秘密★启用前

2023届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（二）
理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid \log_2 x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1<x<5\}$，则图1中阴影部分表示的集合为

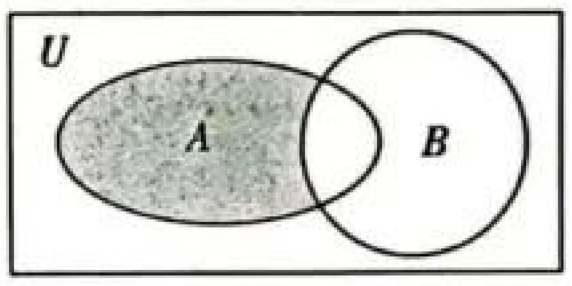

图1

A. $\{x\mid x\leqslant 5\}$　　B. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid x\leqslant 4\}$　　D. $\{x\mid 1<x\leqslant 5\}$

2. 若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=\mathrm{i}^{2022}$，则 $\bar{z}=$

A. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 为了发展学生的兴趣和个性特长，培养全面发展的人才. 某学校在不加重学生负担的前提下，提供个性、全面的选修课程. 为了解学生对于选修课《学生领导力的开发》的选择意愿情况，对部分高二学生进行了抽样调查，制作出如图2所示的两个等高条形图，根据条形图，下列结论正确的是

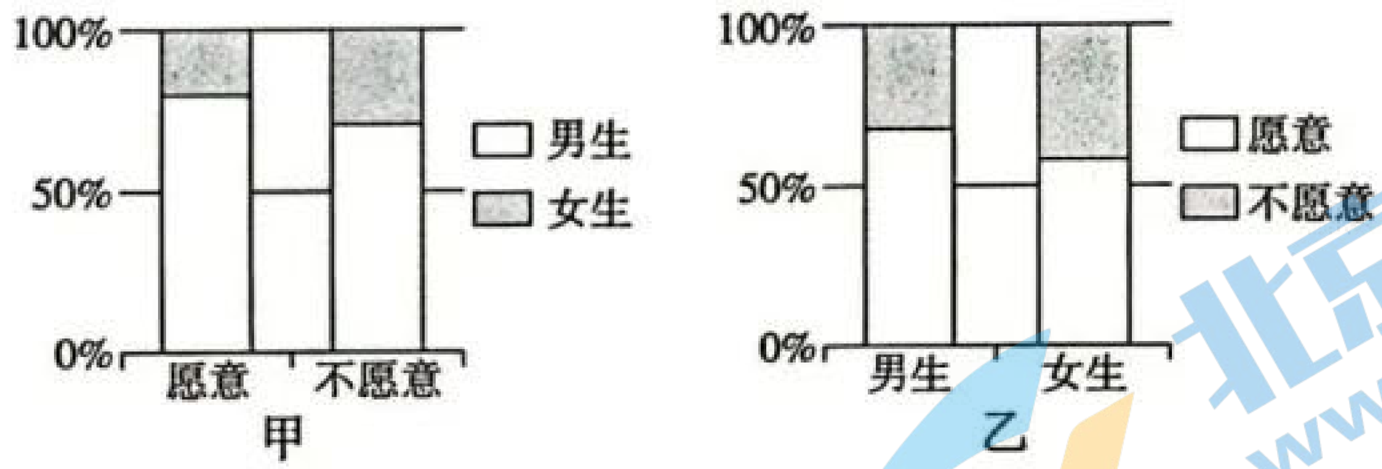

图2

A. 样本中不愿意选该门课的人数较多

B. 样本中男生人数多于女生人数

C. 样本中女生人数多于男生人数

D. 该等高条形图无法确定样本中男生人数是否多于女生人数

4. $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$，下列说法正确的是

①$f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$ 为偶函数；②$f(x)$ 的最小正周期为 2π；

③$f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上先减后增；④$f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称.

A. ①③　　B. ①④　　C. ③④　　D. ②④

5. 若双曲线 C：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2，C 的一条渐近线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

6. 已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}x+y-1\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 则 $z=\frac{y-3}{x-3}+\frac{x-3}{2y-6}$ 的最大值为

A. 2　　B. $\frac{33}{8}$　　C. $\frac{17}{12}$　　D. $\sqrt{2}$

7. 镜面反射法是测量建筑物高度的重要方法，在如图 3 所示模型中．已知人眼距离地面高度 $h=1.5$m，某建筑物高 $h_1=4.5$m，将镜子（平面镜）置于平地上，人后退至从镜中能够看到建筑物的位置，测量人与镜子的距离 $a_1=1.2$m，将镜子后移 a 米，重复前面中的操作，则测量人与镜子的距离 $a_2=3.2$m，则镜子后移距离 a 为（　　）m.

