2018 北京师大附中高二（下）期末

数　　学（理）　　2018.07

说明：本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

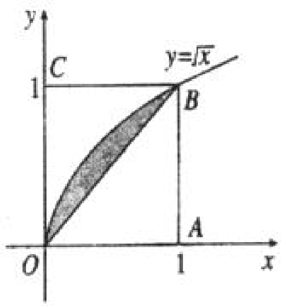
1. 设复数 z 满足 $(1+i)z=i$，则 $|z|=$（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知某条曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=3t^2+2, \\ y=t^2-1 \end{cases}(0\le t\le 5)$，则该曲线是（　）

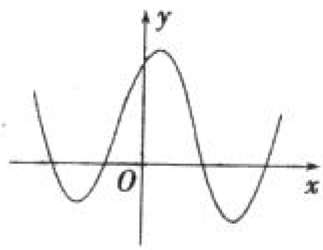
A. 圆弧线段　　B. 线段　　C. 双曲线的一支　　D. 射线

3. 如图所示，在边长为 1 的正方形 OABC 中任取一点 P，则点 P 恰好取自阴影部分的概率为（　）



A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

4. 函数 $f(x)$ 的定义域为 R，导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$（　）



A. 无极大值点，有四个极小值点　　B. 有三个极大值点、两个极小值点

C. 有两个极大值点、两个极小值点　　D. 有四个极大值点、无极小值点

5. 一个盒子里有 3 个分别标有号码为 1,2,3 的小球，每次取出一个，记下它的标号后再放回盒子中，共取 3 次，则取得小球标号最大值是 3 的取法有（　　）

A. 12 种　　B. 15 种　　C. 17 种　　D. 19 种

6. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i=1)=p_i$，$P(\xi_i=0)=1-p_i$，$i=1,2$. 若 $0<p_1<p_2<\frac{1}{2}$，则（　　）

A. $E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$　　B. $E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$

C. $E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$　　D. $E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$

7. 在下列命题中，

①从分别标有 1，2，……，9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次，每次抽取 1 张，则抽到的 2 张卡片上的数奇偶性不同的概率是 $\frac{5}{18}$；

② $(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{x})^4$ 的展开式中的常数项为 2；

③设随机变量 $\xi\sim N(0,1)$，若 $P(\xi\geq 1)=p$，则 $P(-1<\xi<0)=\frac{1}{2}-p$.

其中所有正确命题的序号是　　（　　）

A. ②　　B. ①③

C. ②③　　D. ①②③

8. 已知函数 $f(x)=e^{2x-3}$，$g(x)=\frac{1}{4}+\ln\frac{x}{2}$，若 $f(m)=g(n)$ 成立，则 $n-m$ 的最小值为（　　）

A. $2\ln 2$　　B. $\ln 2$　　C. $\frac{1}{2}+2\ln 2$　　D. $\frac{1}{2}+\ln 2$

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9. 在极坐标系中，曲线 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$ 和 $\rho\cos\theta=1$ 相交于点 A，B，则线段 AB 的中点 E 到极点的距离是______.

10. 用 5,6,7,8,9 组成没有重复数字的五位数，其中两个偶数数字之间恰有一个奇数数字的五位数的个数是_______.（用数字作答）

11. 若 $(1-2x)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2018}x^{2018}$，$x\in R$，则 a_0=__________；

$(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+\cdots+(a_0+a_{2018})=$__________.（用数字作答）

12. 甲、乙两位同学进行篮球三分球投篮比赛，甲每次投中的概率为 $\dfrac{1}{3}$，乙每次投中的概率为 $\dfrac{1}{2}$，每人分别进行三次投篮. 乙恰好比甲多投进 2 次的概率是__________.

13. 定义方程 $f(x)=f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“新驻点”，如果函数 $g(x)=x$，$h(x)=\ln(x+1)$，$\varphi(x)=\cos x(x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right))$ 的“新驻点”分别为 α，β，γ，那么 α，β，γ 的大小关系是__________.

14. 函数 $y=f(x)$ 图象上不同两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 处的切线的斜率分别是 k_A,k_B，规定 $\varphi(A,B)=\dfrac{|k_A-k_B|}{|AB|}$（$|AB|$ 为 A 与 B 之间的距离）叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”.

若函数 $y=x^2$ 图象上两点 A 与 B 的横坐标分别为 0, 1，则 $\varphi(A,B)$=__________；

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 为曲线 $y=e^x$ 上两点，且 $x_1-x_2=1$，若 $m\cdot\varphi(A,B)<1$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是__________.

三、解答题（共 80 分，请写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

15. 某单位共有员工 45 人，其中男员工 27 人，女员工 18 人. 上级部门为了对该单位员工的工作业绩进行评估，采用按性别分层抽样的方法抽取 5 名员工进行考核.

