2022届高三年级江西智学联盟体第一次联考
理科数学

试卷满分:150 分　考试时长:120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid \ln x<1\}$,$B=\{x\mid y=\sqrt{2-x}\}$,则 $A\cap B=$

A. $(0,e)$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(0,2]$　　D. $(-\infty,e)$

2. 复数 $z_1=3-4i$,$z_2=\cos 2x-i\sin 2x$,则 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 白马寨是丰城市闻名遐迩的江西省历史文化名村,始建于南宋咸淳九年(即公元 1273 年),是有名的江南望族. 村子建筑布局讲究风水,全村六十四条巷道依据八卦图的演变程序而精心设计,没有一条直巷,隐含八卦图中六十四卦象,又为"聚财"之意. 白马寨至今完好地保存着 125 幢明清古建筑,成为吸引四方游客的一个旅游景区. 我校高一年级周末准备用系统抽样的方法从 1200 名学生中抽取 40 人前往景区开展研学活动,现将 1200 名学生随机地从 1~1200 编号,按编号顺序平均分成 40 组(1~30 号,31~60 号,…,1171~1200 号),若第 4 组与第 6 组抽出的号码之和为 274,则第 10 组抽到的号码是

A. 272　　B. 274　　C. 287　　D. 296

4. 已知函数 $f(x-1)$的图像关于直线 $x=1$ 对称,且在$[1,+\infty)$上单调递减,若 $a=f(e^{\sqrt{2}})$,$b=f(\ln \pi)$,$c=f(\sin 4)$,则 a、b、c 的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

5. 牛顿冷却定律描述一个物体在常温环境下的温度变化:如果物体的初始温度为 T_0,则经过一定时间 t 后的温度 T 将满足 $T-T_a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}(T_0-T_a)$,其中 T_a 是环境温度,h 称为半衰期. 现有一杯 85 ℃的热茶,放置在 25 ℃的房间中,如果热茶降温到 55 ℃,需要 10 分钟,则欲降温到 35 ℃,大约需要(　　)分钟. (参考数据 $\lg 2\approx 0.3010$,$\lg 3\approx 0.4771$)

A. 16 分钟　　B. 20 分钟　　C. 24 分钟　　D. 26 分钟

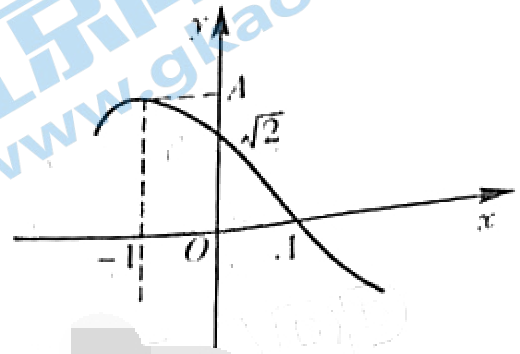
6. 函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，关于 $f(x)$ 有以下说法：