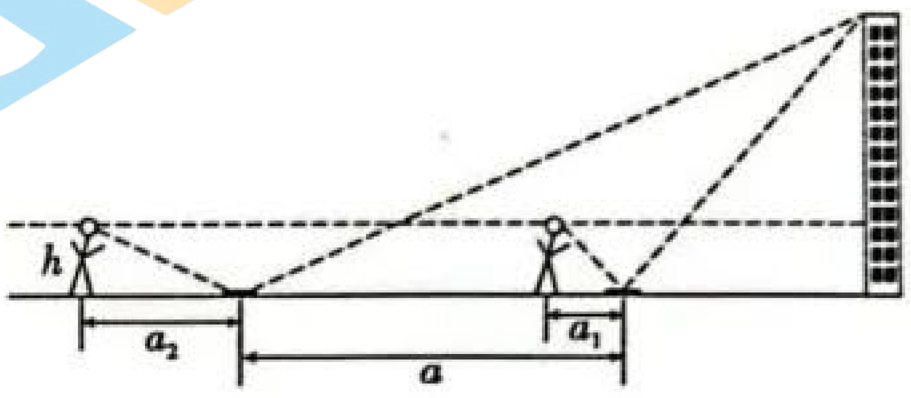

图 3

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

8. 如图 4，在平面四边形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$，$E$ 为 AC 的中点，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=-\frac{20}{9}$，则 λ 的值为

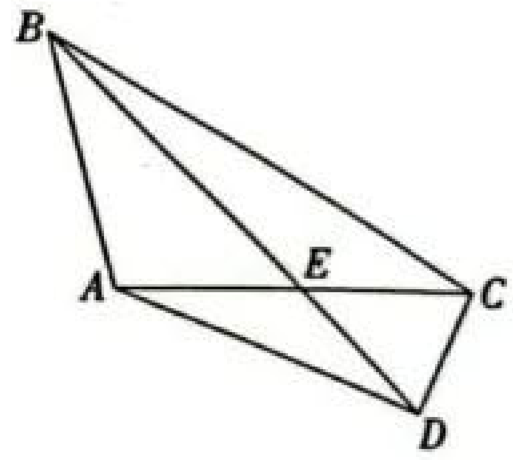

图 4

A. 2　　B. 3

C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

9. 将 6 个 A 和 2 个 B 随机排成一行，2 个 B 不相邻的概率为

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

10. 已知函数 $f(x)=xe^x+2a$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，对任意 $x_1\in[1,\ 2]$，$\exists x_2\in[1,\ 3]$，都有不等式 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立，则 a 的取值范围是

A. $[-e^2,\ +\infty)$　　B. $\left[\frac{1-e}{2},\ +\infty\right)$

C. $\left[-\frac{e}{2},\ +\infty\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2}-e^2,\ +\infty\right)$

11. 如图 5，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，$AC=BC=2$，$BB_1=7$，点 P 在棱 BB_1 上，且 P 靠近 B 点，当 $PA\perp PC_1$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为

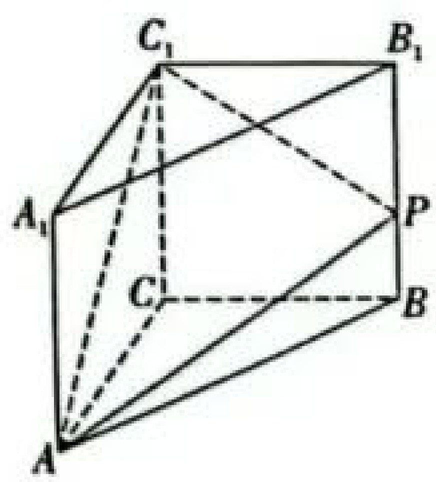

图 5

A. 3π　　B. 4π

C. 10π　　D. 17π

12. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_3=273$，$na_n-(n-1)a_{n+1}=94(n\in\mathbf{N}^*)$，当数列 $\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和取得最大值时，n 的值为

A. 30　　B. 31

C. 32　　D. 33

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 是以 O 为顶点，Ox 轴为始边，若角 θ 的终边过点$(3,\ -4)$，求$\dfrac{1+\sin2\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}=$________.

14. $(3-ax)^n$ 的展开式的各项二项式系数之和为 32，各项系数和为 1，则展开式中 x^3 的系数为________.

15. 已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 作斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，O 为坐标原点，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则$\triangle AOB$ 的面积为________.