（I）求抽取的 5 人中男、女员工的人数分别是多少；

（II）考核前，评估小组从抽取的 5 名员工中，随机选出 3 人进行访谈. 求选出的 3 人中有 1 位男员工的概率；

（III）考核分笔试和答辩两项. 5 名员工的笔试成绩分别为 78，85, 89，92, 96；结合答辩情况，他们的考核成绩分别为 95, 88, 102, 106, 99. 这 5 名员工笔试成绩与考核成绩的方差分别记为 s_1^2,s_2^2，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小.（只需写出结论）

16. 长时间用手机上网严重影响着学生的健康，某校为了解 A，B 两班学生手机上网的时长，分别从这两个班中随机抽取 6 名同学进行调查，将他们平均每周手机上网时长作为样本数据，绘制成茎叶图如图所示（图中的茎表示十位数字，叶表示个位数字）. 如果学生平均每周手机上网的时长大于 21 小时，则称为“过度用网”.

（I）请根据样本数据，分别估计 A，B 两班的学生平均每周上网时长的平均值；

（II）从 A 班的样本数据中有放回地抽取 2 个数据，求恰有 1 个数据为“过度用网”的概率；

（III）从 A 班、B 班的样本中各随机抽取 2 名学生的数据，记“过度用网”的学生人数为ξ，写出ξ的分布列和数学期望 Eξ.

A 班		B 班
9	0	
3 1	1	1 2
4 0	2	1 5 7
7	3	6

17. （13 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x(a\in R)$.

（I）若 $a=0$，求曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

18. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-ax$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行.

（I）求实数 a 的值；

（II）设 $b>1$，求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{b},b]$ 上的最大值和最小值.

19. （14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，F 为右焦点，圆 O：$x^2+y^2=1$，P 为椭圆 C 上一点，且 P 位于第一象限，过点 P 作 PT 与圆 O 相切于点 T，使得点 F，T 在 OP 的两侧.

（I）求椭圆 C 的焦距及离心率.

（II）求四边形 OFPT 面积的最大值.

20. 已知集合 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$，集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$ 是集合 S 的一个含有 8 个元素的子集.

（I）当 $X=\{1,2,5,7,11,13,16,17\}$ 时，设 $x_i,x_j\in X(1\le i,j\le 8)$，

（i）写出方程 $x_i-x_j=3$ 的解（x_i,x_j）；

（ii）若方程 $x_i-x_j=k(k>0)$ 至少有三组不同的解，写出 k 的所有可能取值；

（II）证明：对任意一个 X，存在正整数 k，使得方程 $x_i - x_j = k\ (1 \le i, j \le 8)$ 至少有三组不同的解.

2018 北京师大附中高二（下）期末数学（理）参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	B	C	D	A	C	D

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9．2；　　10．36；　　11．1；2018；

12．$\frac{1}{6}$；　　13．$\gamma>\alpha>\beta$；　　14．$\sqrt{2},(-\infty,1]$；

三、解答题（共 80 分，请写在必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

15．解：（I）抽取的 5 人中男员工的人数为$\frac{5}{45}\times 27=3$，

女员工的人数为$\frac{5}{45}\times 18=2$．

（II）由（I）可知，抽取的 5 名员工中，有男员工 3 人，女员工 2 人．

所以，根据题意，$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

所以，选出的 3 人中有 1 为男员工的概率是$\frac{3}{10}$．

（III）$s_1^2=s_2^2$

16．解：（I）A 班样本数据的平均值为$\frac{1}{6}(9+11+13+20+24+37)=19$，

由此估计 A 班学生每周平均上网时间 19 小时；

B 班样本数据的平均值为$\frac{1}{6}(11+12+21+25+27+36)=22$，

由此估计 B 班学生每周平均上网时间 22 小时．

（II）因为从 A 班的 6 个样本数据中随机抽取 1 个的数据，为“过度用网”的概率是$\frac{1}{3}$，

所以从 A 班的样本数据中有放回的抽取 2 个的数据，恰有 1 个数据为“过度用网”的概率为 $P=C_2^1(\frac{1}{3})\times(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}$.

（III）ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4.

$$P(\xi=0)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_6^2C_6^2}=\frac{2}{25},$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_2^1C_3^2+C_4^2C_3^1C_3^1}{C_6^2C_6^2}=\frac{26}{75},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^2C_3^2+C_4^2C_3^2+C_4^1C_2^1C_3^1C_3^1}{C_6^2C_6^2}=\frac{31}{75},$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_2^2C_3^1C_3^1+C_4^1C_2^1C_3^2}{C_6^2C_6^2}=\frac{11}{75},$$

$$P(\xi=4)=\frac{C_2^2C_3^2}{C_6^2C_6^2}=\frac{1}{75}.$$

ξ 的分布列是：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{26}{75}$	$\frac{31}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{1}{75}$

$$E\xi=0\times\frac{2}{25}+1\times\frac{26}{75}+2\times\frac{31}{75}+3\times\frac{11}{75}+4\times\frac{1}{75}=\frac{5}{3}.$$

17. 解：（I）若 $a=0$，$f(x)=-x+\ln x$，导函数为 $f'(x)=-1+\frac{1}{x}$.

依题意，有 $f(1)=-1, f'(1)=0$，

则切线方程为 $y+1=0(x-1)$，

即 $y+1=0$.