① $f(x)$ 的单调递减区间是 $[4k-1,4k+3],k\in \mathbf{Z}$；

② $f\left(\frac{13}{3}\right)=-\sqrt{3}$；

③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称；

④ $f(x)$ 的图象向右平移 $4k+1(k\in \mathbf{N})$ 个单位长度后得到的图像对应的函数为偶函数. 其中所有正确的说法个数为



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

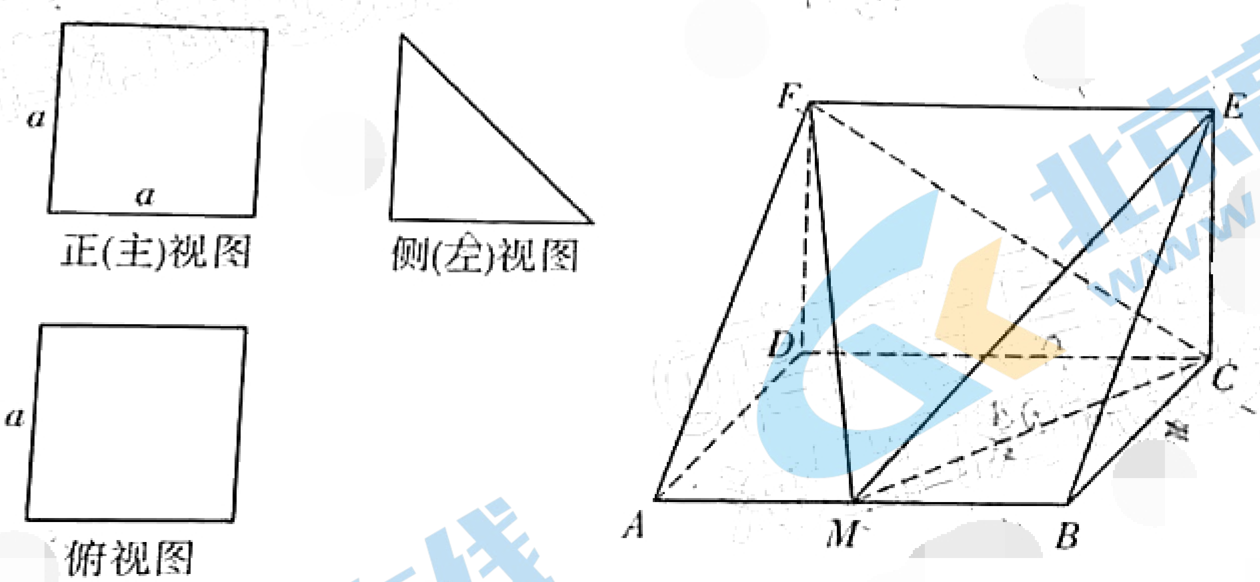
7. 已知 a 是 $7^n+C_n^1 7^{n-1}+C_n^2 7^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}7$（$n$ 为正奇数）被 9 除的余数，则 $\int_1^e\left(x+\frac{a}{x}\right)dx$ 的值为

A. $\frac{e^2+13}{2}$　　B. $\frac{e^2-13}{2}$　　C. $\frac{e^2+5}{2}$　　D. $\frac{e^2-5}{2}$

8. 若随机变量 $\xi\sim N(2,2021^2)$，且 $P(\xi\leqslant 1)=P(\xi\geqslant a)$. 点 M 在椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 上，C_1 的左焦点为 F，Q 为曲线 $C_2:x^2+y^2-4\sqrt{2}x+20y+107=0$ 上的动点，则 $|MQ|-|MF|$ 的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

9. 一个多面体的三视图和直观图如图所示，M 是 AB 的中点，一只小蜜蜂在几何体 $ADF-BCE$ 的外接球内自由飞翔，则它飞入四面体 $FMCE$ 内的概率为



A. $\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{27\pi}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{9\pi}$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-2,-6)$，$N(6,0)$，动点 M 满足 $|MN|=2|MO|$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN}$ 的取值范围是

A. $[1,81]$　　B. $[-24,56]$　　C. $[-24,81]$　　D. $[1,56]$

11. 已知 E、F、O 分别是正方形 $ABCD$ 边 BC、AD 及对角线 AC 的中点，将三角形 ACD 沿着 AC 进行翻折构成三棱锥，则在翻折过程中，直线 EF 与平面 BOD 所成角的余弦值的取值范围为

A. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

12. 已知命题 p：$f(x)=\ln x-x^2+ax$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减；命题 q：$x\geqslant e$ 时，$3x^4\ln x\geqslant(a-x)e^{\frac{x}{e}-1}$ 恒成立，若 $\neg p\wedge q$ 为真命题，则实数 a 的取值范围是

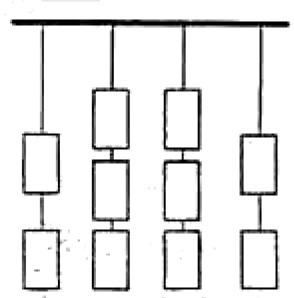
A. $(1,3e]$　　B. $[1,3e]$　　C. $[1,4e]$　　D. $(1,4e]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 已知 $P(-1,3)$ 为角 α 终边上的一点，则 $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+\cos\alpha}=$________.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=3$，$S_{10}=12$，则 $S_{20}=$________.