16. 已知 $g(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $g(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$，若对任意 $x>0$，不等式 $g(e^x-a)+g(-e\ln(ex+a))\geqslant0$恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

某单位为了解职工对垃圾回收知识的重视情况，对本单位的 200 名职工进行考核，然后通过随机抽样抽取其中的 50 名，统计其考核成绩（单位：分），制成如图 6 所示的频率分布直方图.

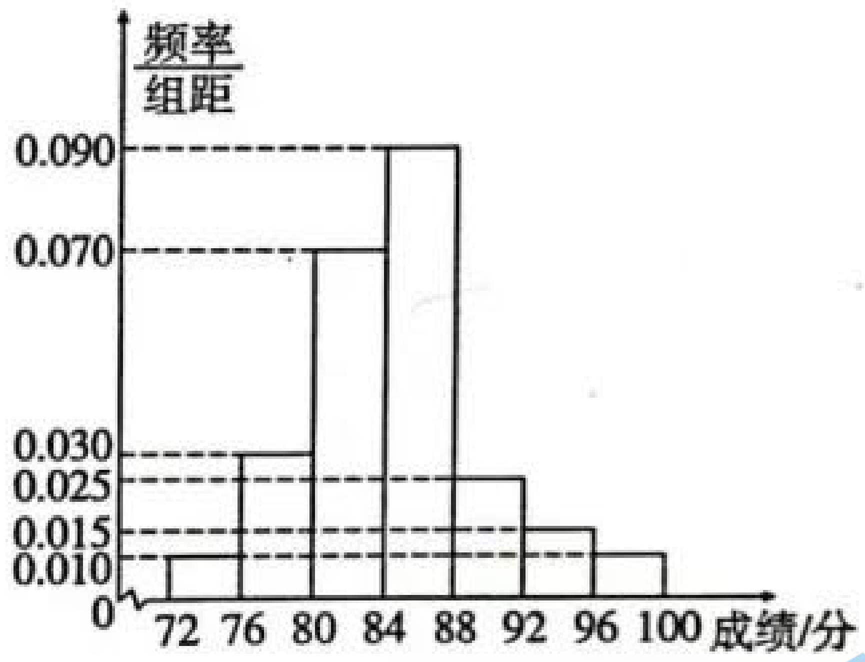

图 6

（1）求这 50 名职工考核成绩的平均数 $\bar{x}$(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表)及中位数 t(精确到 0.01)；

（2）若该单位职工的考核成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，其中“μ 近似为 50 名职工考核成绩的平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2，经计算得 $s^2=27.68$，利用该正态分布，估计该单位 200 名职工考核成绩高于 90.06 分的有多少名？（结果四舍五入保留整数.）

附参考数据与公式：$\sqrt{27.68}\approx5.26$，$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$.

18.（本小题满分 12 分）

已知锐角$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且$\dfrac{\sin A}{\sin B}+\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{c^2}{ab}+1$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $a+b=2$，求 c 的取值范围.

19. （本小题满分 12 分）

如图 7 甲，在四边形 $PBCD$ 中，$PD // BC$，$PB=BC=CD=AD=PA=2$，将 $\triangle ABP$ 沿 AB 折起得图乙，点 M 是 PD 上的点.

（1）若 M 为 PD 的中点，证明：$PC\perp$ 平面 ABM；

（2）若 $PC=\sqrt{6}$，试确定 M 的位置，使二面角 M-AB-C 的正弦值等于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

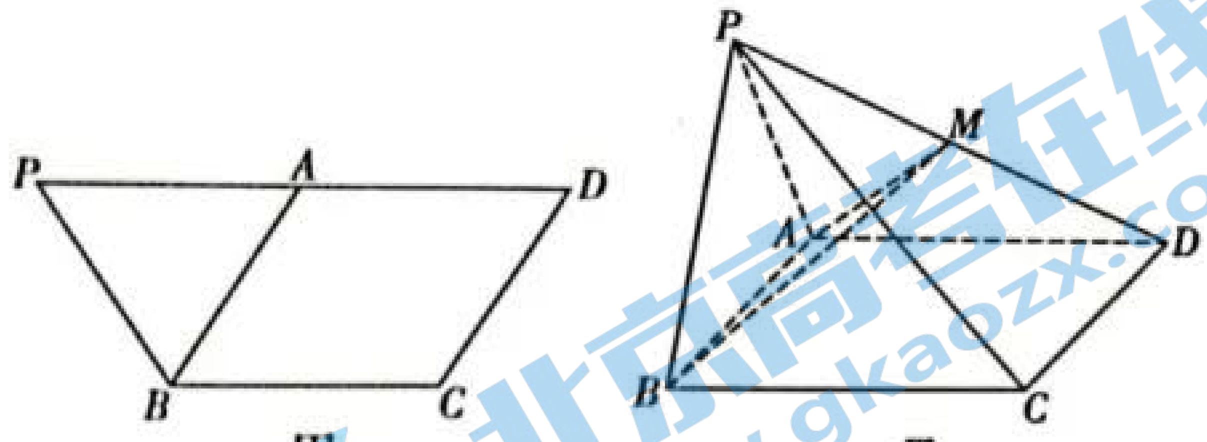

图 7

20. （本小题满分 12 分）

抛物线 C_1：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点到准线的距离等于椭圆 C_2：$x^2+16y^2=1$ 的短轴长.

