; 若 $b_n=a_n+a_{n+1}$, 则 $b_n=a_1+(n-1)d+a_1+nd=2a_1+(2n-1)d, b_{n+1}-b_n=2a_1+(2n+1)d-2a_1-(2n-1)d=2d$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列, 故 C 不正确; 若 $b_n=a_n+n$, 则 $b_n=a_1+(n-1)d+n=a_1-d+(d+1)\cdot n, b_{n+1}-b_n=a_1-d+(d+1)(n+1)-[a_1-d+(d+1)n]=d+1$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $d+1$ 的等差数列, 故 D 正确. 故选 AD.

12. ABD 【解析】由 $\begin{cases} 2-x>0, \\ 2+x>0, \end{cases}$ 得 $-2<x<2$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-2, 2)$. $f(-x)=|\ln(2+x)|+|\ln(2-x)|=|\ln(2-x)|+|\ln(2+x)|=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 选项 A 正确; 由于函数 $f(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 所以考虑 $0<x<2$, 于是 $\ln(2+x)>0$, 当 $0<x<1$ 时, $\ln(2-x)>0, f(x)=\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln(4-x^2)$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是减函数, 当 $1<x<2$ 时, $\ln(2-x)<0, f(x)=-\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(-1+\frac{4}{2-x}\right)$, $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 是增函数, 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 时有最小值 $f(1)=\ln 3$, 选项 B 正确; $f(2-x)=|\ln(2-(2-x))|+|\ln(2+(2-x))|=|\ln x|+|\ln(4-x)|\neq f(x)$, 函数 $y=f(x)$ 的图象不关于直线 $x=1$ 对称, 选项 C 不正确; 由于函数 $f(x)$ 是偶函数, 根据其图象关于 y 轴对称, 可得 $f(x)$ 在 $(-2, -1)$ 是减函数, 在 $(-1, 0)$ 是增函数, 在 $(0, 1)$ 是减函数, 在 $(1, 2)$ 是增函数, 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极小值, 在 $x=0$ 处有极大值, 在 $x=1$ 处有极小值, 因此 $f(x)$ 有三个极值点, 选项 D 正确. 故选 ABD.

13. $6\sqrt{2}$ 【解析】由向量 $a=(2, x), b=(-2x, -2)$, 且 a 与 b 方向相同, 得 $a=\lambda b$, 且 $\lambda>0$, 则 $\begin{cases} 2=-2x\lambda, \\ x=-2\lambda, \end{cases} x=-\sqrt{2}$, 于是 $a=(2, -\sqrt{2}), b=(2\sqrt{2}, -2), a\cdot b=6\sqrt{2}$.

14. $\frac{\pi}{12}$ 【解析】根据 $\cos C=\frac{b}{2a}$, 以及正弦定理, 得 $\cos C=\frac{\sin B}{2\sin A}$, 即 $2\sin A\cos C=\sin B$, 又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$, 所以 $2\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C, \sin A\cos C-\cos A\sin C=0, \sin(A-C)=0, A=C$, 由 $\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $B=\frac{5}{6}\pi$, 所以 $A=\frac{\pi}{12}$.

15.2 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 显然 $q\neq 1$, $\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=3$, 所以 $q^2=2, \frac{a_4}{a_2}=\frac{a_2q^2}{a_2}=q^2=2$.

16.-3 【解析】根据 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ 和 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 得 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$, 设 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 设 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = m$, 由 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$, 以及 $\mathbf{b} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, 得 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{9}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = -\frac{1}{9}m^2$, $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{3}|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}m$, $|\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3}|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}m$, $\cos \angle BAD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-\frac{1}{9}m^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}m \times \frac{\sqrt{5}}{3}m} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin \angle BAD = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\tan \angle BAD = -3$.

17.证明:(1)由 a_n 是 a_{n+1} 与 -1 的等差中项, 得 $2a_n = a_{n+1} - 1$, 2分

$a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, $a_1 = 1$, 所以 $a_1 + 1 = 2 \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 2$, 因此数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列. 5分

(2)由(1)知, $a_n + 1 = 2^n$, 6分

$a_n = 2^n - 1 \geq 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$, $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, 当且仅当 $n = 1$ 时取等号. 7分

当 $n = 1$ 时, $\frac{1}{a_1} = 1 < 2$;

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$.