15. 某公司在元宵节组织了一次猜灯谜活动，主持人事先将 10 条不同灯谜分别装在了如图所示的 10 个灯笼中，猜灯谜的职员每次只能任选每列最下面的一个灯笼中的谜语来猜(无论猜中与否，选中的灯笼就拿掉)，则这 10 条灯谜依次被选中的所有不同顺序方法数为________.（用数字作答）



16. 已知双曲线 C：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的上、下焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线交双曲线上支于 A、B 两点，且满足 $\overrightarrow{BF_1}=4\overrightarrow{F_1A}$，$|AF_2|=|AB|$，则双曲线的离心率为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3}\sin x,\cos x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,-\cos x)$，令 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}$.

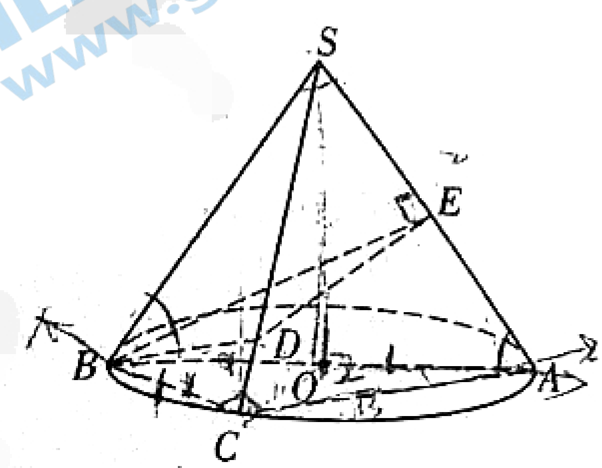
(1)若方程 $f(x)=-\frac{3}{5}$ 在 $(0,\pi)$ 上的解为 x_1，x_2，求 $\sin(x_1+x_2)$ 的值；

(2)在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 $b=3$，$f(A)=\frac{1}{2}$，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

18.(12分)如图,已知 AB 为圆锥 SO 底面的直径,点 C 在圆锥底面的圆周上,$SB=AB=2$,$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$,BE 平分$\angle SBA$,D 是 SC 上一点,且平面 $DBE\perp$平面 SAB

(1)求证:$SA\perp BD$;

(2)求二面角 $E-BD-C$ 的平面角的余弦值.



19.(12分)某工厂的质检部门对拟购买的一批原料进行抽样检验,以判定是接收还是拒收这批原料.现有如下两种抽样检验方案:

方案一:随机抽取一个容量为12的样本,并全部检验,若样本中不合格品数不超过1个,则认为该批原料合格,予以接收.

方案二:先随机抽取一个容量为6的样本,全部检验,若都合格,则予以接收,若样本中不合格品数超过1个,则拒收;若样本中不合格品数为1个,则再抽取一个容量为6的样本,并全部检验,且只有第二批抽样全部合格,才予以接收.

假设拟购进的这批原料,合格率为 $p(0<p<1)$,并用 p 作为原料中每件产品是合格品的概率,若每件产品所需的检验费用为10元,且费用由工厂承担.

(1)若 $p=\frac{2}{3}$,问用第二种检验方案平均所需的检验费用比第一种可节省多少元(精确到0.01)?

(2)分别计算两种方案中,这批原料通过检验的概率.如果你是原料供应商,你希望该工厂的质检部门采取哪种抽样检验方案,并说明理由.

20.（12 分）过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 $\theta\left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$ 的直线，交抛物线于 A、B 两点，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，以 FA 为直径的圆与 y 轴相切于点 $T(0,\sqrt{3})$，

（1）求抛物线的方程；

（2）试问在 x 轴上是否存在异于 F 点的定点 P，使得 $|FA|\cdot|PB|=|FB|\cdot|PA|$ 成立？若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=ae^{2x}-2(ax+1)e^x$，$g(x)=x^2+2x$.

