

# 2021 北京理工附中高一（下）期末

## 数 学

一选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知向量  $\vec{a} = (3, 4)$ ，则下列向量中与  $\vec{a}$  垂直的是 ( )

- A.  $(-3, 4)$       B.  $(-4, 3)$       C.  $(4, 3)$       D.  $(3, -4)$

2. 已知复数  $z$  满足  $zi = 1 - i$ ，则  $z$  对应的点位于复平面的 ( )

- A. 第一象限    B. 第二象限    C. 第三象限    D. 第四象限

3. 在  $\triangle ABC$  中， $\cos A = \frac{3}{4}$ ,  $\cos B = \frac{4}{5}$ ，则  $\cos(A - B) =$  ( )

- A.  $-\frac{7}{25}$       B. 0      C.  $\frac{9}{25}$       D.  $\frac{24}{25}$

4. 已知向量  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ，向量  $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，则向量  $\vec{a}$  与向量  $\vec{b}$  的夹角为 ( )

- A.  $60^\circ$       B.  $30^\circ$       C.  $120^\circ$       D.  $150^\circ$

5. 已知  $\alpha$  为锐角， $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ，则 ( )

- A.  $\sin \alpha > \cos 2\alpha$       B.  $\sin 2\alpha < \cos 2\alpha$   
C.  $\sin 2\alpha < \tan 2\alpha$       D.  $\cos 2\alpha > \tan 2\alpha$

6. 在  $\triangle ABC$  中， $a = 1, b = \sqrt{3}, A = 30^\circ$ ，则  $c =$  ( )

- A. 1      B. 2      C. 1 或 2      D. 无解

7. 函数  $y = 1 - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  是 ( )

- A. 最小正周期为  $\pi$  的奇函数      B. 最小正周期为  $\pi$  的偶函数  
C. 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的奇函数      D. 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的偶函数

8. 已知  $\tan \beta = 3, \tan(\alpha - \beta) = 5$ ，则  $\tan \alpha$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{4}{7}$       B.  $\frac{4}{7}$       C.  $\frac{1}{8}$       D.  $-\frac{1}{8}$

9. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，则  $a \cos B = b \cos A$  是  $\triangle ABC$  为等腰三角形的 ( )

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

10.已知 $\triangle ABC$ 中, $D$ 是 $BC$ 边上的点, $AD$ 平分 $\angle BAC$ ,且 $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的2倍。若

$AD=1, DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,则 $AC$ 的长为

A.  $\frac{1}{2}$

B. 2

C.  $\sqrt{2}$

D.  $\sqrt{3}$

二、填空题共5小题,每小题4分,共20分。

11.已知复数 $z=1+i$ ,则 $z^2+z\cdot\bar{z}=\underline{\hspace{2cm}}$

12.能说明“在 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin 2A=\sin 2B$ ,则 $A=B$ ”为假命题的一组 $A,B$ 的值为\_\_\_\_\_

13.已知矩形 $ABCD$ 中, $AB=2,AD=4,E$ 为 $BC$ 边的中点, $F$ 为 $CD$ 边上的动点(可以与端点重合),则

$\vec{AE}\cdot\vec{ED}=\underline{\hspace{2cm}}$ , $\vec{AF}\cdot\vec{AE}$ 的最大值为\_\_\_\_\_

14.函数 $f(x)=\cos 2x+\cos x$ 的最小值为\_\_\_\_\_

15.若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$ ,且 $C$ 为钝角,则 $B=\underline{\hspace{1cm}}$ ;  $\frac{a}{c}$ 的取值范围为

三、解答题共4小题,共40分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题10分) 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ,且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$

(1) 求 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值

(2) 求 $\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ 的值

17. (本小题10分) 已知函数 $f(x)=\cos x(2\sqrt{3}x+\cos x)-\sin^2 x$

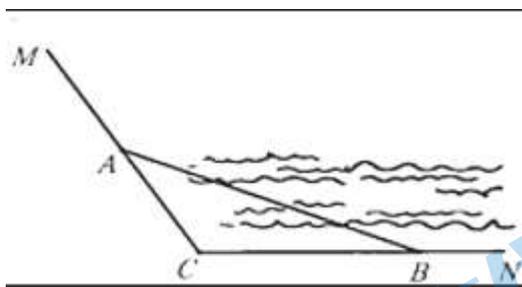
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间和最小正周期

(2) 若当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,关于 $x$ 的不等式 $f(x)\geq m$ 恒成立,求实数 $m$ 的取值范围。

18. (本小题 10 分) 如图,  $CM, CN$  为某公园景观湖畔的两条木栈道,  $\angle MCN = 120^\circ$ , 现拟在两条木栈道的  $A, B$  处设置观景台, 设  $BC = a, AC = b, AB = c$  (单位: 百米)

(1) 若  $b - a = c - b = 4$ , 求  $b$  的值

(2) 已知  $AB = 12$ , 记  $\angle ABC = \theta$ , 试用  $\theta$  表示路线  $A - C - B$  的长, 并观察  $A - C - B$  长的最大值。



19. (本小题 10 分) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 设  $\triangle ABC$  的面积为  $S_{\triangle ABC}$ , 已知  $c = \sqrt{7}$ , 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知, 求  $a$  与  $\sin C$  的值。

条件①:  $b = 3$ ; 条件②:  $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ; 条件③:  $\cos B = \frac{\sqrt{7}}{14}$

注: 如果选择不同条件分别解答, 按第一个解答计分。