（1）求抛物线 C_1 的方程；

（2）设 $D(1, t)$ 是抛物线 C_1 上位于第一象限的一点，过 D 作圆 E：$(x-2)^2+y^2=r^2$（其中 $0<r<1$）的两条切线，分别交抛物线 C_1 于点 M，N，证明：直线 MN 经过定点.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=xe^x-x^2$，$g(x)=tx\ln x-e^x+1(t\in\mathbf{R})$.

（1）当 $t=1$ 时，求证：$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

（2）当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 0$，求 t 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. （本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t,\\ y=\sqrt{3}t,\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. 以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求直线 l 的极坐标方程和曲线 C 的参数方程；

（2）求曲线 C 上一点 N 到直线 l 距离的最小值，并求出此时 N 点的坐标.

23. （本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|2x-3|$，$g(x)=3-|x-2|$.

（1）求不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 的解集 N；

（2）设 N 的最小数为 n，正数 a，b 满足 $a+b=3n$，求 $\frac{b^2+5}{a}+\frac{a^2}{b}$ 的最小值.

2023届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（二）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	B	A	A	B	A	B	A	C	D	C

【解析】

1．由图可得，图中阴影部分表示的集合为 $(\complement_U B)\cap A$，因为 $A=\{x\,|\,0<x\leqslant 4\}$，$\complement_U B=\{x\,|\,x\geqslant 5或x\leqslant 1\}$，所以 $(\complement_U B)\cap A=\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$，故选B.

2．$\mathrm{i}^{2022}=(\mathrm{i}^2)^{1011}=-1$，所以 $z=\dfrac{-1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，故选D.

3．对于A，由题图乙可知，样本中男生，女生都大部分愿意选择该门课；对于B，C，D，由题图甲可知，在愿意和不愿意的人中，都是男生占比较大，所以可以确定，样本中男生人数多于女生人数，故选B.

4．由辅助角公式可得：$f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，①$f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)=2\cos 2x$，为偶函数，正确；②最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故错误；③令 $2x+\dfrac{\pi}{6}=t$，$t\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$，$y=2\cos t$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$ 先减后增，复合函数同增异减易知，③正确；④$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，所 $f(x)$ 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称，④错误，故选A.

5．由题可知，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$，得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，双曲线 C：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线不妨为 $y=\dfrac{a}{b}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，即 $\sqrt{3}x-3y=0$，圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的圆心 $(0,\ 2)$，半径为 $r=2$，可得圆心到直线的距离为 $d=\dfrac{|6|}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2$，故选A.

6．令 $t=\dfrac{y-3}{x-3}$，则 $z=t+\dfrac{1}{2t}$，由 $\begin{cases}x+y-1\leqslant 0,\\x-y+1\geqslant 0,\\y\geqslant -1,\end{cases}$ 作出可行域如图1，则 $A(-2,\ -1)$，$B(2,\ -1)$，$C(0,\ 1)$，设点 $P(x,\ y)$，$D(3,\ 3)$，