（1）当 $a<0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $0<a\leqslant 2$ 时，证明：函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像上恰有两对关于 x 轴对称的点.（参考数据：$\ln 2\approx 0.6931$）

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.【选修4—4:坐标系与参数方程】(10分)

在直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-4t\end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=6\sin\theta+8\cos\theta$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程与直线 l 的普通方程;

(2)直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,点 $P(4,-3)$,求 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$.

23.【选修4—5:不等式选讲】(10分)

设函数 $f(x)=|2x-m|+|2x+2|$.

(1)当 $m=-1$ 时,求不等式 $f(x)>9$ 的解集;

(2)若 $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$f(x_0)<|2m-3|$,求 m 的取值范围.

2022届高三年级江西智学联盟体第一次联考
理科数学参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	D	C	A	B	D	B	A	D

二、填空题：本题共4小题，每小题5分。

13. $\frac{5}{8}$　14. 120　15. 25200　16. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17. 解：(1)由已知，$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x+\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$， ……………………… 1分

由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$， ……………………… 2分

可得 $f(x)$ 对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. ……………………… 3分

又 $f(x)=-\frac{3}{5}<-\frac{1}{2}$，且 $x_1, x_2\in(0,\pi)$，$\therefore x_1+x_2=\frac{5\pi}{3}$， ……………………… 4分

$\therefore \sin(x_1+x_2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………… 5分

(2)由 $f(A)=\frac{1}{2}$，可得 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$. ……………………… 6分

由正弦定理及 $b=3$，$\therefore a=\frac{3}{2\sin B}$，$c=\frac{3\sin C}{\sin B}$，$B+C=\frac{5\pi}{6}$， ……………………… 7分

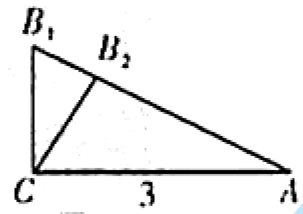
$\therefore a+c=\frac{3}{2\sin B}+\frac{3\sin\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)}{\sin B}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos B+1}{\sin B}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2\tan\frac{B}{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$， …………… 9分

又∵$\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore \frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$　$\therefore \frac{\pi}{6}<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{4}$， ……………………… 10分

$\therefore \frac{3}{2}<\frac{3}{2\tan\frac{B}{2}}<\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)<a+c<3\sqrt{3}$，

故所求三角形周长的取值范围为 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}, 3\sqrt{3}+3\right)$. ……………………… 12分

(2)另解：如下图，过点 C 作 $CB_2 \perp AB_2$，垂足为 B_2，



此时周长的值最小，为 $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+3=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}$． ……………………… 8 分

过点 C 作 $CB_1 \perp AC$，交 $\angle A$ 另一边于点 B_1，

此时周长的值最大，为 $\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3=3\sqrt{3}+3$． ……………………… 11 分

$\therefore$ 三角形周长的取值范围为 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}, 3\sqrt{3}+3\right)$． ……………………… 12 分

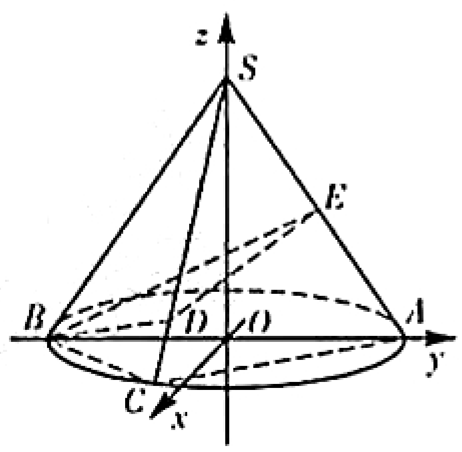
18. 解：(1)证明：因为 $\triangle SAB$ 是等边三角形，BE 平分 $\angle SBA$，$\therefore SA \perp BE$． ……………… 1 分