（II）$f'(x)=ax-(a+1)+\frac{1}{x}=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}$，

$f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}(x>0)$

当 $a\le 0$ 时，$(ax-1)<0$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，则函数 $f(x)$ 的增区间是（0, 1），减区间是 $(1,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-1)}{x}=0$，得 $x_1=1,x_2=\dfrac{1}{a}$，再讨论两根的大小关系；

当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}<1$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 或者 $x>1$，则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(1,+\infty)$，减区间是 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$；

当 $a=1$ 时，$\dfrac{1}{a}=1$，则函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,+\infty)$，没有减区间；

当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>1$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或者 $x>\dfrac{1}{a}$，则函数 $f(x)$ 的增区间是（0, 1）和 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，减区间是 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$；

综上，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间是（0, 1），减区间是 $(1,+\infty)$；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(1,+\infty)$，减区间是 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 增区间是 $(0,+\infty)$，没有减区间；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的增区间是（0, 1）和 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，减区间是 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$；

18. 解：

（I） $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$，

所以 $f'(1)=1-a$.

依题意，有 $f'(1)=0$，

即 $1-a=0$，

解得 $a=1$.

（II）由（I）得 $f'(x)=\dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时，$1-x^2>0$，$-\ln x>0$，

所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$1-x^2<0$，$-\ln x<0$，

所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间（0, 1）上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $0<\dfrac{1}{b}<1<b$，

所以 $f(x)$ 最大值为 $f(1)=-1$.

设 $h(b)=f(b)-f(\dfrac{1}{b})=(b+\dfrac{1}{b})\ln b-b+\dfrac{1}{b}$，其中 $b>1$.

则 $h'(b)=(1-\dfrac{1}{b^2})\ln b>0$，

故 $h(b)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

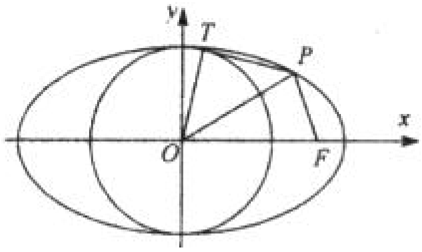
所以 $h(b)>h(1)=0$，即 $f(b)>f(\dfrac{1}{b})$，

故 $f(x)$ 最小值为 $f(\dfrac{1}{b})=-b\ln b-\dfrac{1}{b}$.

19. 解：（1）在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，$a=2,b=1$，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

故椭圆 C 的焦距为 $2c=2\sqrt{3}$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



（2）设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，

则 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，故 $y_0^{\ 2}=1-\frac{x_0^{\ 2}}{4}$.

所以 $|TP|^2=|OP|^2-|OT|^2=x_0^2+y_0^2-1=\frac{3}{4}x_0^2$，所以 $|TP|=\frac{\sqrt{3}}{2}x_0$，

$S_{\Delta OTP}=\frac{1}{2}|OT|\cdot|TP|=\frac{\sqrt{3}}{4}x_0$.

又 $O(0,0)$，$F(\sqrt{3},0)$，故 $S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}|OF|\cdot y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}y_0$.

因此 $S_{四边形OFPT}=S_{\triangle OFP}+S_{\triangle OTP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{x_0}{2}+y_0)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{x_0^{\ 2}}{4}+x_0y_0+y_0^{\ 2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}$.

由 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，得 $2\sqrt{\frac{x_0^{\ 2}}{4}\cdot y_0^{\ 2}}\le 1$，即 $x_0\cdot y_0\le 1$，

所以 $S_{四边形OFPT}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}\le\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}=y_0^{\ 2}=\frac{1}{2}$，即 $x_0=\sqrt{2}$，$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

20. 解：（I）（i）方程 $x_i-x_j=3$ 的解有：$(x_i,x_j)=(5,2),(16,13)$.

（II）以下规定两数的差均为正，则：

列出集合 X 的从小到大 8 个数中相邻两数的差：1, 3, 2， 4, 2, 3, 1；

中间隔一数的两数差（即上一列差数中相邻两数和）：4， 5, 6, 6, 5, 4；

中间相隔二数的两数差：6, 9, 8, 9, 6；

中间相隔三数的两数差：10, 11, 11, 10；

中间相隔四数的两数差：12, 14, 12；

中间相隔五数的两数差：15, 15；

中间相隔六数的两数差：16.

这 28 个差数中，只有 4 出现 3 次、6 出现 4 次，其余都不超过 2 次，

所以 k 的可能取值有 4, 6.

（II）证明：不妨设$1\le x_1<x_2<\cdots<x_8\le 17$，记$a_i=x_{i+1}-x_i(i=1,2,\cdots,7)$，

$b_i=x_{i+2}-x_i(i=1,2,\cdots,6)$，共 13 个差数. 假设不存在满足条件的 k，则这 13 个数中至多两个 1、两个 2、两个 3、两个 4、两个 5、两个 6，从而

$(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(b_1+b_2+\cdots+b_6)\ge 2(1+2+\cdots+6)+7=49$. ………………①

又$(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(b_1+b_2+\cdots+b_6)=(x_8-x_1)+(x_8+x_7-x_2-x_1)$

$=2(x_8-x_1)+(x_7-x_2)\le 2\times 16+14=46$，这与①矛盾！

所以结论成立.