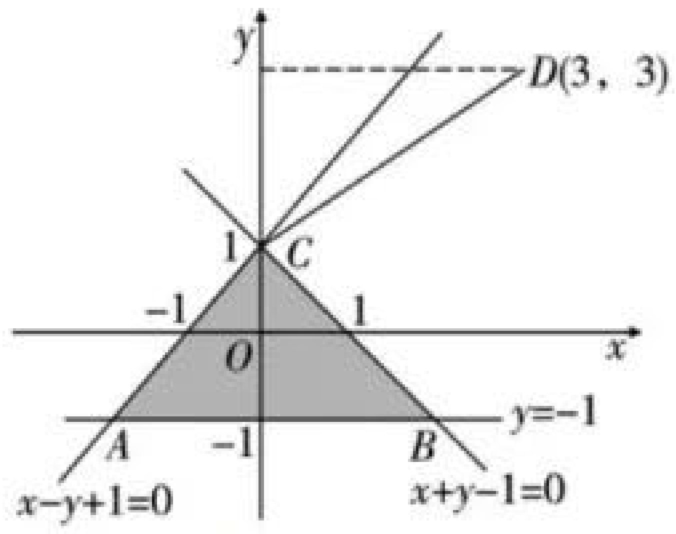

图1

其中 P 在可行域内，$\therefore t=\dfrac{y-3}{x-3}=k_{PD}$，由图可知当 P 在 C 点时，直线 PD 斜率最小，

$\therefore t_{\min}=k_{CD}=\dfrac{3-1}{3-0}=\dfrac{2}{3}$，当 P 在 B 点时，直线 PD 斜率最大，$\therefore t_{\max}=k_{DB}=4$，$\because z=t+\dfrac{1}{2t}$ 在

$t\in\left[\dfrac{2}{3},\ 4\right]$，$\therefore$ 当 $t=4$ 时，$z_{\max}=\dfrac{33}{8}$，故选 B.

7．利用三角形相似计算可得，由三角形相似可得 $\dfrac{h}{a_2}=\dfrac{h_1}{a+\dfrac{a_1h_1}{h}}$，整理可得 $a=\dfrac{h_1(a_2-a_1)}{h}=6$，

故选 A.

8．$\because|\overrightarrow{AC}|=4$，$E$ 为 AC 的中点，$\therefore|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{CE}|=2$，$\because\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})=$

$(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{EA})=|\overrightarrow{BE}|^2-|\overrightarrow{EA}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2-4=12$，$\therefore|\overrightarrow{BE}|=4$，$\therefore|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{\lambda}|\overrightarrow{BE}|=\dfrac{4}{\lambda}$，

$\therefore\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})=(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EA})=|\overrightarrow{DE}|^2-|\overrightarrow{EA}|^2=\dfrac{16}{\lambda^2}-4=-\dfrac{20}{9}$.

解得：$\lambda=3$，故选 B.

9. 6 个 A 和 2 个 B 随机排成一行共有：$C_7^1+C_7^2=28$ 种不同排法，2 个 B 不相邻共有 $C_7^2=21$ 种，

$\therefore$ 所求概率为 $\dfrac{21}{28}=\dfrac{3}{4}$，故选 A.

10．对任意 $x_1\in[1,\ 2]$，$\exists x_2\in[1,\ 3]$，都有不等式 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$，

$f'(x)=e^x(x+1)$，$x\in[1,\ 2]$，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,\ 2]$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=$

$e+2a$，$g'(x)=\dfrac{e(1-\ln x)}{x^2}$，$x\in[1,\ e]$，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 单调递增，$x\in(e,\ 3]$，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 单调递减，$g(1)=0$，$g(3)=\dfrac{e\ln 3}{3}>0$，$\therefore g(x)_{\min}=0$，$e+2a\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant-\dfrac{e}{2}$，故选C.

11．在$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB}=2\sqrt{3}$，$AC_1=\sqrt{AC^2+CC_1^2}=\sqrt{53}$，

由 $PA^2+PC_1^2=AC_1^2$ 得：$AB^2+BP^2+(7-BP)^2+B_1C_1^2=AC_1^2$，解得：$BP=1$或$6$，又因为

$BB_1=7$，且 P 靠近 B 点，所以 $BP=1$．由正弦定理可得，$\triangle ABC$ 外接圆半径 $r=2$，三

棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径 R 满足：$R^2=r^2+\left(\dfrac{PB}{2}\right)^2=\dfrac{17}{4}$，$\therefore$ 外接球表面积

$S=4\pi R^2=17\pi$，故选 D.

12．$na_n=(n-1)a_{n+1}+94$ ①，则 $(n+1)a_{n+1}=na_{n+2}+94$ ②，②−①得：$(n+1)a_{n+1}-na_n=na_{n+2}-$

$(n-1)a_{n+1}$，即 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=94$，由 $a_1+a_2+a_3=273$ 得

$a_2=91$，则公差 $d=a_2-a_1=-3$，通项 $a_n=97-3n$，数列 $\{a_n\}$ 单调递减，而

$a_{32}=1,\ a_{33}=-2,\ a_{34}=-5,\ a_{35}=-8$，设 $b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，当 $n\leqslant 30$ 时，$b_n>0,\ b_{31}=-8,\ b_{32}=10$，当 $n\geqslant 33$ 时，$b_n<0$，显然 $b_{31}+b_{32}=2$，即数列 $\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}(n\in \mathbf{N}^*)$ 的前 32 项和最大，故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$-\frac{1}{5}$	-720	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$(-\infty,\ 0]$

【解析】

13. ∵角 θ 的终边过点 $(3,\ -4)$，$\sin\theta=\frac{-4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$，解：$\frac{1+\sin 2\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}$ $=\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$.