又因为平面 $DBE \perp$ 平面 SAB，且交线为 BE，所以 $SA \perp$ 平面 BDE， ……………… 3 分

而 $BD \subset$ 平面 BDE，所以 $SA \perp BD$． ……………………… 5 分

(2)解：如图所示，建立空间直角坐标系，则相关点的坐标为：

$S(0,0,\sqrt{3})$，$A(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$， ……………………… 7 分



由(1)，$SA \perp$ 平面 BDE，

所以 $\overrightarrow{SA}=(0,1,-\sqrt{3})$ 为平面 BDE 的一个法向量， ……………………… 8 分

设平面 SBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

而 $\overrightarrow{SB}=(0,-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$， ……………………… 9 分

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，取 $z=1$，可以解得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$，

设两个法向量所成的角为 θ，

$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{SA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$， ……………………… 11 分

由图易知二面角 $E-BD-C$ 为钝二面角，

故所求二面角的平面角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$． ……………………… 12 分

19. 解：(1)第一种检验方案的检验费用为 $12\times10=120$ 元， ……………………… 1 分

设方案二中所需的检验费用为随机变量 X，则 X 的可能取值为 60，120． ……………… 2 分

$P(X=120)=C_6^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{64}{243}$，$P(X=60)=1-\frac{64}{243}=\frac{179}{243}$，

故 X 的分布列为

X	60	120
P	$\frac{179}{243}$	$\frac{64}{243}$

……………………… 4 分

第二种检验方案的平均检验费用为 $EX=\frac{179}{243}\times 60+\frac{64}{243}\times 120=\frac{18420}{243}\approx 75.802$

因此用第二种检验方案平均所需的检验费用可节省 $120-75.802\approx 44.20$ 元. ……… 6 分

(2)方案一通过检验的概率为 $P_1=p^{12}+C_{12}^1(1-p)p^{11}=p^{11}(12-11p)$, …………… 7 分

方案二通过检验的概率为

$P_2=p^6+C_6^1(1-p)p^5\cdot p^6=p^6[1+6p^5(1-p)]$, ……………………… 8 分

$P_1-P_2=p^6[p^5(12-11p)-1-6p^5(1-p)]$,其中 $0<p<1$. ……………………… 9 分

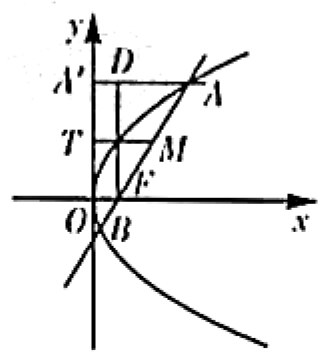
令 $f(p)=p^5(12-11p)-1-6p^5(1-p)=-5p^6+6p^5-1$,其中 $0<p<1$.

$f'(p)=-30p^5+30p^4=-30p^4(p-1)>0$,故 $f(p)$ 在 $p\in(0,1)$ 上单调递增, …… 10 分

$\therefore f(p)<f(1)=0$,即 $P_1<P_2$.

故原料供应商希望该工厂的质检部门采取第二种抽样检验方案,因为原料通过检验的概率更大. ……………………… 12 分

20. 解:(1)由已知,A 在第一象限,设 AF 中点为 M,则 T 为 M 在 y 轴上的射影,过 A 作 y 轴的垂线,垂足为 A',过 F 作 AA' 的垂线,垂足为 D,如图所示.