因此, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} < 2$ 10分

18.解:(1)把函数 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 3分

然后再把所得到的图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

即 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 5分

(2)由(1)得 $y = f(x) + g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 6分

令 $t = x + \frac{\pi}{3}$, 则 $x = t - \frac{\pi}{3}$, $y = \sin t + \sin\left[2\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin t + \sin\left(2t - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin t + \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t - \cos 2t = \sin t - (1 - 2\sin^2 t) = 2\sin^2 t + \sin t - 1$, 8分

令 $\sin t = m$, 则 $y = 2m^2 + m - 1 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$,

由 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 及 $t = x + \frac{\pi}{3}$, 得 $t \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $-\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1$, 即 $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$, 10分

当 $m = -\frac{1}{4}$, 即 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}$ 时, $y_{\min} = -\frac{9}{8}$, 当 $m = 1$, 即 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $y_{\max} = 2$ 12分

19.解:(1) $\triangle ABC$ 是直角三角形, 证明如下: 由正弦定理, 及 $\sin^2 B - \sin^2 A = \sin A \sin C$, 得 $b^2 - a^2 = ac$ 2分

根据 $A = \frac{\pi}{6}$ 以及余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc$, 4 分

所以 $ac + c^2 - \sqrt{3}bc = 0$, $b = \frac{a+c}{\sqrt{3}}$, 于是 $\left(\frac{a+c}{\sqrt{3}}\right)^2 = a^2 + ac$, $2a^2 + ac - c^2 = 0$, $(2a-c)(a+c) = 0$,

所以 $c = 2a$, $b^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$, 因此 $c^2 = a^2 + b^2$, $\triangle ABC$ 为直角三角形. 6 分

(2) 由 $c = 2$, 以及由 (1) 得 $c = 2a$, $b = \sqrt{3}a$, $\angle C = 90^\circ$, 可得 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ 8 分

设 $CD = x$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, 则 $BD = \sqrt{x^2 + 1}$, $AD = \sqrt{3} - x$, 且由 $\triangle ABD$ 的周长为 $\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$, 得 $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{3} - x + 2 = \frac{7+3\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{1}{3}$, 解得 $x = \frac{4}{3}$, 10 分

所以 $CD = \frac{4}{3}$, $BD = \sqrt{x^2 + 1} = \frac{5}{3}$, $\triangle BCD$ 周长为 $BC + CD + BD = 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 4$ 12 分

20. 解: (1) 由 $S_n = \frac{(3+a_n)n}{2}$, 得 $2S_n = (3+a_n)n$, 当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)(a_{n-1} + 3)$, 根据 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 得

$2a_n = n(a_n + 3) - (n-1)(a_{n-1} + 3)$, 即 $(n-2)a_n - (n-1)a_{n-1} = -3$ 2 分

当 $n \geq 3$ 时, $\frac{a_n}{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n-2} = \frac{-3}{(n-1)(n-2)}$, 即 $\frac{a_n}{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n-2} = 3\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right)$, 4 分

所以 $\frac{a_3}{2} - \frac{a_2}{1} = 3\left(\frac{1}{2} - 1\right)$,

$\frac{a_4}{3} - \frac{a_3}{2} = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$,

$\frac{a_5}{4} - \frac{a_4}{3} = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$,

.....,

$\frac{a_n}{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n-2} = 3\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right)$,

分别相加, 得 $\frac{a_n}{n-1} - \frac{a_2}{1} = 3\left(\frac{1}{n-1} - 1\right)$. 又 $a_2 = 5$, 所以 $\frac{a_n}{n-1} - 5 = 3\left(\frac{1}{n-1} - 1\right)$, 即 $a_n = 2n + 1 (n \geq 3)$, 当 $n = 1$ 时,

$2a_1 = a_1 + 3$, $a_1 = 3$, 所以 $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ 符合上式, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}^*$ 6 分

(2) 不存在. 证明如下: 假设存在正整数 m, n , 则 $a_n = 2n + 1$, $a_m = 2m + 1$,

$a_{3n+1} = 2(3n+1) + 1 = 6n + 3 = 3(2n+1)$, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2n+1}$,