14. 由题可知，各个二项式系数之和为 $2^n=32$，解得 $n=5$，令 $x=1$，可得各项系数之和为 $(3-a)^5=1$，解得 $a=2$，所以 $(3-2x)^5$ 展开式中 x^3 的系数为 $C_5^3 3^2(-2)^3=-720$.

15. ∵ $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，$l$ 斜率 $k>0$，设 l 倾斜角为 θ，由圆锥曲线统一的焦半径公式可得：$\frac{p}{1-\cos\theta}=2\frac{p}{1+\cos\theta}$，解得 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，∴ $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 又 $F(1,\ 0)$，$|AB|=|AF|+|BF|$ $=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OF||FA|\sin\theta+\frac{1}{2}|OF||FB|\sin\theta=\frac{1}{2}|OF|\sin\theta|AB|=\frac{p^2}{2\sin\theta}$ $=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 方法 2：也可设直线方程求解.

16. ∵ $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，$g(-x)=e^{-x}-e^{x}-2\sin x=-g(x)$，∴ $g(x)$ 为奇函数，且 $g'(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x\geqslant 2\sqrt{e^xe^{-x}}+2\cos x\geqslant 0$，∴ $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$g(e^x-a)+g(-e\ln(ex+a))\geqslant 0$，可化为 $g(e^x-a)\geqslant -g(-e\ln(ex+a))=g(e\ln(ex+a))$，即 $e^x-a\geqslant e\ln(ex+a)$，令 $f(x)=e^x-a-e\ln(ex+a)\left(x>-\frac{a}{e}\right)$，由函数 $f(x)=e^x-a-e\ln(ex+a)$，求得定义域为 $x\in\left(-\frac{a}{e},\ +\infty\right)$，对函数求导可得：$f'(x)=e^x-\frac{e^2}{ex+a}$，则存在一个 x_0，使得 $f'(x_0)=0$，且 $-\frac{a}{e}<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则

$f(x)\geqslant f(x_0)=e^{x_0}-a-e\ln(ex_0+a)=\dfrac{e^2}{ex_0+a}-a-e\cdot\ln e^{2-x_0}=ex_0+\dfrac{e^2}{ex_0+a}-2e-a$

$=ex_0+a+\dfrac{e^2}{ex_0+a}-2e-2a$．$\because ex_0+a+\dfrac{e^2}{ex_0+a}\geqslant 2e$，$\therefore f(x_0)\geqslant 2e-2e-2a=-2a\geqslant 0$，则

$a\leqslant 0$．故答案为实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\ 0]$．

三、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）这 50 名职工考核成绩的平均数为

$\bar{x}=74\times0.04+78\times0.12+82\times0.28+86\times0.36+90\times0.10+94\times0.06+98\times0.04=84.80$．

……………………………………………………………………（3 分）

由频率分布直方图得 $t\in[84,\ 88]$，$\therefore 0.04+0.12+0.28+0.09\times(t-84)=0.5$，

$\therefore$ 中位数 $t\approx84.67$（分）．……………………………………………（6 分）

（2）由题意得 $X\sim N(84.80,\ 27.68)$，……………………………………………（7 分）

$\mu+\sigma\approx84.80+\sqrt{27.68}\approx90.06$，……………………………………………（9 分）

$\therefore P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{0.6826}{2}=0.1587$，……………………………………（11 分）

$\therefore 200\times0.1587\approx32$（名），

$\therefore$ 估计该单位 200 名职工考核成绩高于 90.06 分的有 32 名．

……………………………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）$\triangle ABC$ 中，$\because \dfrac{\sin A}{\sin B}+\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{c^2}{ab}+1$，

由正弦定理，得 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{c^2}{ab}+1$，……………………………………（2 分）

$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$，$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$．……………………（4 分）

$\because C\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………………………（6 分）

（2）$\because C=\dfrac{\pi}{3}$，$B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}=\dfrac{c}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，…………（8 分）

又 $\because a+b=2$，$\therefore \dfrac{c\sin A}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{c\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

$\therefore c=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A}=\dfrac{1}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. ……………………（10 分）

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形，$\therefore A\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2}{3}\pi\right)$，

可得：$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，$\therefore c=\dfrac{1}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)}\in\left[1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

……………………………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：由题意，$AD=BC$，且 $AD/\!/BC$，故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $PB=CD=PA=2$，$\therefore \triangle PBA$ 是正三角形，四边形 $ABCD$ 是菱形.