由已知,$\angle FAD=\frac{\pi}{3}$,$|FD|=2\sqrt{3}$,所以 $|AF|=4$,$|AD|=2$, ……………………… 2 分

根据抛物线定义,有 $|AF|=|AA'|+\frac{p}{2}$,即 $4=\frac{p}{2}+2+\frac{p}{2}$,解得 $p=2$. ……………… 3 分

故所求抛物线方程为 $y^2=4x$. ……………………… 4 分

(2)假设存在定点 $P(t,0)$,使 $|FA|\cdot|PB|=|FB|\cdot|PA|$ 成立,即 $\frac{|FA|}{|FB|}=\frac{|PA|}{|PB|}$ 成立,

根据三角形角平分线性质,易知,PF 应为 $\angle APB$ 的平分线,

由对称性,应有 $k_{PA}+k_{PB}=0$ 成立. ……………………… 6 分

因为 AB 过焦点 $F(1,0)$,故可设直线 AB 的方程为 $x=my+1$,$m\neq 0$,

且 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$,得 $y^2-4my-4=0$,显然 $\Delta>0$,$y_1+y_2=4m$,$y_1\cdot y_2=-4$, ………… 8 分

$\therefore k_{PA}+k_{PB}=\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=\dfrac{y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)}{(x_1-t)(x_2-t)}=\dfrac{y_1\left(\frac{y_2^2}{4}-t\right)+y_2\left(\frac{y_1^2}{4}-t\right)}{x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2}$

$=\dfrac{\frac{y_1y_2^2}{4}-y_1t+\frac{y_2y_1^2}{4}-y_2t}{x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2}=\dfrac{\frac{y_1y_2}{4}(y_1+y_2)-t(y_1+y_2)}{x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2}$， …………………… 9 分

由 $k_{PA}+k_{PB}=0$，可得 $\frac{y_1y_2}{4}(y_1+y_2)-t(y_1+y_2)=0$，即 $y_1+y_2=0$ 或 $\frac{y_1y_2}{4}=t$。

而 $m\neq0$，$\therefore y_1+y_2=0$ 不成立。 …………………… 10 分

$\therefore$ 由 $\frac{y_1y_2}{4}=t$ 可得 $t=-1$，

即存在定点 $P(-1,0)$ 满足条件。 …………………… 12 分

21. 解：(1) $f'(x)=2ae^{2x}-2ae^x-2(ax+1)e^x=2e^x(ae^x-a-ax-1)$ …………………… 1 分

令 $h(x)=ae^x-a-ax-1$，$h'(x)=ae^x-a=a(e^x-1)$，由 $h'(x)=0$，解得 $x=0$， … 2 分

当 $a<0$ 时，$x\in(-\infty,0)$，$h'(x)>0$，$x\in(0,+\infty)$，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)\leqslant h(0)=-1<0$， …………………… 3 分

$\therefore a<0$ 时恒有 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 R 上单调递减。 …………………… 4 分

(2) 令 $F(x)=f(x)+g(x)$，问题转化为证明 $F(x)=0$ 恰有两个零点， …………………… 5 分

$F'(x)=2(ae^x-1)(e^x-x-1)$，$\because 0<a<2$ 令 $F'(x)=0$ 解得：$x=\ln\frac{1}{a}$

所以当 $x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增；

所以 $F(x)_{\min}=F\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln^2\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$， …………………… 6 分

令 $t=\frac{1}{a}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，不妨记 $G(t)=F\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln^2t-t$ 则 $G'(t)=\dfrac{2\ln t-t}{t}$，

记 $\varphi(t)=2\ln t-t$，则 $\varphi'(t)=\frac{2}{t}-1$，

所以当 $t\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单调递增；

当 $t\in(2,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减；

则 $\varphi(t)\leqslant\varphi(2)=2\ln2-2<0$， …………………… 7 分

所以 $G'(t)=\dfrac{2\ln t-t}{t}<0$，因此 $G(t)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

$G(t)=F\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln^2t-t\leqslant\ln^2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\ln^2 2-\frac{1}{2}<0$. …………………… 8 分