$\frac{1}{a_m} = \frac{1}{2m+1}$, $\frac{1}{a_{3n+1}} = \frac{1}{3(2n+1)}$, 8 分

由 $\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{a_{3n+1}}$ 成等差数列, 得 $\frac{2}{a_m} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{3n+1}}$, $\frac{2}{2m+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)}$, $\frac{2}{2m+1} = \frac{4}{3(2n+1)}$, $2(2m+1) = 3(2n+1)$, 其中等式左边 $2(2m+1)$ 是偶数, 等式右边 $3(2n+1)$ 是奇数, 等式不成立, 即假设不成立, 因此不存在这样的正整数 m, n 12 分

21. (1) 解: $f(x), g(x)$ 的定义域为 $x \in (0, +\infty)$. 设函数 $f(x)$ 的零点为 $x_0, x_0 > 0$, 则 $x_0 + \ln x_0 = 0$, $\ln x_0 = -x_0$,

$e^{-x_0} = x_0$, $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ 2 分

$g(x_0) = e^{x_0} \ln x_0 + a = \frac{1}{x_0} \times (-x_0) + a = -1 + a$, 因为函数 $f(x)$ 的零点是函数 $g(x)$ 的零点, 所以 $g(x_0) = 0$,

因此 $a=1$ 6 分

(2) 证明: $g'(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$, 令 $h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 令 $h'(x) >$

0 , 得 $x > 1$, 令 $h'(x) < 0$, 则 $0 < x < 1$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 是减函数, 在 $(1, +\infty)$ 是增函数. 8 分

所以 $h(x)$ 有最小值 $h(1) = 1 > 0$, 即 $h(x) > 0$,

于是 $g'(x) = e^x h(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是增函数,

由 $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}} \ln \frac{1}{e} + 1 = 1 - e^{\frac{1}{e}} < 1 - e^0 = 0$, $g(1) = 1 > 0$, 所以 $g(x)$ 有唯一零点. 12 分

22. 解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x) = e^x(x+1)$, $f(0) = 1$, 1 分

$f'(x) = e^x(x+2)$, $f'(0) = 2$, 2 分

函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 2(x - 0)$, 即 $2x - y + 1 = 0$ 4 分

(2) 对任意 $x \leq 0$, 有 $f(x) \geq ax + 1$, 即 $e^x[(a-1)x + 1] - ax - 1 \geq 0$, 令 $g(x) = e^x[(a-1)x + 1] - ax - 1$, 则有对任意 $x \leq 0$, $g(x) \geq 0$ 5 分

$g'(x) = e^x[(a-1)x + a] - a = (a-1)xe^x + a(e^x - 1)$,

当 $a \geq 1$, 且 $x \leq 0$ 时, $(a-1)xe^x \leq 0$ 以及 $a(e^x - 1) \leq 0$, 所以 $g'(x) \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是减函数, 对任意 $x \leq 0$, 有 $g(x) \geq g(0) = 0$, 符合题意; 7 分

令 $h(x) = g'(x) = (a-1)xe^x + a(e^x - 1)$, 则 $h'(x) = e^x[(a-1)x + 2a - 1]$,

当 $a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-2a}{a-1} < 0$, 令 $h'(x) < 0$, 即 $e^x[(a-1)x + 2a - 1] < 0$, $(a-1)x + 2a - 1 < 0$, $\frac{1-2a}{a-1} < x \leq 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1-2a}{a-1}, 0\right]$ 是减函数, 当 $\frac{1-2a}{a-1} < x < 0$ 时, 有 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1-2a}{a-1}, 0\right)$ 是增函数, 当 $\frac{1-2a}{a-1} < x < 0$ 时, $g(x) < g(0) = 0$, 这与 $\forall x \leq 0, g(x) \geq 0$ 矛盾, 不符合题意; 9 分

当 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 时, $a-1 < 0$, $2a-1 \geq 0$, 当 $x \leq 0$ 时, $(a-1)x + 2a - 1 \geq 0$, $h'(x) \geq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 是增函数, $h(x) \leq h(0) = 0$, 即 $g'(x) \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 是减函数, 对任意 $x \leq 0$, 有 $g(x) \geq g(0) = 0$, 符合题意.

因此实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 12 分