如图 2，取 AB 的中点 E，连接 PE，CE，

$\therefore \triangle ABC$ 是正三角形，则 $AB\perp PE$，$AB\perp EC$.

又 $PE\cap EC=E$，$\therefore AB\perp$ 平面 PEC，$\therefore AB\perp PC$.

……………………………………………………（3 分）

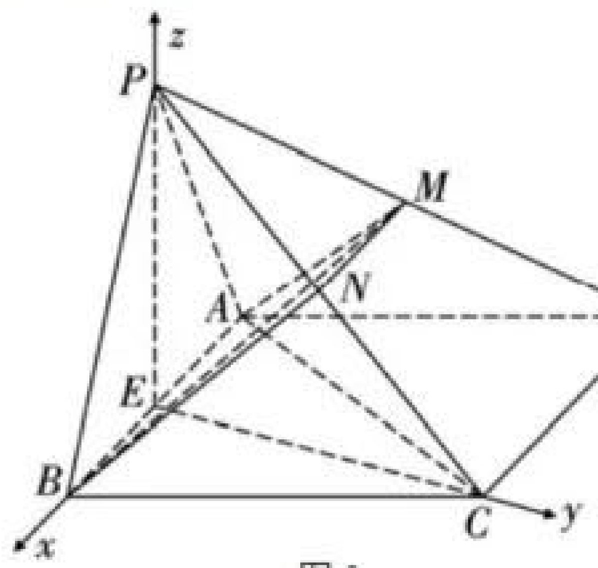

图 2

取 PC 的中点 N，连接 MN，BN，

则 $MN/\!/CD/\!/AB$，即 A，B，N，M 四点共面.

又 $PB=BC=2$，则 $BN\perp PC$，

又 $AB\cap BN=B$，$\therefore PC\perp$ 平面 ABM. ……………………………………………（6 分）

（2）解：$\because PE=CE=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{6}$，$\therefore PE\perp EC$.

又 $AB\perp PE$ 且 $AB\perp EC$，

以 EB，EC，EP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $E-xyz$，

则 $A(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(-2,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

设 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{MP}(\lambda>0)$，则 $M\left(\dfrac{-2}{1+\lambda},\dfrac{\sqrt{3}}{1+\lambda},\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}\right)$， ……………………………（8 分）

平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，……………………………………………（9 分）

设平面 MAB 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

又 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{-1+\lambda}{1+\lambda},\dfrac{\sqrt{3}}{1+\lambda},\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}\right)$，

$\therefore \begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2x=0, \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{-1+\lambda}{1+\lambda}x+\dfrac{\sqrt{3}}{1+\lambda}y+\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}z=0, \end{cases}$

则可取 $\vec{m}=(0,\ -\lambda,\ 1)$. ……………………………………………………………………（10 分）

由题意，二面角 $M-AB-C$ 的正弦值等于 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \cos\langle\vec{n},\ \vec{m}\rangle=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，……………………………………………（11 分）

$\therefore \lambda=2$，故 $DM=2MP$，即点 M 在线段 PD 靠近 P 的三等分点处.

……………………………………………………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）解：由椭圆 C_2：$x^2+16y^2=1$，得 $2b=\dfrac{1}{2}$，………………………………………（2 分）

$\therefore$ 抛物线 C_1：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点到准线的距离 $p=\dfrac{1}{2}$，

故抛物线方程为 $y^2=x$. …………………………………………………………………………（5 分）

（2）证明：$\because D(1,\ t)$ 是抛物线 C_1 上位于第一象限的点，

$\therefore t^2=1$ 且 $t>0$，$\therefore D(1,\ 1)$. ……………………………………………………………（6 分）

设 $M(a^2,\ a)$，$N(b^2,\ b)$，则直线 MN：$y-a=\dfrac{1}{(a+b)}(x-a^2)$，

即 $x-(a+b)y+ab=0$，

$\because$ 直线 DM：$x-(a+1)y+a=0$ 与圆 E：$(x-2)^2+y^2=r^2$ 相切，

$\therefore \dfrac{|a+2|}{\sqrt{1+(a+1)^2}}=r$，整理可得，$(r^2-1)a^2+(2r^2-4)a+2r^2-4=0$，①

同理由直线 DN 与圆 E 相切可得，$(r^2-1)b^2+(2r^2-4)b+2r^2-4=0$，②

由①②得 a，b 是方程 $(r^2-1)x^2+(2r^2-4)x+2r^2-4=0$ 的两个实根，………………（8 分）

$\therefore a+b=\dfrac{4-2r^2}{r^2-1}$，$ab=\dfrac{2r^2-4}{r^2-1}$，代入 $x-(a+b)y+ab=0$，