①当 $x<\ln\frac{1}{a}$ 时，$F(x)=ae^{2x}-2(ax+1)e^x+x^2+2x$，

一方面，令 $x<-2$，则 $x^2+2x>0$，

另一方面，令 $ae^{2x}-2(ax+1)e^x>0$，即 $e^x-2(x+\frac{1}{a})>0$，

而 $e^x-2\left(x+\frac{1}{a}\right)>x+1-2\left(x+\frac{1}{a}\right)$，令 $x+1-2\left(x+\frac{1}{a}\right)>0$，解得 $x<1-\frac{2}{a}$，

取 $x_0=\min\left\{1-\frac{2}{a},-\ln a,-2\right\}=\min\left\{1-\frac{2}{a},-2\right\}$，当 $x<x_0$ 时，$F(x)>0$，

$\therefore F(x)$在区间$\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$有且仅有一个零点. ······················ 10 分

②当 $x>\ln\frac{1}{a}$时，$F(x)=ae^{2x}-2(ax+1)e^x+x^2+2x$，

一方面，令 $x>0$，则 $x^2+2x>0$，

另一方面，令 $ae^{2x}-2(ax+1)e^x>0$，即 $e^x-2\left(x+\frac{1}{a}\right)>0$，

$\because e^x\geqslant ex$ $\therefore e^x-2\left(x+\frac{1}{a}\right)\geqslant(e-2)x-\frac{2}{a}$ ，令$(e-2)x-\frac{2}{a}>0$，解得 $x>\frac{2}{a(e-2)}$，

取 $x_0=\max\left\{\frac{2}{a(e-2)},-\ln a,0\right\}=\max\left\{\frac{2}{a(e-2)},-\ln a\right\}$，当 $x>x_0$ 时，$F(x)>0$，

$\therefore F(x)$在区间$\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$有且仅有一个零点. ······················ 11 分

综上所述：$0<a\leqslant2$ 时，$F(x)$有且仅有两个零点，即函数 $f(x)$与 $g(x)$的图像上恰有两对关于 x 轴对称的点. ······················ 12 分

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. 解：(1)由 $\rho=6\sin\theta+8\cos\theta$，得 $x^2+y^2=6y+8x$，即$(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

即曲线 C 的直角坐标方程为$(x-4)^2+(y-3)^2=25$，

由直线 l 的参数方程消去参数 t，可得普通方程为 $4x+3y-7=0$. ······················ 4 分

(2)易知点 $P(4,-3)$在直线 l 上，则直线 l 的参数方程可化为$\begin{cases}x=4+\frac{3}{5}t'\\y=-3+\frac{4}{5}t'\end{cases}$($t'$为参数)，

······················ 6 分

将其代入曲线 C 的直角坐标方程可得：$\frac{9t'^2}{25}+\left(\frac{4}{5}t'-6\right)^2=25$，即 $t'^2-\frac{48}{5}t'+11=0$，

所以 $t_1'+t_2'=\frac{48}{5}$，$t_1't_2'=11$， ······················ 8 分

由于 $P(4,-3)$在圆 C 外，

所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1'|}+\frac{1}{|t_2'|}=\frac{|t_1'|+|t_2'|}{|t_1't_2'|}=\frac{|t_1'+t_2'|}{|t_1't_2'|}=\frac{48}{55}$. ······················ 10 分

23. 解：(1)当 $m=-1$ 时，$f(x)=|2x+1|+|2x+2|=\begin{cases}4x+3,x>-\frac{1}{2}\\1,-1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}\\-4x-3,x<-1\end{cases}$，

当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，由 $f(x)>9$ 得 $x>\frac{3}{2}$，故 $x>\frac{3}{2}$；

当 $x<-1$ 时，由 $f(x)>9$ 得 $x<-3$，故 $x<-3$；

即不等式 $f(x)>9$ 的解集为：$(-\infty,-3)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$； …………………… 4 分

(2) $f(x)=|2x-m|+|2x+2|\geq|(2x+2)-(2x-m)|=|m+2|$，

$\therefore |m+2|<|2m-3|$，则 $m^2+4m+4<4m^2-12m+9$，

解得 $m>5$ 或 $m<\frac{1}{3}$，故 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(5,+\infty)$． …………………… 10 分