化简整理可得，$(x+2y+2)r^2-x-4y-4=0$，……………………………………………（10 分）

令 $\begin{cases} x+2y+2=0, \\ -x-4y-4=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=-1, \end{cases}$

故直线 MN 恒过定点 $(0,\ -1)$. ……………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

（1）证明：当 $t=1$ 时，$g(x)=x\ln x-e^x+1$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=\ln x+1-e^x$，…………（1 分）

又 $g''(x)=\dfrac{1}{x}-e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，…………（2 分）

且 $g''\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，且 $g''(1)=1-e<0$，

$\therefore \exists x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $g''(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$．

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g''(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g''(x)<0$，

$\therefore g'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，…………（4 分）

$\therefore g'(x)\leqslant g'(x_0)=\ln x_0+1-e^{x_0}$，$\because \dfrac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$，$\therefore \dfrac{1}{x_0}=e^{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，

$\therefore e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$\therefore g'(x)\leqslant g'(x_0)=-x_0+1-\dfrac{1}{x_0}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．…………（6 分）

（2）解：当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant0$，即 $(x-1)e^x-x^2+tx\ln x+1\geqslant0$（记为*）在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=(x-1)e^x-x^2+tx\ln x+1$，$h'(x)=x(e^x-2)+t(\ln x+1)$，…………（7 分）

$\because h(1)=0$，$\therefore$ 要使（*）式在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，则必须 $h'(1)=e-2+t\geqslant0$，$t\geqslant2-e$．

下面证明当 $t\geqslant2-e$ 时，$h(x)\geqslant h(1)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立．…………（8 分）

$\because x\geqslant1$，$\therefore \ln x+1>0$，$\therefore h'(x)\geqslant x(e^x-2)+(2-e)(\ln x+1)$．

又 $\ln x+1\leqslant x$，$\therefore h'(x)\geqslant x(e^x-2)+(2-e)x=x(e^x-e)\geqslant0$，

$\therefore$ 当 $t\geqslant2-e$ 时，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(1)=0$，即（*）式在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，

故 t 的取值范围为 $[2-e,+\infty)$．…………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t,\\ y=\sqrt{3}t,\end{cases}$（$t$ 为参数），消 t 得直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$．

$\because \begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ $\therefore$直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2\sqrt{3}=0$. ……………（3 分）

曲线 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的参数方程为：$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y=\sin\alpha, \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. ……………（5 分）

（2）设 $N(\sqrt{2}\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，……………………………………………………（6 分）

则 N 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{6}\cos\alpha+\sin\alpha-2\sqrt{3}|}{2}=\dfrac{|\sqrt{7}\sin(\alpha+\varphi)-2\sqrt{3}|}{2}(\tan\varphi=\sqrt{6})$，

……………………………………………………………………………………（8 分）

当 $\sin(\alpha+\varphi)=1$，即 $\alpha+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，$\cos\alpha=\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

$d_{\min}=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，此时点 $N\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{7},\ \dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$. ……………………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）$f(x)\leqslant g(x)$，即 $|2x-3|+|x-2|\leqslant 3$，

$\therefore \begin{cases} x<\dfrac{3}{2}, \\ 5-3x\leqslant 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2, \\ x-1\leqslant 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>2, \\ 3x-5\leqslant 3, \end{cases}$ ……………………………（2 分）

解得 $\dfrac{2}{3}\leqslant x<\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 或 $2<x\leqslant\dfrac{8}{3}$，

$\therefore$不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 的解集 $N=\left[\dfrac{2}{3},\ \dfrac{8}{3}\right]$. ……………………………（5 分）

（2）由（1）$n=\dfrac{2}{3}$，$\therefore a+b=3n=2$，则 $a^2=(2-b)^2=b^2-4b+4$，

$b^2=(2-a)^2=a^2-4a+4$，……………………………………………………（7 分）

则 $\dfrac{b^2+5}{a}+\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{5}{a}=\dfrac{a^2-4a+4}{a}+\dfrac{b^2-4b+4}{b}+\dfrac{5}{a}$

$=(a+b)+\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{b}-8=\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{b}-6=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{b}\right)(a+b)-6=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{4a}{b}\right)$

$\geqslant\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{9b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}=\dfrac{13}{2}$，当且仅当 $\dfrac{9b}{a}=\dfrac{4a}{b}$，即 $a=\dfrac{6}{5}$，$b=\dfrac{4}{5}$ 时等号成立.

$\therefore \dfrac{b^2+5}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ 的最小值为 $\dfrac{13}{2}$. ……………………………………（10 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。